系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
12 (1) (1992), 58—67

Poisson 方程的一个降维算法

张 维 弢
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

Lions[1] 建立在变分形式中的渐近展开方法，用于解决 Stiff 问题是很有力的工具。Ciarlet[2] 利用[1]的方法，研究弹性薄板问题，对薄板不做任何假设，仅用严格的数学推理，证明了简化的二维模型是三维薄板模型的一阶近似. Васильева[3] 利用算子和边界条件，同时进行 ε 幂级数的渐近展开，研究在定义域 $D=\{(x, y)|(x, y)\in R^2, x\in(0,1), y\in(0,\varepsilon)\}$ (即细杆)上的抛物型问题. 本文第一部分，利用 [1,3] 的方法，考虑定义在 R^3 中的薄板上的 Poisson 方程的混合边值问题. 第二部分，给出问题的变分形式，利用一般的 Poincaré-Friedrichs 不等式，讨论问题的存在唯一性. 第三部分，给出定义在三维薄板上的 Poisson 方程的渐近分析，结果表明，三维 Poisson 问题可化为二维 Poisson 问题来处理. 第四部分，给出渐近解的误差估计. 应该指出一个有趣的现象，是对定义在薄板上的 Poisson 问题，渐近展开项数越多，误差精度不一定越高，近似解 $u_\varepsilon^1=\frac{u^{-1}}{\varepsilon}+u^0+\varepsilon u^1$ 就可相当精确地刻画解的形态. 第五部分，改进了 Brézis[5] 和[6]中的极限情形的 Sobolev 不等式，并利用这个不等式，估计解的奇异部分 u^{-1} 的极大值.

一、问　　题

设 $\omega\subset R^2$ 是开集，$\partial\omega=\sigma$ 是 ω 的光滑边界曲线. 设 $\Omega^\varepsilon=\{x=(x_1, x_2, x_3)|(x_1, x_2)\in\omega, |x_3|<\varepsilon\}$, Ω^ε 的表面记为

$$\Gamma_0^\varepsilon=\{x=(x_1, x_2, x_3)|(x_1, x_2)\in\sigma, |x_3|<\varepsilon\},$$
$$\Gamma_+^\varepsilon=\{x=(x_1, x_2, x_3)|(x_1, x_2)\in\omega, x_3=\varepsilon\},$$
$$\Gamma_-^\varepsilon=\{x=(x_1, x_2, x_3)|(x_1, x_2)\in\omega, x_3=-\varepsilon\}.$$

我们假设 $\varepsilon\ll\omega$ 的几何度量.

我们考虑 Poisson 方程

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x_1,x_2,x_3) \text{ 在 } \Omega^\varepsilon \text{ 上},\\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=g^+ \text{ 在 } \Gamma_+^\varepsilon \text{ 上},\\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=g^- \text{ 在 } \Gamma_-^\varepsilon \text{ 上},\\ u=0 \text{ 在 } \Gamma_0^\varepsilon \text{ 上},\end{cases} \tag{1.1}$$

1990 年 10 月 11 日收到.
* 国家自然科学基金资助的课题.

其中 ν 是 Γ_+^ε，Γ_-^ε 的外法线。

设

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = \dfrac{x_3}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{1.2}$$

则(1.2)变 Ω^ε 为 $\Omega^1 = \{y = (y_1, y_2, y_3) | (y_1, y_2) \in \omega, |y_3| < 1\}$。$\Omega^1$ 的表面记为

$$\Gamma_0 = \{y = (y_1, y_2, y_3) | (y_1, y_2) \in \sigma,\ |y_3| < 1\},$$
$$\Gamma_+ = \{y = (y_1, y_2, y_3) | (y_1, y_2) \in \omega,\ y_3 = 1\},$$
$$\Gamma_- = \{y = (y_1, y_2, y_3) | (y_1, y_2) \in \omega,\ y_3 = -1\}.$$

利用(1.2)，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_+^\varepsilon} = \dfrac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_+^\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial y_3}\Big|_{\Gamma_+}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_-^\varepsilon} = -\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_-^\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial y_3}\Big|_{\Gamma_-}. \end{cases} \tag{1.3}$$

