系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
10 (4) (1990), 371—376

广义二分搜索及其在 LP 多项式算法复杂度证明中的应用

章祥荪　　堵丁柱
(中国科学院应用数学研究所)

1. 引　言

Khachiyan[1,2] 和 Karmarkar[3] 方法的提出，不仅解决了长期悬而未决的线性规划(LP)问题的多项式时间算法的存在性问题，而且开辟了优化算法设计上新的方法论体系。目前的兴趣之一是把这一方法论体系应用到一般的连续优化问题中去。

一个组合优化问题，同一般优化问题一样，可以表达成一个二元组 $(\mathscr{F}, c)$，其中 $\mathscr{F}$ 是可行解集合，c 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实目标函数。对于组合问题，一般地，$\mathscr{F}$ 是离散的集合，$c(\mathscr{F})$ 是 R^1 上的离散数集。解集的离散性和目标函数值的离散性就是问题的组合属性。

对于一个连续优化问题，特别是非线性规划问题，其可行解集一般是 R^n 中的一个子集，可行解集所对应的目标函数值则落在一维空间的一些区间段内。尽管传统的非线性规划算法是迭代型的算法，产生的逐步向最优解逼近的序列是一个离散的点列，但我们无法予先按某一方式使这一序列所对应的目标函数值能落在予先离散化了的值域内。因而，从非线性规划的传统算法理论上看来，无论是可行解集还是对应的目标函数的值域，要引入组合属性是相当困难的。

LP 问题是处于组合问题和连续优化问题之间的一类问题。传统的 LP 问题的表达方式是求一可行区域为多面体上的线性函数的极值问题。当把可行解限制在多面体的顶点上（即基本可行解)，则 LP 的可行解集合可以说是组合化的。不过，LP 的传统算法——单纯形方法不能有效地利用解集的组合性，而且，也同非线性规划的算法一样，不能对目标函数值的下降值按予先规定加以组合化。

Khachiyan 和 Karmarkar 为了求得 LP 的多项式算法，舍弃了 LP 的原来只具有形式上的组合性的问题表达，分别采用了线性严格不等式组（LSI）和特殊形式的线性不等式组（KLI）.

LI(LSI)：给定一个 $m\times n$ 的整数矩阵 A 和一个 m 维整数向量 b，是否有一个 n 维实向量 x，满足

$$Ax\leqslant b(Ax<b)?$$

1989 年 5 月 5 日收到，1989 年 8 月 12 日收到修改稿.

KLI：给定一满足条件 $A\mathbf{1}=0$ 的$m\times n$整数矩阵A及一个n维整数向量c，此处$\mathbf{1}$为所有元为单位1的n维列向量，是否存在一个n维实向量x，满足

$$Ax=0,\ \mathbf{1}^Tx=1,\ x\geqslant 0,\ c^Tx\leqslant 0.$$

从表面上看来，与 LP 问题等价的 LSI 和 KLI 问题没有明显的组合属性，它们更象是连续型求解问题和优化问题。因此，看一下 Khachiyan 和 Karmarkar 是如何对这二类问题引入组合属性并分析这些技巧的一般原理是一件有趣的事，它能帮助我们把组合优化的一些技巧和概念引入到连续优化的研究之中。

2. 广义二分搜索（Extended Binary Search）

二分搜索（Binary Search）是一种非常基本的组合算法[4]。简单地说，若我们要在区间$[1,B]$（B为一给定整数）中寻找一个未知整数x，取$a=B/2$，问"x是否大于a?"回答无非是"是"或"不"，总是使搜索的区间缩短一半。以后逐次对剩下的区间取位于中间的数，提同样格式的问题，这样可在$\lceil\log_2 B\rceil$步后使搜索的区间最多只包含一个整数。于是找到了那个未知整数。这里符号$\lceil x\rceil$表示大于等于x的最小整数。显然，二分搜索法是一阶的多项式算法，即具有线性复杂度的有效算法。

对于这一基本算法，我们可以作如下推广。

设T为一大于等于2的整数，B为任意实数，$(B>1)$。用提问"x是否大于a?"来寻找$\lceil 1,B\rceil$中一未知整数，此处取$a=B'/T$或$a=\left(\frac{T-1}{T}\right)B'$，$B'$为每次剩下区间的长度。整个算法如下：

算法 EBS:

```
begin
      given T ⩾ 2, B 大于 1 的实数, X:=1, Y:=B.
step  if Y − X ⩽ 1 then stop
      else a:=X + (Y − X)/T 或 a:=X + ((T−1)/T)(Y − X).
      if x > a then X:=a go to step
      else Y:=a go to step
end
```

对此算法我们有以下定理

定理1. 设B为大于1的实数，T为大于等于2的整数，则一个在区间$[1,B]$中的未知整数可由算法 EBS 在不多于$\lceil\log_{T/T-1}B\rceil$次作"step"运算后找到。

