

# Fibonacci 序列构造 $z^{-2} + c$ 广义 M-J 混沌分形 图谱及其标度不变性的研究

朱伟勇<sup>1)</sup> 宋春林<sup>1)</sup> 邓学工<sup>1)</sup> 刘向东<sup>2)</sup> 于海<sup>1)</sup> 李志勇<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(东北大学计算中心 沈阳 110004)

<sup>2)</sup>(大连民族学院计算机系 大连 116600)

**摘 要** 利用周期分类法绘制了  $z^{-2} + c$  的广义 M-J 集分形图,分析了广义 M 集周期芽苞同分岔图的对应关系,发现其广义 M 集周期芽苞的 Fibonacci 序列的拓扑不变性. 通过大量计算机数学试验,发现了主轴上倍周期芽苞在超吸引点处的符号序列的排列规律,给出了构造广义 M 集任意倍周期芽苞字提升方程的一个算法,得到主轴上各倍周期芽苞的超吸引点,通过大量计算结果猜测 M 集倍周期芽苞存在一个普适常数  $\delta$ , Julia 集存在一个标度因子  $\bar{\alpha}$ .

**关键词** M-J 集;周期分类法;Fibonacci 序列;字提升方程;普适常数;标度因子  
中图法分类号 TP391

## The M-J Chaotic Fractal Images of $z^{-2} + c$ Generated by the Fibonacci Sequence and the Scaling Invariance

ZHU Wei-Yong<sup>1)</sup> SONG Chun-Lin<sup>1)</sup> DENG Xue-Gong<sup>1)</sup>

LIU Xiang-Dong<sup>2)</sup> YU Hai<sup>1)</sup> LI Zhi-Yong<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(Computer Center, Northeastern University, Shenyang 110004)

<sup>2)</sup>(Department of Computer, Dalian Nationalities University, Dalian 116600)

**Abstract** The M-J chaotic fractal images of  $z^{-2} + c$  is protracted with periodic classification algorithm, and the corresponding relationship between Mandelbrot set's period-buds and bifurcation image is analyzed. It is found that the Fibonacci sequence of Mandelbrot set is uniform topology. The symbol sequences arrangement rule of multiplier periodic buds, which are on principal axis's super-attracted points, is proposed with lots of experiments. A novel algorithm used to construct word-lifting formula of M sets' arbitrary multiplier periodic buds is proposed. The multiplier periodic super-attracted points are obtained which are on the principal axis. Further more, it is also found that there exists a general constant  $\bar{\delta}$  of M set and a mark factor  $\bar{\alpha}$  of Julia set according to a lot of computing results.

**Keywords** Mandelbrot-Julia set; periodic classification method; Fibonacci sequence; word-lifting formula; general constant; mark factor

### 1 引 言

$z^2 + c$  在参数平面所构造的 M 集<sup>[1]</sup>,被国际学术界公认为“最复杂、最难解的科学问题之一”. 它通过一个简单的复迭代,可以产生美丽而复杂的混沌分形图案. M 集是具有无穷嵌套结构的紧集,在 M 集中

收稿日期:2003-01-04;修改稿收到日期:2003-11-04. 本课题得到国家自然科学基金(69974008)及国家教育部博士点专项科研基金(2000014512)资助. 朱伟勇,男,1938年生,教授,博士生导师,研究方向为混沌理论、分形和小波. 宋春林,男,1973年生,博士研究生,研究方向为混沌、分形和小波、计算机图形图像等. E-mail: songchunlin@yahoo.com.cn. 邓学工,男,1963年生,博士研究生,研究方向为分形与计算机图形图像. 刘向东,男,1967年生,博士,教授,研究方向为非线性信号处理、分形、计算机图形图像等. 于海,男,1972年生,博士研究生,研究方向为分形与计算机图像处理. 李志勇,男,1965年生,博士研究生,研究方向为分形与计算机图形图像等.

隐含了另一族具有无穷嵌套结构的连续 Julia 集, 简称 M-J 混沌分形图谱. 它的研究受到各国学者的高度重视, 成为目前国际学术界研究的热点之一<sup>[2]</sup>.