利用(1.3)，由(1.1)，有

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} - \varepsilon^2 \Delta_2 u = \varepsilon^2 f(y_1, y_2, \varepsilon y_3) \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, & (1.4\text{a}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_3} = \varepsilon g^+ \text{ 在 } \Gamma_+ \text{ 上}, & (1.4\text{b}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_3} = -\varepsilon g^- \text{ 在 } \Gamma_- \text{ 上}, & (1.4\text{c}) \\ u = 0 \quad \text{ 在 } \Gamma_0 \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ 是 ω 上的 Laplace 算子。

我们假定

$$f(y_1, y_2, \varepsilon y_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(y_1, y_2, y_3), \tag{1.5}$$

其中 $f_0(y_1, y_2, y_3) = f(y_1, y_2, 0), f_i(y_1, y_2, y_3) = \dfrac{d^i f(y_1, y_2, \varepsilon y_3)}{d\varepsilon^i}\Big|_{\varepsilon=0}$，$i = 1, 2, 3, \cdots$。

我们假设

$$\begin{cases} g^+ = 0 \text{ 在 } \partial\Gamma_+^\varepsilon \text{ 上}, \\ g^- = 0 \text{ 在 } \partial\Gamma_-^\varepsilon \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\partial\Gamma_+^\varepsilon$ 和 $\partial\Gamma_-^\varepsilon$ 分别是 Γ_+^ε 和 Γ_-^ε 的边界。

由(1.1)的 $u|_{\Gamma_0^\varepsilon} = 0$，可以看出，条件(1.6)是要求 u 的法向导数在 Γ_+^ε 和 Γ_-^ε 的边界内邻域上连续。

本文中的 C 表示同 ε 和函数无关的常数。

二、变分形式和一般的 Poincaré-Friedrichs 不等式

设 $V(\Omega^\varepsilon)=\{v\,|\,v\in H^1(\Omega^\varepsilon),\ v|_{\Gamma_0^\varepsilon}=0\}$，我们定义 $v\in V(\Omega^\varepsilon)$ 的范数 $\|v\|_{V(\Omega^\varepsilon)}=\left(\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

设

$$a(u,v)=\int_{\Omega^\varepsilon}\nabla u\cdot\nabla v dx,$$

$$F(v)=\int_{\Omega^\varepsilon}f(x)v(x)dx+\int_{\Gamma_+^\varepsilon}g^+vds+\int_{\Gamma_-^\varepsilon}g^-vds,$$

则(1.1)等价于变分问题：求 $u\in V(\Omega^\varepsilon)$，使

$$\forall v\in V(\Omega^\varepsilon),\ a(u,v)=F(v) \tag{2.1}$$

成立.

设 $\Omega\subset R^n(n\geqslant 2)$ 是有界开集，其边界为 Γ. 假设 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，且 $\Gamma_1\neq\Gamma$，$|\Gamma_1|=\text{meas}(\Gamma_1)>0$. 设 $V(\Omega)=\{v\,|\,v\in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1}=0\}$. 则在 $V(\Omega)$ 上成立一般的 Poincaré-Friedrichs 不等式

$$\forall v\in V(\Omega),\ \left(\int_\Omega|\nabla v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.2}$$

其中 $C>0$ 为同 v 无关，且同 Ω 有关的常数.

当 $n=3$ 时，Duvaut-Lions[4] 给出了(2.2)的证明. 事实上，当 $n\geqslant 2$，我们都可证明(2.2).

利用(2.2)和 Lax—Milgram 引理，我们可证问题(2.1)存在唯一解 $u\in V(\Omega^\varepsilon)$.

利用(1.2)，有

$$\begin{cases}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx=\varepsilon\int_{\Omega^1}\left|\frac{\partial v}{\partial y_i}\right|^2dy,\ i=1,2,\\ \int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial v}{\partial x_3}\right|^2dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^1}\left|\frac{\partial v}{\partial y_3}\right|^2dy>\varepsilon\int_{\Omega^1}\left|\frac{\partial v}{\partial y_3}\right|^2dy.\end{cases} \tag{2.3}$$

由(2.3)，利用(2.2)，有

$$C(\Omega^1)\varepsilon\|v\|^2_{H^1(\Omega^1)}<\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2dx. \tag{2.4}$$

