第29卷 第4期
2006年4月
计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS
Vol. 29 No. 4
Apr. 2006

基于平滑技术和一维搜索的全局优化进化算法及其收敛性

王宇平[1)] 刘大莲[2)]

[1)](西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)

[2)](北京联合大学基础部 北京 100092)

摘 要 为了解决全局优化算法中的一个难点——算法易于陷入局部极小点,设计了一个平滑函数,该函数可以消除一些局部极小点,而在包含最优点的部分,函数保持不变.这样,通过对此平滑函数的优化,局部极小点的数目就会在迭代过程中大量地减少,使算法更易找出全局极小点;根据平滑函数的性质,设计了一个新的杂交算子,此算子能自适应地产生优质的后代;利用平滑函数的性质,巧妙地将一维搜索技术用于算法的设计之中,从而使算法的速度大大提高;在此基础上,设计了一个解全局优化问题的新的高效进化算法,并且证明了其全局收敛性.最后的数值实验也表明新算法十分有效.

关键词 全局优化;进化算法;全局收敛性

中图法分类号 TP18

A Global Optimization Evolutionary Algorithm and Its Convergence Based on a Smooth Scheme and Line Search

WANG Yu-Ping[1)] LIU Da-Lian[2)]

[1)](*School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an* 710071)

[2)](*Department of Basic Course Teaching, Beijing Union University, Beijing* 100092)

Abstract A common difficulty for the existing global optimization methods is that they are not easy to escape from the local optimal solutions and therefore often not find the global optimal solution. In order to make it escapes from the local optimal solutions and find the global optimal solution easier, first, the authors construct a smoothing function. It can eliminate all such local optimal solutions worse than the best solution found so far. Moreover, it can keep the original function unchanged in the region in which the values of the original function are not worse than its value at the best solution found so far. Thus, if optimizing this smoothing function instead of the original objective function, the number of the local optimal solutions will be largely decreased with progress of the iterations. As a result, it becomes much easier for an algorithm to find a global optimal solution. Second, a new crossover operator is designed based on the properties of the smoothing function. It can adaptively generate high quality offspring for any situation. Third, by making use of the properties of the smoothing function, the line search technique is properly combined into the algorithm design, which will make the proposed algorithm converge much faster. Based on all these, a novel effective evolutionary algorithm for global optimization is proposed and its

收稿日期:2003-06-17;修改稿收到日期:2005-12-27.本课题得到国家自然科学基金(60374063)和教育部留学回国人员科研启动基金资助.王宇平,男,1961年生,博士,教授,博士生导师,研究领域为进化计算、最优化理论.E-mail:ywang@xidian.edu.cn.刘大莲,女,1981年生,硕士,研究方向为进化计算、最优化理论.

global convergence is proved. At last, the numerical simulations for several standard benchmark problems are made and the simulation results show that the proposed algorithm is very effective.

Keywords　global optimization; evolutionary algorithm; global convergence

1 引　言

全局最优化问题就是寻找一个实值函数的全局极小值问题,这类问题可以表示如下

$$\min_{x \in D} f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中 $D \subset R^n$ 是一个紧集. 目前已有很多求解全局优化问题的方法. 这些方法可归为两类:确定性全局优化方法和随机全局优化方法. 确定性全局优化方法往往需要利用函数的导数等信息,如填充函数法[1~5]、隧道法[6,7]等,其特点是计算速度快,但由于其对函数要求较强,因而,只可用于性质较好的函数,很难用于一些复杂的工程优化问题;随机全局优化方法对函数的要求较低,往往只需利用函数值,如进化算法[8~10]等,其特点是可用于几乎所有问题,尤其是可用于一般的复杂工程优化问题,但是,其计算速度相对较慢. 另外,当问题有大量局部最优解时,这两类全局优化方法均易于陷入局部最优解,即使某个方法没有陷入局部最优解,其求出全局最优解的速度通常也是很慢的. 造成这种现象的主要原因是,目前的全局优化方法寻找全局最优解的基本原理是设法从一个局部最优解跳到另一个局部最优解,如填充函数法是将当前的局部最优解所在的深谷填平,而后移动到另外一个深谷中找其中的最小值点;隧道法是通过从当前的局部最优解处打一个隧道而移动到另外一个深谷中找其中的最小值点;而进化算法是用随机的方法,以一定的概率在当前局部最优解所处的深谷之外保留一定数量的点,以期这些点在进化过程中移动到另一个局部最优解. 然而从一个局部最优解移动到另一个局部最优解有一定的难度并且需要一定的时间,因此,当局部最优解的数目很大时,有些方法不能找到全局最优解,有些方法需要很长的时间才能找出全局最优解. 我们利用平滑技术和一维搜索,设计了一个新的进化算法. 此算法在迭代过程中,可不断消除那些比目前已找到的最好点差的局部最优解,从而使局部最优解的数目大量地减少,使算法更易、更快找出全局最优解. 另外,将一维搜索巧妙地用于算法之中,加快了收敛速度. 我们还证明了算法的全局收敛性,并且利用数值实验来表明新算法的有效性.