本文作者所进行的复映射函数族 M 集的拓扑不变性及 M-J 集周期芽苞嵌套规律的研究概括和发展了美国科学院院士 Mandelbrot、加拿大学者 Gujar 和美国学者 Shirriff 等人的工作. 本文作者通过大量计算机数学试验与图像分析, 发现了  $z^w+c$  构造的 M 集混沌分形图谱的图像特征、“芽苞序列”的排列规律以及 M-J 混沌分形图谱之间对应的“嵌套结构”的拓扑规律和计算公式, 见文献[3, 5, 6, 8, 9, 11].

M 集周期芽苞的无穷嵌套结构是复动力系统的重要研究课题, 它描述了 M-J 集产生无穷复杂规律的原因与方式. 作者在文献[11]中通过对复映射  $z^2+c$  的研究, 发现其 M 集周期芽苞存在同 Peitgen 和 Richter 在文献[10]中所提到的类似的 Fibonacci 序列, 从而猜测在广义 M 集中存在 Fibonacci 序列是一种普适的规律. 本文进一步研究了复映射  $z^{-2}+c$ , 发现其广义 M 集中同样存在 Fibonacci 序列. 同时, 本文给出了一种计算 M-J 集普通常数和标度因子的解析算法, 构造了主轴上倍周期芽苞超吸引点处的符号序列和字提升方程, 给出了计算其超吸引点的具体算法, 使超吸引点的计算可以达到任意精度, 通过大量计算结果猜测复映射  $z^{-2}+c$  广义 M-J 集存在普通常数  $\delta=7.284$  和标度因子  $\bar{\alpha}=5.7535$ .

## 2 周期芽苞的 Fibonacci 序列

### 2.1 基本概念

**定义 1.** 若  $z_0=c$ , 使复映射  $f(z, c)=z^{-2}+c$  所产生的序列  $c, c^{-2}+c, (c^{-2}+c)^{-2}+c, \dots$  保持有界的复数  $c$  的集称为  $f(z, c)=z^{-2}+c$  的广义 M 集. 即

$$M \text{ 集} = \{c \in \mathbb{C}: c, c^{-2}+c, (c^{-2}+c)^{-2}+c, \dots \text{ 有界}\} \quad (1)$$

**定义 2.**  $f^p(c)=f \circ f \circ \dots \circ f(c)$  表示函数  $f$  和自己的  $p$  重复合,  $c \in M$ , 如果  $p$  是使  $f^p(c)=c$  成立的最小正数. 则称  $c$  为 M 集的  $p$  周期点. 具有相同周期数的点的不同单连通区域称做 M 集的周期芽苞<sup>[11]</sup>.

**定义 3.** 复映射  $f(z, c)$  的 Julia 集  $J_f = \partial F_f$ , 其中  $\partial(\cdot)$  代表集合的边界, 即

$$F_f = \{z \in \mathbb{C}: \text{序列} \{|f^n(z)|\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有界}\} \quad (2)$$

**定义 4.** 设  $\omega$  是周期为  $p$  的周期点, 且微商  $(f^p)'(\omega)=0$ , 点  $\omega$  称为  $f$  的超吸引点.

### 2.2 用周期分类法绘制 M-J 集分形图

逃逸时间算法<sup>[6]</sup>是绘制 M 集的常用算法, 对于多项式族 M 集的研究非常实用, 但是逃逸时间算法无法区分 M 集中点的周期, 周期分类法可以很好地区分 M 集中的各周期芽苞, 对研究周期芽苞的标度性<sup>[7]</sup>非常方便.

利用一个判别函数  $T_p(c)$  对  $f(z, c)=z^{-2}+c$  的 M 集进行构造:

$$T_p(c) = \begin{cases} 0, & (z^{-2}+c) \text{ 没有吸引周期轨道} \\ n, & (z^{-2}+c) \text{ 有 } n \text{ 周期吸引轨道} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $n$  为灰阶, 以下为根据周期分类法绘制的  $f(z, c)=z^{-2}+c$  的 M-J 集分形图.