利用(1.2)，有

$$\begin{cases}\int_{\Omega^\varepsilon}v^2dx=\varepsilon\int_{\Omega^1}v^2dy<\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^1}v^2dy,\\ \int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx<\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^1}\left|\frac{\partial v}{\partial y_i}\right|^2dy,\ i=1,2,\\ \int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial v}{\partial x_3}\right|^2dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^1}\left|\frac{\partial v}{\partial y_3}\right|^2dy.\end{cases} \tag{2.5}$$

由(2.5)，有

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}<\|v\|_{H^1(\Omega^1)}. \tag{2.6}$$

(2.4)和(2.6)在本文第四部分的误差估计中起着重要的作用。

三、渐 近 展 开

利用(1.4)的方程和边界条件同时进行 ε 的幂级数渐近展开，来研究(1.4)的渐近解。

定理 3.1　设 $\hat{f}_i=\int_{-1}^{1} f_i(y_1,y_2,y_3)dy_3$，$i=0,1,2$。若(1.6)成立，则问题(1.4)的近似解 u_ε^2 可表为

$$u_\varepsilon^2=\frac{u^{-1}}{\varepsilon}+u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon^2 u^2, \tag{3.1}$$

其中 u^{-1} 与 y_3 无关且满足

$$\begin{cases}-\Delta_2 u^{-1}=\dfrac{g^+ + g^-}{2} \text{ 在}\,\omega\,\text{上}, \\ u^{-1}|_\sigma=0;\end{cases} \tag{3.2}$$

u^0 与 y_3 无关且满足

$$\begin{cases}-\Delta_2 u^0=\hat{f}_0 \text{ 在}\,\omega\,\text{上}, \\ u^0|_\sigma=0;\end{cases} \tag{3.3}$$

$$u^1=\frac{g^+ + g^-}{4}y_3^2+\frac{g^+ - g^-}{2}y_3+\hat{u}^1, \tag{3.4}$$

$$\hat{u}^1=0; \tag{3.5}$$

$$u^2=\hat{u}^2, \tag{3.6}$$

且 $\hat{u}^2$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta_2 \hat{u}^2=\hat{f}_2 \text{ 在}\,\omega\,\text{上}, \\ \hat{u}^2|_\sigma=0.\end{cases} \tag{3.7}$$

证. 设 $u=\sum\limits_{i=-1}^{\infty}\varepsilon^i u^i$ 代入(1.4)，比较方程 (1.4a)，边界条件 (1.4b) 和 (1.4c) 的两边 ε 的同次幂的系数，有

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial^2 u^{-1}}{\partial y_3^2}=0 \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, & (3.8a)\\ \left.\dfrac{\partial u^{-1}}{\partial y_3}\right|_{y_3=1}=0, & (3.8b)\\ \left.\dfrac{\partial u^{-1}}{\partial y_3}\right|_{y_3=-1}=0; & (3.8c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial^2 u^0}{\partial y_3^2}=0 \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, \\ \left.\dfrac{\partial u^0}{\partial y_3}\right|_{y_3=1}=0, \\ \left.\dfrac{\partial u^0}{\partial y_3}\right|_{y_3=-1}=0;\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial y_3^2} - \Delta_2 u^{-1} = 0 \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, & (3.10\text{a}) \\ \left.\dfrac{\partial u^1}{\partial y_3}\right|_{y_3=1} = g^+, & (3.10\text{b}) \\ \left.\dfrac{\partial u^1}{\partial y_3}\right|_{y_3=-1} = -g^-, & (3.10\text{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial y_3^2} - \Delta_2 u^0 = f_0 \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, & (3.11\text{a}) \\ \left.\dfrac{\partial u^2}{\partial y_3}\right|_{y_3=1} = 0, & (3.11\text{b}) \\ \left.\dfrac{\partial u^2}{\partial y_3}\right|_{y_3=-1} = 0; & (3.11\text{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^{i+2}}{\partial y_3^2} - \Delta_2 u^i = f_i \text{ 在 } \Omega^1 \text{ 上}, \\ \left.\dfrac{\partial u^{i+2}}{\partial y_3}\right|_{y_3=1} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u^{i+2}}{\partial y_3}\right|_{y_3=-1} = 0, \end{cases}$$

其中 $i = 1,2,\cdots$.