证．注意不论是取$a=X+(Y-X)/T$还是取$a=X+\left(\frac{T-1}{T}\right)(Y-X)$，若设每次的区间长度为$B'$，则剩下的区间长度不会超过$\left(\frac{T-1}{T}\right)B'$。由归纳法易知径$k$步后所剩区间不超过$\left(\frac{T-1}{T}\right)^kB$。这相当于对区间$\left[1,\ 2^k\left(\frac{T-1}{T}\right)^kB\right]$作$k$次二

分搜索后的结果。换言之，对 $\lceil 1, B\rceil$ 作广义二分搜索和对 $\left\lceil 1,\ 2^k\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil$ 作二分搜索时，在同样的步数时得到剩余区间不超过 $\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B$。因而广义二分搜索用于 $\lceil 1, B\rceil$ 的步数可由对 $\left\lceil 1,\ 2^k\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil$ 用二分搜索处理时所需的步数来估计。于是

$$k=\left\lceil \log_2 2^k\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil=\left\lceil K+\log_2\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil$$
$$=k+\left\lceil \log_2\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil,$$

由上式得

$$\left\lceil \log_2\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\right\rceil=0,$$

即

$$0<\left(\frac{T-1}{T}\right)^k B\leqslant 1,\quad 0<\left(\frac{T-1}{T}\right)^k\leqslant\frac{1}{B}<1,$$
$$k\ln\left(\frac{T-1}{T}\right)\geqslant\ln\frac{1}{B},\quad k\geqslant\log_{(T/T-1)}B.$$

故取 $k=\lceil\log_{T/T-1}B\rceil$，即为所证。

推论 1. 定理 1 对 T 为任意大于等于 2 的实数成立。

推论 2. 定理 1 对满足 $2\geqslant T>1$ 的任意实数 T 成立，此时的迭代次数为

$$K=\lceil\log_T B\rceil.$$

证. 在这种情况下，算法 EBS 对长度为 B' 的区间作一次迭代后剩下的区间长度不超过 B/T。于是经 k 次迭代后剩下的区间长度不超过 B/T^k。这相当于对区间 $\left\lceil 1, \left(\frac{2}{T}\right)^k B\right\rceil$ 作了 k 次二分搜索。于是

$$k=\lceil\log_2 2^k B/T^k\rceil=\lceil k+\log_2 B/T^k\rceil.$$

由此式得到

$$0<B/T^k\leqslant 1,\ 0<B\leqslant T^k,\ k\geqslant\log_T B.$$

于是取 $k\geqslant\lceil\log_T B\rceil$ 即为所求。

注 1. 在 T 取推论 2 中范围内之值时，T 有这样的含义，即作一步广义二分搜索时，原区间长度和残留区间长度之比至少为 T。

在引言中指出过，Khachiyan 和 Karmarkar 分别采用了 LS1 和 KL1 的形式来解 LP 问题，这二个问题表面看来酷似连续型问题。那么，他们是如何利用问题潜在的组合属性，从而建立起具有多项式时间的算法的呢？可以利用本节所指出的广义二分搜索来提出一个一般的框架。

分成几步进行：

i）对某一确定的优化问题，挑选该问题中的一个要素作为组合化的对象，我们称之为问题的特征量。在 Khachiyan 方法中，取可行解集的体积这一问题的要素为特征量；

在 Karmarkar 方法中,则取约束 $c^Tx \leqslant 0$ 中 c^Tx 的值为特征量.

ii) 设计算法时，要使算法进行中得到的迭代序列相应的特征量产生预期的组合性变化;换言之,我们要把特征量控制在具有组合特性的值域上来考虑，而这种值域的组合化依赖于算法的设计.

iii) 选定的特征量的组合化的值域有上界和下界,不妨设这一区间为 $[1, B]$，特征量取其中的整数. 如果一个算法使特征量在此区间内的变化符合广义二分搜索所显示的规律的话,则这个算法一定会在 $\lceil \log_{\frac{T}{T-1}} B \rceil$ 或 $\lceil \log_T B \rceil$ 步后收敛，否则就不再伴随有在预定组合化值域内的特征量. 因而这一算法从迭代步骤的复杂度来讲可能是很快的.

下面的定理 2 说明,如果我们能把一个问题的特征量限制在区间 $[1, B]$ 中(取整数值)，而 B 是问题大小 L 的一个多项式的指数，即 $B = cd^{p(L)}$, $c > 0$, $d > 1$. $p(L)$ 为 L 的一个多项式函数,且该问题的一个算法,使迭代中特征量的变化与一有适当选定的参数 T 的广义二分搜索的规律一致的话，则这一算法的迭代步数的上界是问题大小 L 的一个多项式函数.