### 2.3 周期芽苞的 Fibonacci 序列

**定义 5.** 广义 Fibonacci 序列  $F_n$  满足下式:

$$\begin{cases} F_0 = a; F_1 = b, & a, b \text{ 为非负整数} \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

从图 1 和图 2 中可以看出各周期芽苞及倍周期芽苞的分布情况, 最外围的区域为 1 周期, 中间圆形区域为 2 周期; 以 2 周期圆心为原点, 展开 3 个相差  $\frac{2}{3}\pi$  的轴线, 在每个轴线上, 依次向前分布着 3 周期芽苞, 4 周期芽苞,  $\dots$ ,  $n$  周期芽苞. 在非轴线上与 3 个包络线相切处, 任意相邻两个面积占优周期芽苞  $F_n$  和  $F_{n+1}$  之间产生芽苞  $F_{n+2}$ , 且周期数满足  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ . 在所有第 1 层芽苞上, 又产生 3 个倍周

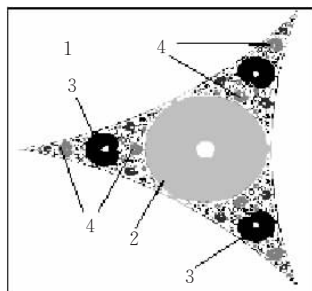


图 1  $z^{-2}+c$  的 M 集分形图

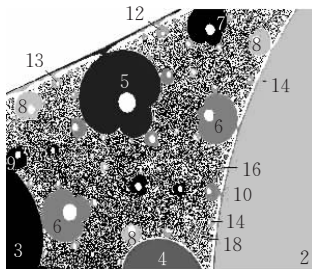
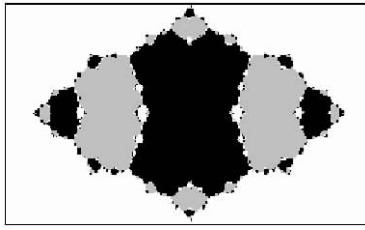


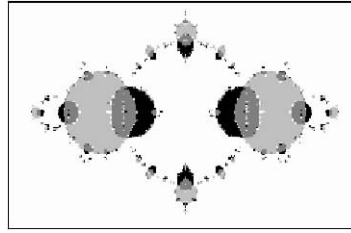
图 2 周期芽苞分布的 Fibonacci 规律

期芽苞以及依据 Fibonacci 序列分布着 {5, 10, 15, 25, 40, ...} 芽苞序列. 独立芽苞为 Fibonacci 序列  $F_n$

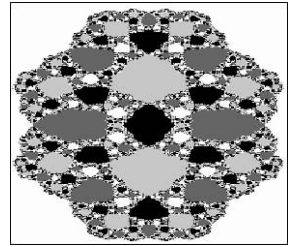
提供初值, 二者相互嵌套, 最终形成 M 集.



(a)  $c = -0.34 + 0.18i$  的分形图



(b)  $c = -1.6594$  的分形图



(c)  $c = -0.726$  的分形图

图 3  $z^{-2} + c$  的 Julia 集分形图

### 3 M 集主轴芽苞超吸引点的计算

#### 3.1 M 集主轴芽苞与分岔图

如果把  $f(z, c) = z^{-2} + c$  的广义 M 集限制在实轴上, 便得到如下线段映射

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} + \mu, \quad \mu \in [-2, 0] \quad (5)$$

用纵轴表示一维相空间, 用横轴代表参量空间, 扫过全部参量, 得到如图 4 的分岔图.

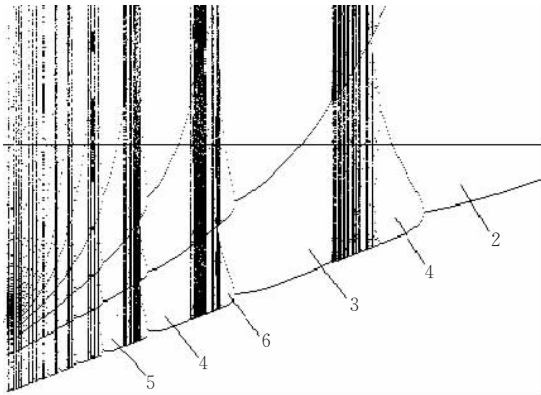


图 4 分岔图

从图 4 中发现, 从右至左呈现 2, 3, 4, ... 等周期窗口. 在每个周期窗口, 从右至左产生倍周期分岔. 在每个周期窗口及倍周期窗口, 分岔线与横轴的交点为周期窗口在主轴上的超吸引点. 对比图 1 和图 4 发现, M 集描绘的是复参数平面上的周期苞芽的分布规律, 分岔图中的周期窗口及倍周期窗口对应着 M 集中主轴上芽苞及倍周期芽苞, 分岔图中的超吸引点对应着 M 集主轴上各周期芽苞的超吸引点.