2 平滑函数

在目前的全局优化算法中,有很多方法常常陷入局部极小点,为了使算法更易摆脱局部极小点,我们设计了一个平滑函数,该函数可以消除那些比目前已找到的最好点差的局部极小点,而在比目前找到的最好点好的部分,函数保持不变. 这样,若用此平滑函数作为适应度函数,则局部极小点的数目就会在迭代过程中大量地减少,使算法更易找出全局极小点. 此平滑函数可构造如下:

$$F(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=f(\tilde{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}\{1-\operatorname{sign}[f(\boldsymbol{x})-f(\tilde{\boldsymbol{x}})]\}\cdot[f(\boldsymbol{x})-f(\tilde{\boldsymbol{x}})] \tag{2}$$

其中 $f(x)$是原问题的目标函数. $\tilde{x}$ 是目前找到的最好点. 此平滑函数具有如下性质.

性质 1.　若算法一旦找到一个新的点 $\bar{x}$,使 $f(\bar{\boldsymbol{x}})<f(\tilde{\boldsymbol{x}})$,则函数

$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}\{1-\operatorname{sign}[f(\boldsymbol{x})-f(\bar{\boldsymbol{x}})]\}\cdot[f(\boldsymbol{x})-f(\bar{\boldsymbol{x}})].$$

将平滑掉所有不比 $\bar{x}$ 好的点(包括不比 $\bar{x}$ 好的局部最优点),即对 $\forall x\in D$,若 $f(\boldsymbol{x})\geq f(\bar{\boldsymbol{x}})$,则

$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

性质 2.　$F(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})$将保持 $f(\boldsymbol{x})$比 $f(\tilde{\boldsymbol{x}})$好的部分不变,即对 $\forall \boldsymbol{x}\in D$,若 $f(\boldsymbol{x})<f(\tilde{\boldsymbol{x}})$,则

$$F(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=f(\boldsymbol{x}).$$

由上面的两个性质我们可以清楚地看到,若利用函数 $F(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})$作为适应度函数,可引导算法更易、更快找到全局最优解.

3 新的进化算子的设计

3.1 基于一维搜索的杂交算子

设 x 是被选出参与进化的任一个父辈点,计算 $F(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})$在 x 处梯度的近似值 Δy 如下:

$$\Delta\boldsymbol{y}=(\Delta F_1,\Delta F_2,\cdots,\Delta F_n)^{\mathrm{T}},$$

其中,$\Delta F_i=\dfrac{f(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{\delta}$,$\boldsymbol{e}_i$为第 i 个分量为 1,

其余为 0 的 n 维单位向量，且 $\delta>0$ 充分小，$i=1\sim n$.

引理 1. 若 $f(x)$ 在 x 处可微，$\nabla f(x)\neq 0$，则当 $\delta>0$ 充分小时，$-\Delta y\neq \mathbf{0}$，且 $-\Delta y$ 为 $f(x)$ 在 x 处的一个下降方向，其中，$\nabla f(x)$ 为 $f(x)$ 在 x 处的梯度.

证明. 由数学分析知此结论是显然的.

引理 2. 若 $f(x)$ 在 x 处可微，$\nabla f(x)\neq 0$，$f(x)<f(\tilde{x})$，则当 $\delta>0$ 充分小时，$-\Delta y$ 为 $F(x,\tilde{x})$ 在 x 处的一个下降方向.