定理 2. 设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 均是首项系数大于零的 x 的多项式，c_1, c_2, d_1, d_2 为大于 1 的常数. 设定理 1 中的 T 满足 $2 \geqslant T > 1$, $B = c_1 d_1^{p(L)}$, $T = c_2 d_2^{1/q(L)}$, 则用算法 EBS 寻找 $[1, B]$ 中某一未知整数的迭代步数的上界是问题大小 L 的一个多项式.

证. 由推论 2,

$$K = \lceil \log_T B \rceil = \lceil \log_{d_2} c_1 d_1^{p(L)} / \log_{d_2} c_2 d_2^{1/q(L)} \rceil$$
$$= \left\lceil \frac{q(L) \cdot \log_{d_2} c_1 + p(L) \cdot q(L) \log_{d_2} d_1}{q(L) \cdot \log_{d_2} c_2 + 1} \right\rceil.$$

一般 $p(L)$, $q(L)$ 为相当大的数,因而上式有上界

$$\lceil p(L) \cdot q(L) \cdot \log_{d_2}(d_1 \cdot c_1) \rceil$$

这就证明了定理 2 的结果.

3. 利用广义二分搜索对 Khachiyan 方法和 Karmarkar 方法的复杂度设计作分析

Khachiyan 对 LP 的等价形式 LSI 作研究. 对于 LSI，定义问题的组合特征量为集合 $\{x \mid Ax < b\}$ 的体积. 此时问题大小 $L = O(m \cdot n + \lceil \log |W| \rceil)$,其中 m 和 n 为矩阵 A 的行和列数，W 为 A 和 b 中所有不为零的元素之乘积. Khachiyan 给出了这一特征量的上界和下界.

引理 1[2]. 记一个 $m \times n$ 不等式 $Ax < b$ 的大小为 L. 若问题有解的话，则解集在球 $\|x\| \leqslant n \cdot 2^L$ 中的体积至少为 $2^{-(n+2)L}$.

这相当于说,包含在球 $\|x\| \leqslant n \cdot 2^L$ 内的解集的体积在区间 $[2^{-(n+2) \cdot L}, (2n \cdot 2^L)^n]$ 内. 换言之,若把解集的体积记为 V, 以 $2^{(n+2) \cdot L} \cdot V$ 为特征量，则此特征量的值域落在区间 $I = [1, 2^{(2n+2)L + n \ln 2n}]$ 内. 此处注意

$$2^{(n+2) \cdot L} \cdot (2n)^n \cdot 2^{Ln} = 2^{(n+2)L + n \cdot L} \cdot (2n)^n = 2^{(2n+2)L} \cdot 2^{n \ln(2n)}.$$

Khachiyan 从初始的球 $\|x\| \leqslant n \cdot 2^L$ 开始，逐次作包含解集但体积一个比一个小的椭球，直到找到一个包含解集且中心是解点的椭球(称这样的椭球为适当椭球)。这样逐次作椭球时，问题的特征量在作相应的变化，而这种变化实际上是对区间 I 作广义二分搜索。由定理 1 和定理 2，只要说明每次缩小的体积量是满足定理 2 中参数值的要求，则迭代多项式步后，特征量将小于 1，而这是同引理 1 相矛盾的。

由推论 2 后面的注 1，当 T 取值在 1 与 2 之间时，T 值相当于二个逐次所作的椭球的体积之比。由定理 2，此时若 $T = c_2 d_2^{1/q(L)}$ 时，就会达到期望的结果。事实上，Khachiyan 所作的椭球的确具有定理 2 所描述的特性，这可由下面改写了的[2]中的引理看出。

引理 2[2]. 记 $\mathrm{Vol}(E_{i+1})$ 和 $\mathrm{Vol}(E_i)$ 为 Khachiyan 算法中两个逐次所作的椭球 E_{i+1} 和 E_i 的体积，则有：

$$\frac{\mathrm{Vol}(E_i)}{\mathrm{Vol}(E_{i+1})} > 2^{1/2(n+1)} = 2^{1/q(L)}.$$

此处 $2^{1/q(L)}$ 就是 T 值，$q(L) = 2(n+1)$ 是 L 的一个低次多项式。显然 $2 > T > 1$.