#### 3.2 “字”的规律与“字”提升方程

定义 6. 将如下轨道

$$\begin{aligned} x_0, x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f^2(x_0), \dots, \\ x_n &= f(x_{n-1}) = f^n(x_0) \end{aligned}$$

与一符号序列  $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$  对应, 其中若  $x_i > 0$ , 则  $s_i = R$ ; 若  $x_i < 0$ , 则  $s_i = L$ ; 若  $x_i = 0$ , 则  $s_i = C$ ; 若  $x_i = \infty$ , 则  $s_i = \infty$ , 我们称  $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$  为符号序列, 也称为“字”<sup>[4]</sup>.

用  $I_i$  表示倍周期芽苞序列,  $i = 2, 3, 4, \dots$ , 例如  $I_2$  表示的倍周期芽苞序列为  $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ . 用  $S_i(j)$  表示  $I_i$  中  $j$  周期芽苞超吸引点处的符号序列, 其中  $j = i, 2i, 4i, 8i, \dots$ . 借助计算机数学试验, 得到各倍周期芽苞在超吸引点处的符号序列, 如表 1 所示.

表 1 2 倍周期芽苞符号序列

$I_2$	$S_2(j)$	$I_3$	$S_3(j)$
2 周期	$C\infty$	3 周期	$C\infty L$
4 周期	$C\infty LR$	6 周期	$C\infty LLRL$
8 周期	$C\infty LRRRLR$	12 周期	$C\infty LLRLRRLRL$
16 周期	$C\infty LRRRLRLRLRRLR$	24 周期	$C\infty LLRLRRLRLRLRLRLRLRL$

寻找倍周期芽苞超吸引点处的符号序列非常困难和复杂, 是否存在某种规律来构造倍周期芽苞超吸引点处的符号序列? 通过大量计算机数学实验, 我们发现以下规律.

号序列为  $S_i(j)$ , 删除  $C\infty$  后的符号序列为  $S'_i(j)$ , 则有

$$S_i(j) = \begin{cases} S_i\left(\frac{j}{2}\right) + LR + S'_i\left(\frac{j}{2}\right), & k \text{ 为奇数} \\ S_i\left(\frac{j}{2}\right) + RR + S'_i\left(\frac{j}{2}\right), & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (6)$$

规律 1. 对于  $I_i$  中的  $j$  周期芽苞,  $\frac{j}{i} = 2^k$ , 其符

### 3.3 超吸引点的计算

构造出倍周期超吸引点处的符号序列, 依此符号序列可以构造字提升方程, 算法如下:

1. 依据规律 1 构造  $I_j$  中的  $j$  周期芽苞超吸引点处的符号序列  $S_j(j)$ .
2. 从  $S_j(j)$  中删除  $C^\infty$ , 然后进行反序操作, 得到一大小为  $j-2$  的一维字符数组  $a[j-2]$ .
3. 定义一族函数  $s_k(x), k=1, 2, \dots, j-2$ , 若  $a[j-2]$  第一个字符为  $L$ , 则  $s_1(x) = -\sqrt{-x}$ , 若为  $R$ , 则  $s_1(x) = \sqrt{-x}$ .
4. 依次遍历  $a[j-2]$  剩余所有字符, 对于第  $k$  个字符

$a(k)$ , 对应的函数  $s_k(x)$  为

$$s_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{s_{k-1}(x)} - x}, & a(k) = R \\ -\sqrt{\frac{1}{s_{k-1}(x)} - x}, & a(k) = L \end{cases}$$

设  $S_j(x)$  为  $I_j$  中的  $j$  周期芽苞超吸引点处的字提升方程, 则有

$$S_j(x) = \prod_{k=1}^{j-2} s_k(x) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{j-2}(x) \quad (7)$$

利用二分法解方程 (7), 得到各倍周期芽苞的超吸引点, 如表 2 所示.

