

## 二面体群 $D_n$ 上的 H-圈的一个判别条件

王 敏 方新贵

(烟台大学数学系, 山东烟台 264005)

### 一、引 言

设  $G$  是有限群,  $S$  为  $G$  的一个非空子集,  $e$  是  $G$  中的单位元, 如果  $e \notin S$ , 则称  $S$  为  $G$  的一个 Cayley-子集. 定义 Cayley 有向图  $X = X(G, S)$  如下:

$$V(X) = G, E(X) = \{(a, b) | a, b \in G, ba^{-1} \in S\}.$$

当  $S = S^{-1}$  时  $X$  是无向图, 简称 Cayley 图. 若  $X$  有 Hamiltonian 圈(简记为 H-圈), 也称  $X$  是 H-图.

继 Lovasz 提出“仅有有限个顶点传递的连通图是非 H-图”的猜想后, Parsons 等猜测“连通 Cayley 图是 H-图”. 但由于要一般性地解决这个问题极其困难, 人们开始对一些特殊群类所决定的连通 Cayley 图讨论是否是 H-图. W. Holsztynski 和 R.F.E. Strube 在[1]中曾提出猜想: “每个由二面体群(Dihedral group)或  $p$ -群 ( $p$  为素数)决定的连通 Cayley 图都是 H-图”. 这个猜想关于  $G$  是  $p$ -群的情形已被 D. Witte<sup>[2]</sup> 所证明. 十分有趣的是, 被人们认为十分简单的二面体群, 即使在 3 度的情形下是否是 H-图, 至今仍未解决. 在文献[2—5]中列举了这方面的部分结果, 但迄今为止所见到的最好结果仅是 D.L. Powers<sup>[5]</sup> 对  $n = 2^i pq (i = 1, 2; p, q$  为互异奇素数) 及  $n < 120$  时证明了  $2n$  阶的二面体群  $D_n$  所决定的 3 度连通 Cayley 图是围长为 6 的 Hamiltonian 图. 本文更一般性地讨论这一问题, 得到

**定理.** 设  $D_n$  是二面体群,  $S = \{a, b, c\} = S^{-1}$  是  $G$  的 Cayley 子集, 且  $D_n = \langle S \rangle$ , 令  $H_1 = \langle a, b \rangle$ ,  $H_2 = \langle a, c \rangle$ ,  $H_3 = \langle b, c \rangle$ , 则  $X$  的围长  $\text{girth}(X) = 6$ , 并且若存在某个  $i (1 \leq i \leq 3)$ , 使得  $H_i$  在  $D_n$  中的指数  $|D_n : H_i| =$  偶数, 则连通的 3 度 Cayley 图  $X(D_n, S)$  是 H-图.

由此定理, 仅需对  $|D_n : H_i| (i = 1, 2, 3)$  皆为奇数的情形来证明 3 度连通 Cayley 图  $X(D_n, S)$  是否为 H-图, 即可完满解决在最困难的 3 度情况下的 W. Holsztynski 猜想. 另外根据该定理可得