此引理说明，若目前的椭球的体积为 B'，则对新的椭球的体积，相当于对区间 $I' = [1, B']$ 作 $a = B'/T, T = 2^{1/q(L)}$ 的广义二分搜索剩下的区间长度。而 $q(L) = 2(n+1)$ 变界于 $2L$，是一个低次的 L 的多项式。

对于 Karmarkar 的基本算法，同样可以利用 EBS 来分析其算法设计的核心思想。首先，考虑 KLI 问题以那一个要素作为加以组合化的特征量。Karmarkar 用的是相当于目标函数的不等式“$c^Tx \leqslant 0$”中的值 c^Tx。我们有以下的引理来建立特征量区间 I. 此时设问题的大小为 $L = O(m \cdot n + \lceil \log R^{m \cdot n} \rceil) = O(m \cdot n + \lceil m \cdot n \cdot \log R \rceil)$，其中 m 和 n 为矩阵 A 的行数和列数，R 为 A 和 c 中最大元素绝对值。以 πx 记 x 的分量 x_i 的乘积。

引理 3([5]中定理 15.1). 若 KLI 有解，则由[5]中定义的 Karmarkar 的基本算法产生的迭代序列 x^k 满足：

$$\frac{(c^Tx^{k+1})^n}{\pi x^{k+1}} < \frac{2}{e} \frac{(c^Tx^k)^n}{\pi x^k}.$$

也就是说，若我们取特征量为 $c^Tx/(\pi x)^{1/n}$ 时，这一特征量是单调下降的，目前两个 x^k 对应的特征量之比小于

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\ln 2 - 1)} = e^{1/q(L)}.$$

此处 $q(L) = n/(\ln 2 - 1)$ 是 L 的一个低次多项式。

引理 4. 设初始点为 $x^0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)^T$，则由[5]中算法产生的点列 $\{x^k\}$ 对应的值 $c^Tx/(\pi x)^{1/n}$ 落在区间 $[1/R^n \cdot n^{n-1}, nR]$ 中。

证. 因为 $c^Tx^0 \leqslant \frac{1}{n}(n \cdot \max\{c_i\}) \leqslant R$，且由引理 3，特征量是单调下降的，于是 $n \cdot R$ 是特征量的上界。另一方面，考虑问题 $c^Tx^* = \min\{c^Tx | Ax = 0, \mathbf{1}^Tx = 1, x \geqslant 0\}$. 若后来的 KLI 问题无解，则 $c^Tx^* > 0$. 在这种情况下，对任意后一问题的可行解 x，有 $c^Tx > 0$ 且由线性规划的基本定理，必有基本最优解 x^*，使 $c^Tx \geqslant c^Tx^* > 0$. 因

而，利用 Cramer 法则，我们可知基本可行解的分母值最大为 $n^n R^n$. 再由整数性，对于那些 $c^T x > 0$ 的 x，$c^T x$ 的值不可能小于 $1/n^n R^n$. 最后不难说明，特征量的下界为 $1/n^{n-1} R$.

由这两个引理，我们看出基本的 Karmarkar 方法对应于特征量值的一个倍数，即 $n^{n-1} R c^T x/(\pi x)^{1/n}$ 在区间 $[1, n^n R^{n+1}]$ 中迭代.我们剩下只要说明,特征量在该区间中的迭代符合定理 2 的条件即可. 事实上,我们可看到

$$n^n R^{n+1} = e^{n[\ln n+(n-1)]\ln R} = e^{p(L)},$$

而 $p(L)$ 是 L 的一个低阶多项式. 其次,引理 3 说明了 $q(L)$ 也是一个 L 的低阶多项式.

从以上的分析中看出，尽管 Khachiyan 算法和 Karmarkar 算法在形式上和数学工具上是如此不同,但它们在许多方面有内在的一致性.它们都是对一个外表上看来象是连续型的问题进行组合化. 这种组合化的过程是选取问题的一个要素，作为要加以组合化的特征量. 确定这一特征值所在的整数区间,并使得这个区间的上、下界是问题大小 L 的一个多项式的指数函数. 算法的设计是要使相应的特征量区间在每一次迭代中被有效地切割.

我们希望这种思想和框架能利用来处理其他连续型的优化问题，特别是将组合概念引入到研究算法的迭代步数的复杂性上去.

参 考 文 献

[1] Khachiyan, L. G., A polynomial algorithm for linear programming, *Doklady Akad Nauk USSR*, **244**: 5 (1979), 1093—96, *Translated in Soviet Math. Doklady*, **20**, 191—194.

[2] Aspvall, B. and R. E. Stone, Khachiyon's linear programming algorithm, *Journal of Algorithms*, **7**: 1(1980).

[3] Karmarkar, N., A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica* 4(1984), 373—395.

[4] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz. K., Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

[5] Schrijver, A., Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, New York, 1986.

EXTENDED BINARY SEARCH AND ITS APPLCATION IN DESIGN OF POLYNOMIAL-TIME ALGORITHM FOR LP

Zhang Xiang-Sun Du Ding-Zhu

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper presents an unified methodology for design of polynomial-time algorithms for LP by summarizing Khachiyan's algorithm and Karmarkar's algorithm. The authors developed the concepts of binary search are developel into the so-called extended binary search, which is used as an unified model to analyze the complexities of algorthms and to help design new algorithms.