在$[-1,1]$上,对 y_3 积分 (3.8a), 并利用 (3.8b),(3.8c), 有 $u^{-1} = C(y_1, y_2)$, 即 u^{-1} 是一个不依赖于 y_3 的函数. 在 $[-1, 1]$, 对 y_3 积分 (3.10a), 再利用 (3.10b), (3.10c), 有

$$-\Delta_2 u^{-1} = \frac{g^+ + g^-}{2} \text{ 在}\,\omega\,\text{上}, \tag{3.13}$$

要求边界条件 $u^{-1}|_\sigma = 0$, 由(3.13),有(3.2). 由(3.2)有 $u^{-1}|_{\Gamma_0} = 0$.

由(3.9)可知, u^0 是一个不依赖于 y_3 的函数. 在 $[-1,1]$ 上,对 y_3 积分 (3.11a), 由(1.5)可知, f_0 与 y_3 无关,即 $\hat{f}_0 = 2f_0$, 并利用 (3.11b), (3.11c), 有

$$-\Delta_2 u^0 = f_0 \text{ 在}\,\omega\,\text{上}, \tag{3.14}$$

要求 $u^0|_\sigma = 0$, 由(3.14),有(3.3). 由(3.3),有 $u|_{\Gamma_0} = 0$.

由(1.5)可知, $f_1 = y_3 f'_{x_3}(y_1, y_2, 0)$, 由此可知 $\hat{f}_1 = 0$. 在(3.12)中,取 $i = 1$, 并在 $[-1,1]$上,对 y_3 积分(3.12),再要求 $\hat{u}^1|_\sigma = 0$, 有(3.5).

利用(3.2),由(3.10),有

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial y_3^2} = \frac{g^+ + g^-}{2}. \tag{3.15}$$

对 y_3 积分(3.15),并利用 (3.10b), (3.10c), 有

$$\frac{\partial u^1}{\partial y_3} = \frac{g^+ + g^-}{2} y_3 + \frac{g^+ - g^-}{2}. \tag{3.16}$$

再对 y_3 积分 (3.16),有

$$u^1 = \frac{g^+ + g^-}{4} y_3^2 + \frac{g^+ - g^-}{2} y_3 + C(y_1, y_2). \tag{3.17}$$

在(3.17)中,取 $C(y_1,y_2)=\hat{u}^1$, 有(3.4). 由(1.6)有 $u^1|_{\Gamma_0}=0$.

在(3.12)中,取 $i=2$, 在$[-1,1]$上,对 y_3 积分(3.12), 再要求 $\hat{u}_2|_\sigma=0$, 有(3.7)

将(3.3)代入(3.11),有

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial y_3^2}=0. \tag{3.18}$$

对 y_3 积分(3.18),并利用 (3.11b), (3.11c), 有

$$\frac{\partial u^2}{\partial y_3}=0. \tag{3.19}$$

对 y_3 积分(3.19),并取积分常数为 $\hat{u}^2$, 有(3.6). 由(3.6)可知, $u^2|_{\Gamma_0}=0$.

注 3.1. 若在(3.1)中,渐近展开从 u^{-2} 开始,我们可以证明 $u^{-2}=0$.

四、误差估计

定理 4.1　设 $u_\varepsilon^1=\dfrac{u^{-1}}{\varepsilon}+u^0+\varepsilon u^1$, $R=\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon^{i-2}f_i(y_1,y_2,y_3)$. 若(1.6)成立,则对问题(1.1)的近似解 u_ε^1, 成立误差估计

$$\|u-u_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f_1+\varepsilon R\|_{L^2(\Omega^1)}. \tag{4.1}$$

证. 直接计算可知, u_ε^1 满足

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon^1=f_0 \text{ 在 } \Omega^\varepsilon \text{ 上},\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu}=g^+ \text{ 在 } \Gamma_+^\varepsilon \text{ 上},\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu}=g^- \text{ 在 } \Gamma_-^\varepsilon \text{ 上},\\ u_\varepsilon^1=0 \text{ 在 } \Gamma_0^\varepsilon \text{ 上}.\end{cases} \tag{4.2}$$

设 $F_1(v)=\int_{\Omega^\varepsilon}f_0 v\,dx+\int_{\Gamma_+^\varepsilon}g^+v\,ds+\int_{\Gamma_-^\varepsilon}g^-v\,ds$, 则(4.2)等价于变分问题

$$\forall v\in V(\Omega^\varepsilon),\ a(u_\varepsilon^1,\ v)=F_1(v). \tag{4.3}$$

从(2.1)减去(4.3),有

$$\forall v\in V(\Omega^\varepsilon),\ a(u-u_\varepsilon^1,\ v)=F_2(v), \tag{4.4}$$

其中 $F_2(v)=\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}(f_1+\varepsilon R)v\,dx$.