**推论 1.** 设  $n = 2^m p'q'$ ,  $p, q$  为互异的奇素数,  $m, r, s$  均为非负整数, 则 3 度连通的 Cayley 图  $X(D_n, S)$  是 H-图.

由推论 1 又易得到

**推论 2.** 当  $n < 165$  时, 3 度连通的 Cayley 图  $X(D_n, S)$  是 H-图.

## 二、3 度连通 Cayley 图 $X(D_n, S)$ 的结构

$2n$  阶二面体群  $D_n$  中的  $2n$  个元一半为旋转,一半为对合. 设以下出现的 Cayley 子集  $S = \langle a, b, c \rangle = S^{-1}$  恒是  $D_n$  的一个生成集, 且  $a, b, c$  均为对合. 因为事实上若  $S$  中有旋转元, 不妨设为  $c$ , 若  $c$  的阶  $|c| = 2$ , 则  $c \in Z(D_n)$  (这里  $Z(D_n)$  表示  $D_n$  的中心), 易证  $X(D_n, S)$  是 H-图. 若  $|c| \neq 2$ , 则  $c \neq c^{-1} \in S$ , 可设  $c^{-1} = b$ , 于是  $D_n = \langle S \rangle = \langle a, b \rangle$ . 考察有向 Cayley 图  $X(D_n, \{a, b\})$  的基础无向图, 必然是连通的 2-正则图, 故  $X(D_n, S)$  必有 H-圈. 以下设  $|H_i| < 2n$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $|D_n : H_i| = k$ . 对于  $n$  的每个正因子  $d$  ( $d \neq 2$ ), 由于  $D_n$  有且仅有一个  $d$  阶循环子群  $H_d$ , 故  $H_d \triangleleft D_n$ . 于是由  $D_n = \langle S \rangle = \langle a, b, c \rangle = \langle a, b, bc \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle bc \rangle = H_1 \cdot \langle bc \rangle$ , 可得到  $H_1$  对  $D_n$  的右陪集分解

$$D_n = H_1 \cup H_1(bc) \cup \cdots \cup H_1(bc)^{k-1}. \quad (1)$$

令  $|ab| = r$ , 则  $X(D_n, S)$  含有  $k$  个点不交, 且长均为  $2r$  的无向圈  $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$ . 这里  $C_0 = X(H_1, \{a, b\})$ ,  $C_i$  是将  $C_0$  中每一顶点均右乘  $(bc)^i$  所得到的与  $C_0$  同构的圈,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . 可将  $C_i$  上的点依序标为

$$C_i = (x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}, y_r^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

其中

$$\begin{cases} x_j^{(i)} = (ab)^{j-1}, & x_j^{(i)} = x_j^{(0)}(bc)^i, \\ y_j^{(i)} = b(ab)^{j-1}, & y_j^{(i)} = y_j^{(0)}(bc)^i, \end{cases} \quad (2)$$

这里  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ .

注意到  $H_1$  中的  $r$  个旋转含在  $\langle ab \rangle$  中, 并且  $(bc)^k \in H_1$  及  $(bc)^k$  为旋转, 故有整数  $l$ ,  $0 \leq l \leq r-1$ , 使得  $(bc)^k = (ab)^l$ . 由此得到

$$c(bc)^{k-1} = b(ab)^l. \quad (3)$$

根据 (3), 易知在  $X(D_n, S)$  中有  $x_j^{(k-1)}$  与  $y_{\frac{l+j}{r+1}}^{(0)}$  邻接,  $j = 1, 2, \dots, r$ , 这里  $\frac{l+j}{r+1}$  表示  $l+j \pmod{r}$  的余数. 由 (1)–(3) 立即得到 3 度连通 Cayley 图  $X(D_n, S)$  有如下支撑子图  $X_1$  (见图 1). 由  $X_1$  又可得到  $X(D_n, S)$  的边集为

$$E(X) = E(X_1) \cup \{e_0, \dots, e_{k-1}; e'_1, \dots, e'_r\},$$

这里  $e_i = (y_r^{(i)}, x_1^{(i)})$ ;  $e'_j = (x_j^{(k-1)}, y_{\frac{l+j}{r+1}}^{(0)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ . 由此我们确定了 3 度连通 Cayley 图  $X(D_n, S)$  的结构.

以下考察  $k$  为偶数的情形. 我们将  $C_{k-1}$  中的顶点  $x_j^{(k-1)}$  记为  $V_j$ , 将  $V_j$  在  $C_0$  中的邻接点  $y_{\frac{l+j}{r+1}}^{(0)}$  记作  $U_j$ , 于是  $(V_j, U_j) \in E(X)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ . 另外对于  $(x, y) \in E(X)$  且  $y = sx$ ,  $s \in S$ , 则称边  $(x, y)$  为一条  $s$ -边. 显然  $E(X)$  中的边分为  $a$ -边,  $b$ -边和  $c$ -边三大类. 对于任意  $x \in V(X)$ , 与  $x$  邻接的三条边恰好是  $a$ -边,  $b$ -边和  $c$ -边各一条. 为叙述方便还有