证明. 由数学分析知此结论是显然的.

引理 3. 设 $f(x)$ 在 x 处可微，$\nabla f(x)=0$，x 为 $f(x)$ 的一个严格极值点，若 $f(x)\geq f(\tilde{x})$，且对某个 $\Delta x\in R^n$，$\exists\lambda>0$，当 $\forall\delta\in(0,\lambda)$，

(1) 若 $f(x+\delta\Delta x)\geq f(x)$，则在 x 附近，$F(x,\tilde{x})$ 恒为常数 $f(\tilde{x})$；

(2) 若 $f(x+\delta\Delta x)<f(x)$，则 x 为 $F(x,\tilde{x})$ 的一个局部极大点.

证明. 由 $F(x,\tilde{x})$ 的定义易知结论成立.

引理 4. 若 $f(x)$ 在 x 处可微，$\nabla f(x)\neq 0$，则

(1) 当 $f(x)>f(\tilde{x})$ 时，在 x 附近，$F(x,\tilde{x})$ 为常数；

(2) 当 $f(x)=f(\tilde{x})$ 时，$-\Delta y$ 是 $F(x,\tilde{x})$ 在 x 处的一个下降方向.

证明. 由 $F(x,\tilde{x})$ 定义易知.

一维搜索是从某个点出发、沿某个方向寻找函数最优点的方法，它是加快最优化方法收敛的一种基本和有效的技术. 由以上几个引理可看出，在引理 2，3(2) 及引理 4 的情形下，若在 x 处沿适当方向进行一维搜索，可得出比 x 更好的点. 据此，可设计如下基于一维搜索的杂交算子.

基于一维搜索的杂交算子. 设搜索空间为 $[L,U]\supset D$，设 x 为一个被选择的杂交点，可按如下 4 种情形定义其杂交后代 $\bar{z}$.

情形 1. 若 $\|\Delta y\|\geq\varepsilon$($\varepsilon$ 为一小正数)且 $F(x,\tilde{x})<f(\tilde{x})$ 或 $f(x)=f(\tilde{x})$，则在 x 处，$d=-\Delta y$ 为 $F(x,\tilde{x})$ 在 x 处的一个下降方向，在 $[L,U]$ 上对 x 沿 d 做一维搜索，即确定 α^* 使

$$\min_{\alpha\in R}F(x+\alpha d,\tilde{x})=F(x+\alpha^* d,\tilde{x}),\ x+\alpha^* d\in[L,U],$$

令 $\bar{z}=x+\alpha^* d$ 为 x 的杂交后代，根据引理 1，2，4(2) 知，后代 $\bar{z}$ 优于 x.

情形 2. 若 $\|\Delta y\|\geq\varepsilon$，且 $F(x,\tilde{x})\geq f(\tilde{x})$，而 $f(x)>f(\tilde{x})$，则在 x 处，$d=-\Delta y$ 为 $F(x,\tilde{x})$ 在 x 处的一个下降方向，在 $[L,U]$ 上对 x 沿 d 做一维搜索，即确定 α^* 使

$$\min_{\alpha\in R}F(x+\alpha d,\tilde{x})=F(x+\alpha^* d,\tilde{x}),\ x+\alpha^* d\in[L,U],$$

令 $\bar{z}=x+\alpha^* d$ 为 x 的杂交后代. 对这种情况，根据引理 4(1)，一维搜索的步长在开始时可取得较大，这样可加快一维搜索的速度，且产生的后代 $\bar{z}$ 优于 x.

情形 3. 若 $\|\Delta y\|<\varepsilon$ 且 $F(x,\tilde{x})\geq f(\tilde{x})$，随机产生若干搜索方向 $d_1,d_2,\cdots,d_t$ 及若干随机数 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r\in(0,1)$，若对某个 d_j 和某个 δ_i，有 $F(x+\delta_i d_j,\tilde{x})<F(x,\tilde{x})$，则在 $[L,U]$ 上对 x 沿 d_j 做一维搜索，即确定 α^* 使

$$\min_{\alpha\in R}F(x+\alpha d_j,\tilde{x})=F(x+\alpha^* d_j,\tilde{x}),\ x+\alpha^* d_j\in[L,U],$$

令 $\bar{z}=x+\alpha^* d$ 为 x 的杂交后代，根据引理 3(2)，后代 $\bar{z}$ 优于 x；否则，根据引理 3(1)，可能在 x 附近很难进一步减小函数值，则令后代 $\bar{z}=x$.