表 2 主轴上倍周期超吸引点

$I_2$	超吸引点	$I_3$	超吸引点	$I_4$	超吸引点	$I_5$	超吸引点
2	0	3	-1	4	-1.378240772489	5	-1.559385009233
4	-0.72556263024	6	-1.235909457206	8	-1.482906775364	10	-1.614553865268
8	-0.77086566179	12	-1.247723847495	16	-1.487815632421	20	-1.617080938879
16	-0.77587773636	24	-1.249035333112	32	-1.488360773632	40	-1.617361682381
32	-0.77653610988	48	-1.249207997878	64	-1.488432550808	80	-1.617398647265
64	-0.77662523004	96	-1.249231359496	128	-1.488442259941	160	-1.617403646862
128	-0.77663741747	192	-1.249234554033	256	-1.488443587528	320	-1.617404330470
256	-0.77663908856	384	-1.249234992035	512	-1.488443769549	640	-1.617404424196
512	-0.77663931789	768	-1.249235052141	1024	-1.488443794528	1280	-1.617404437058
1024	-0.77663934936	1536	-1.249235060392	2048	-1.488443797956	2560	-1.617404438823
2048	-0.77663935369	3072	-1.249235061524	4096	-1.488443798427	5120	-1.617404439065
4096	-0.77663935428	6144	-1.249235061524	8192	-1.488443798491	10240	-1.617404439099
8192	-0.77663935436	12288	-1.249235061701	16384	-1.488443798500	20480	-1.617404439103
16384	-0.77663935437	24576	-1.249235061704	32768	-1.488443798501	40960	-1.617404439104

## 4 M 集的标度性

讨论每个倍周期芽苞序列, 先求出两个相邻倍周期芽苞超吸引点之间的距离, 用  $d_i$  表示, 然后计算如下比值

$$\tilde{\delta}_{i+1} = \frac{d_i - d_{i+1}}{d_{i+1} - d_{i+2}} \quad (8)$$

计算结果如表 3 所示.

表 3 主轴上倍周期芽苞的标度

$I_2$	$\tilde{\delta}_i$	$I_3$	$\tilde{\delta}_i$	$I_4$	$\tilde{\delta}_i$	$I_5$	$\tilde{\delta}_i$
2		3		4		5	
4	16.0157	6	20.1136	8	21.3218	10	21.8311
8	9.0387	12	8.9463	16	9.0047	20	9.0014
16	7.6128	24	7.5956	32	7.5949	40	7.5949
32	7.3874	48	7.3910	64	7.3927	80	7.3936
64	7.3124	96	7.3130	128	7.3134	160	7.3135
128	7.2930	192	7.2934	256	7.2936	320	7.2936
256	7.2871	384	7.2871	512	7.2871	640	7.2872
512	7.2854	768	7.2854	1024	7.2854	1280	7.2854
1024	7.2842	1536	7.2840	2048	7.2850	2560	7.2851
2048	7.2841	3072	7.2840	4096	7.2841	5120	7.2840
4096	7.2841	6144	7.2840	8192	7.2841	10240	7.2840

从表 3 看出, 对于各倍周期芽苞,  $\tilde{\delta}_i$  按同一规律变化, 随着周期的不断增加,  $\tilde{\delta}_i$  收敛速率加快, 逐步趋于常数. 因此, 我们猜想各倍周期芽苞存在同一个普适常数<sup>[7]</sup>, 设此普适常数为  $\tilde{\delta}$ , 则

$$\tilde{\delta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i \approx 7.284.$$

## 5 Julia 集的标度性

对于主轴上  $I_j$  中的  $j$  周期芽苞, 取参量和迭代初值均为表 2 中的超吸引点, 迭代  $j$  次得到  $j$  个不动点<sup>[4]</sup>. 例如  $I_2$  中的 4 周期芽苞, 取  $z$  和  $c$  的初值均为超吸引点  $-0.72556263024$ , 迭代 4 次, 可得 4 个不动点:  $-2.77556 \times 10^{-15}$ ,  $1.29807 \times 10^{29}$ ,  $-0.725563$ ,  $1.17398$ . 依照上述方法计算  $I_i$  序列, 并对其不动点进行从小到大排序.

对于非独立芽苞, 4 周期由 2 周期倍分岔而来, 8 周期由 4 周期倍分岔而来. 4 周期 Julia 集 4 个不动点形成 2 个距离  $I_{4-1}$  和  $I_{4-2}$ , 8 周期 Julia 集形成 4 个距离  $I_{8-1}, I_{8-2}, I_{8-3}$  和  $I_{8-4}$ . 如图 5 所示.