在(4.4)中,取 $v=u-u_\varepsilon^1$, 利用(1.2),(2.4),(2.6),有(4.1).

注 4.1. 设 $h=R-\hat{f}_2$, 类似于(4.1)的证明,对 u_ε^2, 可知成立误差估计

$$\|u-u_\varepsilon^2\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f_1+\Delta_2 u^1+\varepsilon h\|_{L^2(\Omega^1)}. \tag{4.5}$$

五、极限情形的 Sobolev 不等式的再改进和 u^{-1} 的极大值估计

设 $n\geqslant 2, p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $0<k<l$, $|Y|=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $L=\|\varphi\|_{L^1(R^n)}$,

$a_0=\|\varphi\|_{L^p(R^n)}$, $a_k=\||Y|^k\varphi\|_{L^p(R^n)}$, $a_l=\||Y|^l\varphi\|_{L^p(R^n)}$, $s_0=\frac{1}{k}$, $s_k=\frac{1}{k}+\frac{1}{l-k}$, $s_l=\frac{1}{l-k}$, ω_n 是 R^n 中单位球的面积.

引理 5.1 若 $kp'=n$, $a_0\leqslant a_l$. 则

$$I\leqslant 3^{\frac{1}{p}}(\omega_n)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\beta^{-\frac{1}{p'}}a_k^{1-\beta}(1+a_k^{\beta p'}(1+\log(1+a_l)))^{\frac{1}{p'}},\tag{5.1}$$

其中 $0<\beta\leqslant\frac{1}{ep'}$.

证. 由[6]的 p. 195 公式(2.10),有

$$I\leqslant 3^{\frac{1}{p}}(\omega_n)^{\frac{1}{p'}}a_k^{1-\beta}\left(a_k^{\beta p'}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}+s_0\log(1+a_0)+s_l\log(1+a_l)\right)\right.$$
$$\left.-s_ka_k^{\beta p'}\log a_k\right)^{\frac{1}{p'}}.\tag{5.2}$$

在(5.2)中,设

$$I'=a_k^{1-\beta}\left(a_k^{\beta p'}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}+s_0\log(1+a_0)\right.\right.$$
$$\left.\left.+s_l\log(1+a_l)\right)-s_ka_k^{\beta p'}\log a_k\right)^{\frac{1}{p'}}.\tag{5.3}$$

在(5.3)中,设

$$J=a_k^{\beta p'}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}+s_0\log(1+a_0)+s_l\log(1+a_l)\right)-s_ka_k^{\beta p'}\log a_k,$$

利用 $a_0\leqslant a_l$, $s_0+s_l=s_k$, $\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}=\frac{s_k}{p'}$, 有

$$J\leqslant a_k^{p'\beta}s_k(1+\log(1+a_l))-s_ka_k^{\beta p'}\log a_k.\tag{5.4}$$

对 $\forall t\in(0,\infty)$, $m>0$, $\beta>0$, 有

$$t^{m\beta}\log t^{-1}\leqslant\frac{1}{m\beta e}.\tag{5.5}$$

利用(5.5),由(5.4),有

$$J\leqslant a_k^{\beta p'}s_k(1+\log(1+a_l))+\frac{s_k}{\beta p'e}.\tag{5.6}$$

取 $\frac{1}{p'\beta e}\geqslant 1$, 所以,当 $\beta\leqslant\frac{1}{p'e}$ 时, 利用 $s_k=p'\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}\right)$, 由(5.6),有

$$J\leqslant\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{lp'-n}\right)\frac{1}{\beta}(1+a_k^{\beta p'}(1+\log(1+a_l))).\tag{5.7}$$

(5.7)代入(5.3),(5.3)再代入(5.2),有(5.1).

引理 5.2 设 $l>k$, $2k=n$, $\Omega\subset R^n$. 对 $\forall u\in H^l(\Omega)$, 则

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\beta^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{H^k(\Omega)}^{1-2\beta}(1+\|u\|_{H^k(\Omega)}^{2\beta}(1+\log(1+\|u\|_{H^l(\Omega)})))^{\frac{1}{2}},\tag{5.8}$$

其中 $0<\beta\leqslant\frac{1}{2e}$.