情形 4. 若 $\|\Delta y\|<\varepsilon$，且 $F(x,\tilde{x})<f(\tilde{x})$，令后代 $\bar{z}=x$(此时 x 是局部极小点，且 $f(x)<f(\tilde{x})$).

3.2 变异算子

对杂交得到的每一个点 $\bar{z}$，不妨设 $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\cdots,\bar{z}_n)$，其变异后代记为 $o=\bar{z}+\Delta z$，其中 $\Delta z\sim N(0,\boldsymbol{\sigma}^2)=(N(0,\sigma_1^2),\cdots,N(0,\sigma_n^2))$，即 Δz 是服从均值为 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$、方差为 $\boldsymbol{\sigma}^2=(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)^{\mathrm{T}}$ 的 n 维正态分布，$\sigma_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$.

4 新的进化算法

算法如下：

1. 随机在可行域里产生初始种群 $P(0)$，令 $k=0$，种群规模设为 M，杂交概率为 p_c；

2. 求 $P(k)$ 中最好的点 $\tilde{x}$，定义适应度函数 $F(x,\tilde{x})$；

3. (杂交)以概率 p_c 选取参加杂交的点，将 3.1 节中所述的杂交算子应用于每一个选出的点，产生中间后代，设为 $\bar{z}^1,\bar{z}^2,\cdots,\bar{z}^t$；

4. (变异)对每一个中间后代 $\bar{z}^i$，使用 3.2 节中变异算子产生后代 o^i，$i=1\sim t$；

5. (选择)在 $P(k)$、杂交产生的后代和变异产生的后代中，选择使 $F(x,\tilde{x})$ 最小的 $(M-1)$ 个点与使 $f(x)$ 最小的点(仍记为 $\tilde{x}$)构成下一代种群 $P(k+1)$，令 $k=k+1$，转步 2.

5 全局收敛性

定义 1. 设 $\{\xi_m\}$ 是概率空间的一个随机向量序列，若存在一个随机向量 ξ 使得 $p(\lim_{m\to\infty}\xi_m=\xi)=1$

或 $\forall\varepsilon>0$，有 $p(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq m}\{\|\{\xi_k\}-\xi\|\geq\varepsilon\})=0$，则称 $\{\xi_m\}$ 以概率 1 收敛于 ξ 或 $\{\xi_m\}$ 几乎处处收敛于 ξ.

引理 5(Borel-Cantelli). 设 $A_1\cdots A_m\cdots$ 为概率空间的一个随机事件序列，记 $p_k=p\{A_k\}$，若 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k<\infty$，则 $p\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq m}A_k\}=0$；若 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\infty$，且 $A_1\cdots A_m\cdots$ 互相独立，则 $p\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq m}A_k\}=1$.

假设(A)：

① 式(1)的可行域 D 是 R^n 中一个有界闭集；

② $f(\boldsymbol{x})$ 在 $[L,U]\supset D$ 上连续；

③ 至少存在一个全局极小点 x^* 使对 $\forall\delta>0$，集合 $D\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\delta\}$ 的 Lebesgue 测度大于 0.

由假设(A)中①和②知，$S=\{\boldsymbol{x}\,|\,\underset{x\in D}{\operatorname{argmin}}f(\boldsymbol{x})\}\neq 0$. 对 $\forall\varepsilon>0$，

$Q_1=\{\boldsymbol{x}\in D\,|\,\|f(\boldsymbol{x})-f^*\|<\varepsilon\}$，　$Q_2=D\backslash Q_1$，

其中，$f^*=\min\{f(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in D\}=\{f(\boldsymbol{x}^*):\boldsymbol{x}^*\in S\}$，于是，种群 $P(k)$ 可分为两种状态：

S_1：若 $P(k)$ 中至少有一点属于 Q_1，则称 $P(k)$ 处于状态 S_1；

S_2：若 $P(k)$ 中所有点都不属于 Q_1，则称 $P(k)$ 处于状态 S_2.