**定义.** 在图 1 中, 称路  $P$  为  $U_i$  到  $V_{\frac{l+i}{r+1}}$  的 2- $c$  交错路, 其中

$$m = l + \frac{k}{2},$$

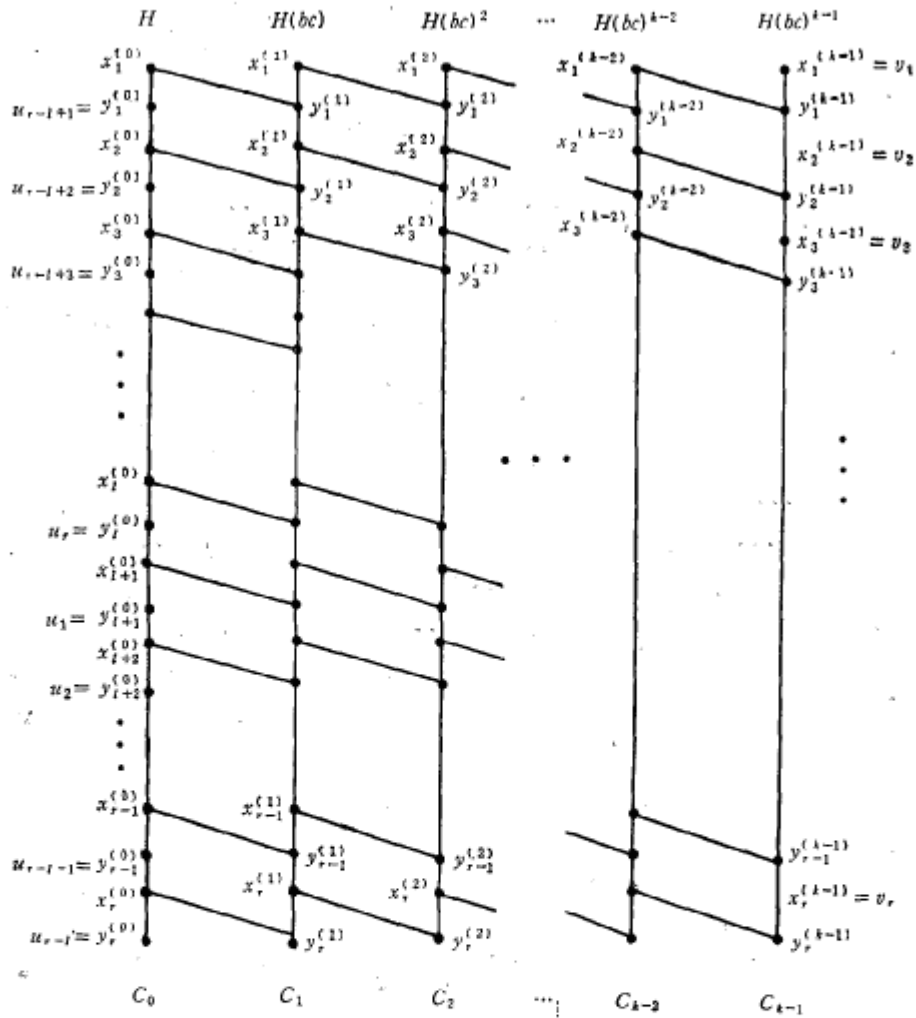


图 1

$P = (y_{i+1}^{(0)}, x_{i+1+1}^{(0)}, y_{i+1+1}^{(1)}, x_{i+1+1}^{(1)}, y_{i+1+1}^{(2)}, x_{i+1+1}^{(2)}, y_{i+1+1}^{(3)}, x_{i+1+1}^{(3)}, \dots, x_{i+i+\frac{k}{2}}^{(k-1)})$ , 将  $P$  简记为  $P(U_i, V_{\overline{m+1}}, 2-c)$ .