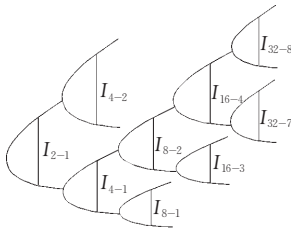


图 5 分岔图中不动点距离示意图

对于各倍周期超吸引点处 Julia 集的不动点,按照从小到大的顺序依次求出两点之间的距离,如  $I_{8-1}$  表示 8 倍周期内第 2 个不动点和第 1 个不动点之间的距离,  $I_{8-2}$  表示 8 倍周期内第 4 个不动点和第 3 个不动点之间的距离. 任选一个分岔方向, 求出周期内各个距离比值如表 4 所示.

表 4 Julia 集倍周期内标度因子

$I_2$	比值	$I_3$	比值	$I_5$	比值
$I_{16-3}/I_{16-4}$	4.3714	$I_{24-3}/I_{24-4}$	4.84118	$I_{40-3}/I_{40-4}$	8.0650
$I_{32-7}/I_{32-8}$	5.7252	$I_{48-7}/I_{48-8}$	5.1253	$I_{80-7}/I_{80-8}$	5.8936
$I_{64-15}/I_{64-16}$	5.8744	$I_{96-15}/I_{96-16}$	5.2614	$I_{160-15}/I_{160-16}$	5.9619
$I_{128-31}/I_{128-32}$	5.7860	$I_{192-31}/I_{192-32}$	5.7006	$I_{320-31}/I_{320-32}$	5.7837
$I_{256-63}/I_{256-64}$	5.7663	$I_{384-63}/I_{384-64}$	5.7585	$I_{640-63}/I_{640-64}$	5.7701
$I_{512-127}/I_{512-128}$	5.7568	$I_{768-127}/I_{768-128}$	5.7553	$I_{1280-127}/I_{1280-128}$	5.7562
$I_{1024-255}/I_{1024-256}$	5.7546	$I_{1536-255}/I_{1536-256}$	5.7546	$I_{2560-255}/I_{2560-256}$	5.7548
$I_{2048-511}/I_{2048-512}$	5.7537	$I_{3072-511}/I_{3072-512}$	5.7537	$I_{5120-511}/I_{5120-512}$	5.7537
$I_{4096-1023}/I_{4096-1024}$	5.7535	$I_{6144-1023}/I_{6144-1024}$	5.7536	$I_{10240-1023}/I_{10240-1024}$	5.7536
$I_{8192-2047}/I_{8192-2048}$	5.7535	$I_{12288-2047}/I_{12288-2048}$	5.7535	$I_{20480-2047}/I_{20480-2048}$	5.7535

从表 4 看出, 倍周期分岔后周期内不动点距离之比趋于一个常数 5.7535, 而且各倍周期趋于该常数的规律相近; 同理选择另一分岔方向, 经过计算得到同表 3 类似的结果, 因此猜想倍周期芽苞的 Julia 集存在一个标度因子<sup>[7]</sup>  $\tilde{\alpha}$ , 即

$$\tilde{\alpha} \approx 5.7535.$$

以上为主轴上 M-J 集标度因子的精确计算, 对于非主轴上的倍周期芽苞, 由于芽苞数量太多, 我们仅能验证有限次. 通过验证, 非主轴上标度因子在统计上接近这两个标度因子, 由此猜想 M-J 集倍周期芽苞存在一个普适常数  $\tilde{\delta} \approx 7.284$  和标度因子  $\tilde{\alpha} \approx 5.7535$ .

## 6 结 论

(1) 利用周期分类法绘制  $f(z, c) = z^{-2} + c$  广义 M-J 集混沌分形图, 分析了各周期芽苞的分布规律. 进一步验证了其广义 M 集周期芽苞的排列符合 Fibonacci 序列的猜想, 指出分岔图与 M 集主轴芽苞的对应关系.

(2) 通过大量计算机数学实验, 找到了构造倍周期芽苞超吸引点处符号序列的一个规律, 并利用该规律构造了超吸引点处的字提升方程.

(3) 利用字提升方程计算出主轴上倍周期芽苞的超吸引点, 发现 M 集在主轴上存在一个普适常数, J 集也存在一个标度因子, 猜想在混沌运动中广泛存在类似的普适常数和标度因子.