定理 1. 设 $p_{ij}(i,j=1,2)$ 表示 $P(k)$ 处于状态 S_i，而 $P(k+1)$ 处于状态 S_j 的概率，则在假设(A)下有：

(a)对任一个处于状态 S_1 的 $P(k)$，必有 $p_{11}=1$；

(b)对任一个处于状态 S_2 的 $P(k)$，存在一个常数 $c\in(0,1)$，使 $p_{22}<c$.

证明. 从算法选择方法知，若 $P(K)\in S_1$，则 $P(K+1)\in S_1$，所以(a)成立；因为 $S\neq\varnothing$，对满足假设(A)③中的 $\forall\boldsymbol{x}^*\in S$，又 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上连续，因此 $\exists\gamma>0$，使得，当 $\boldsymbol{x}\in D\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|\leq\gamma\}$ 时，有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^*)|<\frac{\varepsilon}{2}$，记

$$N_\gamma(\boldsymbol{x}^*)=\{\boldsymbol{x}\in R^n\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|\leq\gamma\},$$

则

$$N_\gamma(\boldsymbol{x}^*)\cap D\subset Q_1 \tag{3}$$

当 $P(k)$ 处于状态 S_2 时，对参加杂交的任一个 $x\in P(K)$，假设 x 经过算法步 3 后，产生的后代记为 $\bar{z}$，而 $\bar{z}$ 经过 4 步(变异)后产生的后代记为 $\boldsymbol{O}$，则

$$\boldsymbol{O}=\bar{z}+\Delta z,$$

其中，$\Delta z=(\Delta z_1,\Delta z_2,\cdots,\Delta z_n)^{\mathrm{T}}\sim N(0,\boldsymbol{\sigma}^2)=(N(0,\sigma_1^2),\cdots,N(0,\sigma_n^2))^{\mathrm{T}}$ 表示 Δz 服从均值向量为 **0**、方差向量为 $(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$ 的 n 维标准正态分布，而 Δz 的 n 个分量 $\Delta z_1\Delta z_2\cdots\Delta z_n$ 互相独立. 于是 $\boldsymbol{O}\in N_\gamma(\boldsymbol{x}^*)\cap D$ 的概率为

$$\begin{aligned}P\{\boldsymbol{O}\in N_\gamma(\boldsymbol{x}^*)\cap D\}&=P\{(\bar{z}+\Delta\boldsymbol{z})\in N_\gamma(\boldsymbol{x}^*)\cap D\}\\&=\iint\cdots\int_{N_\gamma(x^*)\cap D}(2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}-\bar{z})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{U}-\bar{z})\right)\\&\quad\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}=\bar{z}+\Delta z$ 为服从均值向量为 $\bar{z}$、方差向量为 $(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$ 的 n 维正态分布，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$ 为对角阵. 若记

$$P_1(\bar{z})=P\{(\bar{z}+\Delta\boldsymbol{z})\in N_\gamma(x^*)\cap D\},\ \bar{z}\in[L,U] \tag{5}$$

因为 $N_\gamma(x^*)\cap D$ 是有界闭集，且其 Lebesgue 测度大于 0，由式(4)，(5)知，$0<P_1(\bar{z})<1$，$\forall\bar{\boldsymbol{z}}\in[L,U]$，从式(4)可知，$P_1(\bar{z})$ 在 $[L,U]$ 上连续，且 $[L,U]$ 为有界闭集，故 $\exists\,\bar{\boldsymbol{x}}\in[L,U]$，使得

$$P_1(\bar{\boldsymbol{x}})=\min\{P_1(\bar{z})\,|\,\bar{\boldsymbol{z}}\in[L,U]\}，且\ 0<P_1(\bar{\boldsymbol{x}})<1 \tag{6}$$

注意到 p_{21} 表示 $P(k)$ 处于状态 S_2 而 $P(k+1)$ 处于状态 S_1 的概率，由式(3)及式(5)知，

$$p_{21}\geq P_1(\bar{z})\geq P_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{7}$$

记 $c=1-P_1(\bar{\boldsymbol{x}})$，于是，由式(6)知，$0<c<1$，由 $p_{21}+p_{22}=1$ 及式(7)、c 的定义知，$p_{22}=1-p_{21}\leq 1-P_1(\bar{\boldsymbol{x}})=c$. 于是，结论(b)成立. 证毕.