事实上,  $P(U_i, V_{\overline{m+1}}, 2-c)$  是从  $U_i = y_{i+1}^{(0)}$  到  $V_{\overline{m+1}} = x_{i+i+\frac{k}{2}}^{(k-1)}$  的一条  $c$ -边交错出现的路. 当  $P$  进入到  $C_i$  时, 若  $i$  是偶数则向下走一边后通过  $c$ -边进入  $C_{i+1}$ , 若  $i$  是奇数则向上走一边后通过  $c$ -边进入  $C_{i+1}$ . 类似地我们还定义  $P(U_i, V_{\overline{m+1}}, 2q-c)$ , 这里仅将  $P(U_i, V_{\overline{m+1}}, 2-c)$  中每个  $C_i$  顺序走一条边改成走  $2q-1$  条边即可.

### 三、定理及推论的证明

**定理的证明.** 由第二节即知,  $\text{girth}(X) = 6$ . 令

$$T_0 = \{U_1, \dots, U_r\}, T_{k-1} = \{V_1, \dots, V_r\}.$$

则对于任意  $U_i \in T_0$ , 由第二节中定义的  $P(U_i, V_{\overline{m+i}}, 2-c)$  可在  $T_{k-1}$  中找到唯一确定的  $V_{\overline{m+i}}$  与之对应. 从而可建立  $T_0$  到  $T_{k-1}$  的一一对应  $\tau$  如下:

$$U_i \mapsto V_{\overline{m+i}}, i = 1, 2, \dots, r.$$

根据  $U_i$  与  $\tau(U_i) = V_{\overline{m+i}}$  的脚标对应关系, 得到  $r$  元置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r-m & r-m+1 & \cdots & r \\ m+1 & m+2 & \cdots & r & 1 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

可将  $\sigma$  简记为  $\left(\frac{i}{m+i}\right)$ .  $\sigma$  可分解为一系列不交轮换之积  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t$ , 并可设

$$\sigma_1 = (1 \overline{m+1} \ 2\overline{m+1} \ \cdots \ (d-1)\overline{m+1}). \quad (4)$$

显然由  $|\sigma_1| = d$  是  $|\sigma|$  的因子, 且  $\sigma = (1, 2, \dots, r)^m$  可知  $d|r$ . 令  $q = \frac{r}{d}$ . 则对于每个  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ),  $C_i$  恰好分割为  $d$  段长均为  $2q$  的路. 对于  $C_0$  分割为如下  $d$  段:  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_d^{(0)}$ . 每条路的头一个端点依序为  $U_1, U_{\overline{m+1}}, \dots, U_{\overline{(d-1)m+1}}$ . 同样将  $C_{k-1}$  分成如下  $d$  段:  $P_1^{(k-1)}, P_2^{(k-1)}, \dots, P_d^{(k-1)}$ , 其中每条路的头一个端点为  $\tau(U_1), \tau(U_{\overline{m+1}}), \dots, \tau(U_{\overline{(d-1)m+1}})$ , 即  $V_{\overline{m+1}}, V_{\overline{2m+1}}, \dots, V_{\overline{(d-1)m+1}}, V_1$ . 现从  $U_1$  开始经一条  $P(U_1, V_{\overline{m+1}}, 2q-c)$  路到达  $C_{k-1}$  中的  $V_{\overline{m+1}}$ , 由于  $(V_{\overline{m+1}}, U_{\overline{m+1}}) \in E(X)$ , 故从  $V_{\overline{m+1}}$  可经  $c$ -边到达  $U_{\overline{m+1}}$ . 然后再由  $U_{\overline{m+1}}$  开始经一条  $P(U_{\overline{m+1}}, V_{\overline{2m+1}}, 2q-c)$  路到达  $C_{k-1}$  中的  $V_{\overline{2m+1}}$ . 同理由  $V_{\overline{2m+1}}$  经  $c$ -边又到  $U_{\overline{2m+1}}$ . 重复上述步骤, 一般地, 若到达  $U_{\overline{im+1}}$  ( $i \leq d-1$ ), 则由  $U_{\overline{im+1}}$  开始经  $P(U_{\overline{im+1}}, V_{\overline{(i+1)m+1}}, 2q-c)$  路到达  $V_{\overline{(i+1)m+1}}$ , 再从该点经  $c$ -边走到  $U_{\overline{(i+1)m+1}}$ , 如此下去. 根据 (4) 式可走出一条由  $U_1$  到  $U_1$  的简单回路  $C$ , 由于  $|V(C)| = 2q \cdot d \cdot k = 2rk = |D_n|$ , 所以  $C$  是  $X(D_n, S)$  中的一个 H-圈. 于是  $X(D_n, S)$  是 H-图. 证毕.