利用[6]的引理 2.2 的证法，由(5.1)，可证(5.8).

注 5.1. 在[5]中，Brézis 证明，若 $\|u\|_{H^k(\Omega)}\leqslant 1$，$\Omega\subset R^2$，则

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C(1+\log(1+\|u\|_{H^2(\Omega)}))^{\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

一般称(5.9)为极限情形的 Sobolev 不等式，(5.9)是 Sobolev 嵌入定理的一个新发展.

设 $l>k, 2k=n, \Omega\subset R^n$. 若 $\|u\|_{H^k(\Omega)}\leqslant C$，对 $\forall u\in H^l_{\ }(\Omega)$，[6] 证明 (参看[6] p. 196，公式(2.13))

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\beta^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{1+\beta}_{H^k(\Omega)}(1+\log(1+\|u\|_{H^l(\Omega)}))^{\frac{1}{2}}, \tag{5.10}$$

其中 $0<\beta\ll 1$.

(5.10)是(5.9)的一个改进. 在(5.8)中，对 $\|u\|_{H^k(\Omega)}$ 不加任何条件，而在(5.10)中，要求 $\|u\|_{H^k(\Omega)}\leqslant C$，因此，(5.8)是(5.10)的一个再改进.

设 $g^++g^-\in L^2(\omega)$，由(3.2)和先验估计可知，

$$\|u^{-1}\|_{H^2(\omega)}\leqslant C\|g^++g^-\|_{L^2(\omega)}. \tag{5.11}$$

以 u^{-1} 乘(3.2)的两边，有

$$\int_\omega|\nabla u^{-1}|^2dy=\int_\omega\frac{g^++g^-}{2}u^{-1}dy\leqslant\int_\omega\frac{|g^++g^-|}{2}\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)}dy$$

$$=\frac{1}{2}\|g^++g^-\|_{L^1(\omega)}\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)}. \tag{5.12}$$

由(5.12)，有

$$\|u^{-1}\|_{H^1(\omega)}\leqslant C\|u^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\omega)}\|g^++g^-\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\omega)}. \tag{5.13}$$

定理 5.1 u^{-1} 的极大值满足估计

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)}\leqslant C\beta^{-1}\|g^++g^-\|^{\frac{1-\beta}{1+\beta}}_{L^1(\omega)}(1+\|g^++g^-\|^{2\beta}_{L^1(\omega)}(1$$

$$+\log\cdot(1+C\|g^++g^-\|_{L^2(\omega)}))^{1+\beta})^{\frac{1}{1+\beta}}, \tag{5.14}$$

其中 $0<\beta\leqslant\frac{1}{2e}$.

证. 设

$$s=\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)},$$
$$t=\|g^++g^-\|_{L^1(\omega)},$$
$$r=1+\log(1+C\|g^++g^-\|_{L^2(\omega)}).$$

将(5.11)，(5.13)代入(5.8)，并注意 C 的代数运算仍记为 C，有

$$s^{1+\beta}\leqslant C\beta^{-1}t^{1-\beta}+C\beta^{-1}s^\beta tr. \tag{5.15}$$

在(5.15)中，记

$$A=C\beta^{-1}s^\beta tr. \tag{5.16}$$

设 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$p>1$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \alpha>0$，成立 Hölder 不等式

$$xy \leqslant \sigma x^p + \frac{1}{q} (p\sigma)^{-\frac{q}{p}} y^q. \tag{5.17}$$

取 $p = \frac{1+\beta}{\beta}$，$q = 1+\beta, \sigma = \frac{1}{2}$，利用(5.17)和 $(1+\beta)^{-(1+\beta)} < 1$，估计(5.16)，有

$$A \leqslant \frac{1}{2} s^{1+\beta} + C\beta^{-1} t^{1+\beta} r^{1+\beta}. \tag{5.18}$$

(5.18)代入(5.15)，并利用 $\beta^{-\frac{1}{1+\beta}} < \beta^{-1}$，可证(5.14).