定理 2. 设 $\{P(k)\}$ 是由算法产生的种群序列，且 $P(0)$ 中至少有一点属于 D，用 $\boldsymbol{x}^*(k)$ 记 $P(k)$ 中最好的点，即 $\boldsymbol{x}^*(k)=\operatorname{argmin}\{f(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in P(k)\cap D\}$，则在假设(A)下，

$$P\{\lim_{K\to\infty}f(\boldsymbol{x}^*(k))=f(\boldsymbol{x}^*)\}=1.$$

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$，记 $p_k=p\{|f(\boldsymbol{x}^*(k))-f(\boldsymbol{x}^*)|\geq\varepsilon\}$，则

$$p_k=\begin{cases}0, & \exists m\in\{1,2,\cdots,k\},\ \boldsymbol{x}^*(m)\in Q_1\\ \bar{p}_k, & \boldsymbol{x}^*(t)\notin Q_1,\ t=1\sim k\end{cases},$$

由定理 1 知，

$$\bar{p}_k=P\{\boldsymbol{x}^*(t)\notin Q_1,\ t=1\sim k\}=p_{22}\leq c^k,$$

于是 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k\leq\sum_{k=1}^{\infty}c^k=\frac{c}{1-c}<\infty$，由 Borel-Canteli 引理知，$P\{\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq i}\{|f(\boldsymbol{x}^*(k))-f(\boldsymbol{x}^*)|\geq\varepsilon\}\}=0$，由定义知，定理成立. 证毕.

6 数值模拟

6.1 函数测试

本文对 5 个标准函数进行了测试,并和两种已有算法的数值结果进行了比较,关于测试函数的解析性质及所比较的算法见参考文献[9],所用的测试函数如下,其中 n 为问题的维数.

$$f_1(\boldsymbol{x})=\left[\frac{1}{500}+\sum_{j=1}^{25}\frac{1}{j+\sum_{i=1}^{2}(x_i-a_{ij})^6}\right]^{-1},$$

其中,$-65.536\le x_i\le 65.536$,$i=1,2$,$n=2$,最优值为 $f_1^*\approx 1$,

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}-32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & \cdots & 0 & 16 & 32\\ -32 & -32 & -32 & -32 & -32 & -16 & \cdots & 32 & 32 & 32\end{pmatrix}.$$

$$f_2(\boldsymbol{x})=-\sum_{i=1}^{10}\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_i)^{\mathrm{T}}+c_i\right]^{-1},$$

其中,$0\le x_j\le 10$,$j=1,2,3,4$,$n=4$,最优值为 $f_2^*\approx -10$,局部最优值为$f_2^{\text{local}}\approx 1/c_i$,$i=1\sim 10$,$\boldsymbol{I}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_1=4\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{a}_3=8\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{a}_4=6\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{a}_5=(3,7,3,7)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_6=(2,9,2,9)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_7=(5,5,3,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_8=(8,1,8,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_9=(6,2,6,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_{10}=(7,3.6,7,3.6)^{\mathrm{T}}$,$(c_1,\cdots,c_{10})=(0.1,0.2,0.2,0.4,0.4,0.6,0.3,0.7,0.5,0.5)$.

$$f_3(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{5}\left[x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10\right],$$

其中,$-5.12\le x_i\le 5.12$,$i=1\sim 5$,$n=5$,最优值为 $f_3^*=0$.

$$f_4(\boldsymbol{x})=-20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}x_i^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\cos 2\pi x_i\right)+20+e,$$

其中,$-32\le x_i\le 32$,$i=1\sim 30$,最优值为 $f_4^*=0$.

$$f_5(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{30}x_i^2-\prod_{i=1}^{30}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)+1,$$

其中,$-600\le x_i\le 600$,$i=1\sim 30$,最优值为 $f_5^*=0$.