**推论 1 的证明.** 设  $|H_i| = 2r_i$ , 于是  $|ab| = r_1, |ac| = r_2, |bc| = r_3$ . 又令  $(r_i, r_j) = d_{ij}$  ( $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ ), 则  $|H_i \cap H_j| = 2d_{ij}$ . 由于

$$D_n = \langle S \rangle = \langle a, b, c \rangle = \langle a, b, ac \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle ac \rangle \subseteq H_1 \cdot H_2,$$

故  $H_1 \cdot H_2 = D_n$ . 同理有  $H_1 \cdot H_3 = H_2 \cdot H_3 = D_n$ . 从而有

$$|D_n| = |H_i \cdot H_j| = \frac{|H_i| |H_j|}{|H_i \cap H_j|} = 2n = 2^{m+1} p' q' \quad (i \neq j),$$

即

$$\frac{r_i \cdot r_j}{d_{ij}} = 2^m p' q' \quad (i \neq j). \quad (5)$$

排除定理所考虑的情形知  $2^{m+1}|r_i, i = 1, 2, 3$ , 利用 (5) 知必存在某个  $i$  使  $H_i = D_n$ , 不妨设  $H_1 = D_n$ , 于是  $X(D_n, S)$  有支撑子图  $X(H_1, \{a, b\})$  为 H-图. 故  $X$  也为 H-图.

**推论 2 的证明.** 对  $n < 165$  进行分解, 由推论 1 知仅对  $n = 3 \times 5 \times 7 = 105$  讨论即可, 平凡验证知  $X(D_{105}, S)$  是 H-图(证略).

最后, 对 C.E. Praeger 教授和徐明曜教授的指导和帮助表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- [1] Holsztynski, W. and R. F. E. Strube, Paths and circuits in finite graphs, *Discrete Math.*, 22(1978), 263—272.
- [2] Witte, D., Cayley diagrams of prime-power order are hamiltonian, *J. Combin. Theory*, 40B(1986), 107—112.
- [3] Altshuler, A., Hamiltonian circuits in some maps on the torus, *Discrete Math.*, 1(1972), 299—314.
- [4] Witte, D., On hamiltonian circuits in Cayley diagrams, *Discrete Math.*, 38(1982), 99—108.
- [5] Powers, D. L., Exceptional trivalent Cayley graphs for dihedral groups, *J. Graph theory*, 6(1982), 43—55.

## A DISCRIMINATE CONDITION OF H-CYCLE ON DIHEDRAL GROUPS

WANG MIN FANG XIN-GUI  
(Yantai University, Shandong 264005)

### ABSTRACT

Let  $G$  be a finite group and  $S$  a Cayley-subset of  $G$ . Denote the Cayley graph by  $X = X(G, S)$ , where  $V(X) = G, E(X) = \{(a, b) | a, b \in G, ba^{-1} \in S\}$ . Let  $D_n$  be a  $2n$ -order dihedral group,  $S = S^{-1} = \{a, b, c\}$  be a Cayley-subset of  $D_n$ ,  $H_1 = \langle a, b \rangle$ ,  $H_2 = \langle a, c \rangle$ ,  $H_3 = \langle b, c \rangle$ . It is proved that, if  $D_n = \langle S \rangle$ , then  $\text{girth}(X) = 6$ , and if some there exists  $i (1 \leq i \leq 3)$  such that  $|D_n : H_i|$  is even, then the 3-degree connected Cayley groups are H-graphs. The corollary from the above conclusion extends the result by D.L. Powers (1982).