设 $B_\rho^2(b)$ 是以 b 为中心，ρ 为半径的圆. 定义

$$w_\rho^s(x-b) = \begin{cases} \dfrac{1}{k_2\rho^s} e^{\frac{|x-b|^2}{|x-b|^2-\rho^2}}, & \text{当 } x \in B_\rho^2(b) \subset \omega \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \in \omega - \overline{B_\rho^2(b)} \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $0 < \rho \ll 1$，$k_2 = \int_{|Y|<1} e^{\frac{|Y|^2}{|Y|^2-1}} dY$.

定理 5.2. 设 $g^+ + g^- = w_\rho^s(x-b)$. 当 $1 < s < 2$ 时，有

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant C(2-s)^{-1}\beta^{-2}\rho^{(2-s)(1-\beta)(1+\beta)^{-1}}, \tag{5.19}$$

其中 $0 < \beta \leqslant \frac{1}{2e}$.

证. 计算可知

$$\|g^+ + g^-\|_{L^1(\omega)} = \rho^{2-s}. \tag{5.20}$$

利用 $e^{\frac{|x-b|^2}{|x-b|^2-\rho^2}} \leqslant 1$，有

$$\|g^+ + g^-\|_{L^2(\omega)} \leqslant c\rho^{1-s}. \tag{5.21}$$

(5.20)，(5.21)代入(5.14)，有

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant C\beta^{-1}\rho^{(2-s)(1-\beta)(1+\beta)^{-1}}(1 + (\rho^{2(2-s)\beta(1+\beta)^{-1}}\log\rho^{-1})^{1+\beta})^{(1+\beta)^{-1}}. \tag{5.22}$$

利用(5.5)，有

$$(\rho^{2(2-s)\beta(1+\beta)^{-1}}\log\rho^{-1})^{1+\beta} \leqslant \frac{(1+\beta)^{1+\beta}}{(2(2-s)\beta e)^{1+\beta}} \leqslant \frac{C}{((2-s)\beta)^{1+\beta}}. \tag{5.23}$$

将(5.23)代入(5.22)，有(5.19).

注 5.1. 计算可知

$$\|W_\rho^2(x-b)\|_{L^2(\omega)}^2 \geqslant \frac{1}{k_2^2\rho^{2s}} \int_{|Y|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\rho} e^{-1} dy = C_0\rho^{2-2s}, \tag{5.24}$$

其中 $C_0 > 0$.

由(5.24)可知，当 $1 < s < 2$ 时，有

$$\lim_{\rho\to 0}\|W_\rho^s(x-b)\|_{L^2(\omega)} = \infty. \tag{5.25}$$

由(5.11)和嵌入定理可知，

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant C\|W_\rho^s(x-b)\|_{L^2(\omega)}. \tag{5.26}$$

由(5.19)可知，当 $1 < s < 2$ 时，有

$$\lim_{\rho\to 0}\|u^{-1}\|_{L^\infty(\omega)} = 0. \tag{5.27}$$

对比(5.25),(5.27)可知,(5.19)比(5.26)要精确得多. 因此,引理5.2要比通常的嵌入定理精确.

参 考 文 献

[1] Lions, J. L., Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal, Springer-Verlad, 1973.
[2] Ciarlet, P. G., and Destuynder, P., A justification of the two-dimensional linear plate model, *Journal de Mécanque*, **18** (2) (1979), 315—343.
[3] Васильева, А. Б., и Бутузов, В. Ф., Погранслойные методы в сингулярно возмущенных задачах с частными производными, Наука, 128—142, Москва, 1988.
[4] Duvaut, G. et Lions, J. L., Les inéquations en Mécanique et en physique, Dunod, 1972 (中译本王耀东译,科学出版社,1987).
[5] Brézis, H., Laser Beams and Limiting Cases of Sobolev Inequalities, Research Notes in Math. 60, Collège de France (1981), 87—97.
[6] Zhang Weitao, The embedding theorem in limiting cases and its applications in singular perturbations, *Acta Math. Appl. Sinica* **3**: 3(1987), 193—200.

A DIMENSION-REDUCING METHOD FOR THE POISSON EQUATION

ZHANG WEI-TAO
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*, Beijing 100080)

ABSTRACT

In this paper, the poisson equation with mixed boundary conditions is considered in a thin plate in R^3. By use of the asymptotic expansion, the three-dimensional problem is transformed into two-dinensional solutions. The Sobolev inequality is further improved in the limiting cases. From this inequality, the maximum of the singular part of the asymptotic expansion of the equation is estimated.