## 参 考 文 献

- Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman W. H., 1982, 1~10
- Rojas Raul. A tutorial on efficient computer graphic representation of the Mandelbrot set. Computer & Graphics, 1991, 15 (1): 91~100
- Chen N., Zhu W. Y.. Bud-sequence conjecture on M fractal image and M-J conjecture between  $c$  and  $z$  planes from  $z \leftarrow z^w + c$  ( $w = \alpha + i\beta$ ). Computers & Graphics, 1998, 22(4): 537~546
- Hao B. L.. Starting with Parabolas—An Introduction to Chaotic Dynamics. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1993(in Chinese) (郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993)
- Yan D. J., Liu X. D., Zhu W. Y.. An investigation of Mandelbrot set and julia sets generated from a general complex cubic iteration. Fractal, 1999, 7(4): 433~437
- Liu X. D., He X. Q., Zhu W. Y.. The bounds and the dimensions of the general M and J sets. Fractals, 2000, 8(2): 215~218
- Feigenbaum M. J.. Quantitative universality for a class of non-linear transformations. Journal of Statistic Physics, 1978, 19 (6): 25~52
- Yan De-Ju, Liu Xiang-Dong, Zhu Wei-Yong. The Study of general Mandelbrot set generated by the non-analysis complex iteration. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001, 24(4): 527~532(in Chinese) (焉德军, 刘向东, 朱伟勇. 非解析复迭代映射的广义 Mandelbrot 集研究. 应用数学学报, 2001, 24(4): 527~532)
- Chen Ning, Zhu Wei-Yong. M fractal images from complex mapping  $z \leftarrow e^{i\frac{\pi}{2}} z^w + c$  ( $w = a + i\beta$ ) in the complex  $c$ -plane.

Computer Research & Development, 1997, 34(12): 899~907  
(in Chinese)

(陈 宁, 朱伟勇. 复映射  $z \leftarrow e^{i\frac{\pi}{2}} z^w + c (w = a + i\beta)$  构造 M 集. 计算机研究和发展, 1997, 34(12): 899~907)

- 10 Peitgen H. O., Richter P. H.. The Beauty of Fractals-Images of Complex Dynamical System. Berlin: Springer-Verlag, 1988

- 11 Zhu Wei-Yong, Zhu Zhi-Liang. A Series conjectures of M-J chaos-fractal image construction by the periodic buds Fibonacci sequence. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(2): 221~226(in Chinese)

(朱伟勇, 朱志良. 周期芽苞 Fibonacci 序列构造 M-J 混沌分形图谱的一族猜想. 计算机学报, 2003, 26(2): 221~226)



**ZHU Wei-Yong**, born in 1938, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include theory and application of chaos, Fractal and wavelet.

**SONG Chun-Lin**, born in 1973, Ph. D. candidate. His research interests include chaos, fractal, wavelet, computer graphics and images.

## Background

This project mainly studies the similar nesting rules of the M-J chaotic fractal image spectrum of nonlinear complex systems and searches the scale invariant property of them by means of computer mathematical experiments.

Up to now, the research group have already achieved a lot progress in the studies on the topological invariant property of the M sets of rational function family with parameters, the estimations of the bound and the dimension of generalized M-J sets, and the nested structure and distribution laws of the M-J periodic bud, etc.. About thirty papers have been published on *Chinese Journal of computers*, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *Fractals and Computers* &

**DENG Xue-Gong**, born in 1963, Ph. D. candidate. His research interests include fractal, computer graphics and images.

**LIU Xiang-Dong**, born in 1967, Ph. D., professor. His research interests include fractal, computer graphics and images.

**YU Hai**, born in 1972, Ph. D. candidate. His research interests include fractal theory, computer graphics.

**LI Zhi-Yong**, born in 1965, Ph. D. candidate. His research interests include fractal, computer graphics and images.

*Graphics etc..*

By mathematical experiments and the symbol dynamics theory, this paper studies the M-J chaotic fractal image spectrum constructed by complex mapping, discovers that its periodic buds obey Fibonacci sequence, found out the symbol sequences arrangement rule of its super-attract points, constructs the generalized word-lifting equations, obtains the accurate analytic solution of the super attract points, and finally, finds out that there exist a general constant of its M-set and a scale factor of its J-set. The scale invariant property of the M-set of this one parameter rational functions family is validated by computation.