6.2 模拟结果

本文算法记为 NEP,在计算中,取种群规模为 100,交叉概率 $p_c=0.8$,变异概率 $p_m=0.3$,对每个函数独立运行 30 次,记录 30 次所得最好函数值的平均值(记作Mean.B)、标准差(Standard Deviation,记作 Std.D)及平均迭代次数(Number of Generations,记作 Num),并和文献[1]中方法 FEP 和 CEP 的已有计算结果进行比较,结果见表 1.

表 1 三种方法的比较

f	NEP			FEP			CEP		
	Num	Mean.B	Std.D	Num	Mean.B	Std.D	Num	Mean.B	Std.D
f_1	50	0.9980	0	100	1.22	0.56	100	1.66	1.19
f_2	50	-10.3870	1.3674	100	-6.57	3.14	100	-9.10	2.92
f_3	400	0.0332	0.0319	400	0.14	0.40	400	4.08	3.08
f_4	1500	1.32×10^{-6}	1.37×10^{-12}	1500	1.8×10^{-2}	2.1×10^{-3}	1500	9.20	2.80
f_5	328	0.0041	5.36×10^{-5}	2000	1.6×10^{-2}	2.2×10^{-2}	2000	8.6×10^{-2}	0.12

由表 1 可以明显地看到,与文献[9]中两个方法相比,本文的算法能更迅速找到更精确的全局极值点.

7 结束语

本文受平滑技术的启发,重新设计了适应度函数,充分利用平滑函数的性质,在很大程度上克服了遗传算法对多峰函数极易陷入局部极值点的缺点,且根据种群中点所处位置的不同,重新设计交叉算子,对处于不同位置的点做了相应的处理,并结合一维搜索使函数值迅速下降,从而迅速达到全局最优,数值实验结果表明该算法对求解全局最优问题是迅速有效的.但今后仍需进行更多的数值实验和对算法的效率作进一步的改进.

参 考 文 献

1 Lucidi S., Piccialli V.. New classes of globally convexized filled functions for global optimization. Journal of Global Optimization, 2002, 24(1): 219～236

2 Ge Ren-Pu, Qin Yong-Feng. Globally convexized filled functions for global optimization. Applied Mathematics and Computation, 1999, 35(3): 131～158

3 Zheng Xu, Huing Hong-Xuan *et al*. Filled functions for unconstrained global optimization. Journal of Global Optimization, 2001, 20(1): 49～65

4 Liu Xian. Finding global minima with a computable filled function. Journal of Global Optimization, 2001, 19(1): 151～161

5 Ge Ren-Pu. Filled function method for finding global minimizer of a function of several variables. Mathematical Programming, 1990, 46(2): 191～204

6 Oblow E. M.. Stochastic tunneling algorithm for global optimization. Journal of Global Optimization, 2001, 20(3): 195～212

7 Levy V. V., Monpalvo A.. The tunneling algorithm for global minimization of function. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1985, 6(1): 15～29

8 Leung Y. W., Wang Yu-Ping. An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2000, 4(4): 41～53

9 Yao Xin, Liu Yong, Lin Guang-Ming. Evolutionary programming made faster. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(2): 82～102

10 Clerc M., Kennedy J.. The particle swarm-explosion, stability and convergence in multidimensional complex space. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58～73

WANG Yu-Ping, born in 1961, Ph. D., professor. His major research interests include evolutionary computation, and optimization theory and methods.

LIU Da-Lian, born in 1978, M. S.. Her major research interests include evolutionary computation, and optimization theory and methods.

Background

Global optimization problem is a very important problem and has a variety of applications in engineering, management, mathematics and other fields. A common difficulty for the existing global optimization methods is that they are not easy to escape from the local optimal solutions, therefore often not find the global optimal solution. In order to make it escape from the local optimal solutions and find the global optimal solution easier, the authors construct a smoothing function and design a new crossover operator based on the properties of the smoothing function. By making use of the properties of the smoothing function, the line search technique is properly combined into the algorithm design. Based on all these, a novel effective evolutionary algorithm for global optimization is proposed and its global convergence is proved. The simulation results show that the proposed algorithm is very effective.