

# 基于曲率圆的平面参数曲线求交算法

张松海<sup>1)</sup> 黄智勇<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

<sup>2)</sup>(新加坡国立大学计算机学院 新加坡)

**摘 要** 主要讨论了平面参数曲线求交的迭代算法,提出了迭代过程中迭代可信度的概念,并给出了计算方法.在此基础上,改进了MAF求交算法,给出了曲率圆迭代算法,即使用二次曲线对参数曲线的局部形状进行近似,进行迭代交点和迭代步长的计算.

**关键词** 迭代可信度;MAF求交;曲率圆

中图法分类号 TP391

## Intersections of Planar Parametric Curves Based on Curvature Circle

ZHANG Song-Hai<sup>1)</sup> HUANG Zhi-Yong<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084)

<sup>2)</sup>(National University of Singapore, Singapore)

**Abstract** In the intersections of parametric curves, this paper presents the definition of iteration reliability and its computation. Based on the ideas of iteration reliability, this paper improves the MAF algorithm and present curvature circle iteration algorithm by using the second order approximation of the curves.

**Keywords** iteration reliability; MAF; curvature circle

## 1 引 言

参数曲线求交在CAD/CAM系统中是一个基础的也是非常重要的问题,所以对求交算法的速度和稳定性都有很高的要求.如果求交算法失败,可能会导致严重的后果.比如在实体建模过程中,如果出现求交失败,就会导致布尔操作产生错误操作,从而使得边界表示发生错误.

现在,对于求交的速度和稳定性问题已有广泛、深入的研究.求交算法主要分为:代数方法、细分方法和迭代方法或几种方法的综合.代数方法<sup>[1-2]</sup>主要基于消去理论和root finding,它在处理5次以下的曲线时是速度最快的.细分方法<sup>[3-4]</sup>是一种鲁棒的方

法,它可以找到所有的交点,但是收敛速度很低,并且会消耗大量的内存.迭代方法,例如牛顿法<sup>[5]</sup>和求交算法MAF(Moving Affine Frame)<sup>[6-7]</sup>,在一般情况下,速度是最快的,但是它们是初值敏感的.如果初始值选取得不是很好,迭代算法的迭代过程可能变得没有意义,迭代的结果可能发散,也可能偶然地收敛在远离初始值的地方.

牛顿法和MAF法实际上都是使用一条由曲线上一点的位置和该点处的切矢构成的直线来对该点处的曲线进行一阶近似,然后通过投影(牛顿法)或者求直线交点(MAF法)的方法计算迭代的步长.而造成迭代失败的主要原因是由于在某一次迭代过程中计算的步长过大,然而在这样大的步长下,用直线对曲线近似估计的误差也是很大的,也就是说此

次迭代计算的步长值是错误的, 用这样的结果进行下一次迭代操作就使得结果变得不可靠. 当然即使是非常接近结果的初始值, 也会出现迭代在交点附近震荡或者收敛极其缓慢以至于在给定步数内无法收敛的情况.

本文给出了基于曲线二阶近似的曲率圆迭代算法. 二阶估计比一阶估计(直线)更贴近原来的曲线, 所以它在该点处保留了原曲线更多的局部特征. 同时, 将迭代步长值限制在某个最大值之内, 使得每次迭代的步长值都是可靠的. 这个最大值是通过近似的误差计算出来的, 称为迭代可信度. 在下面的章节中, 首先介绍一阶迭代可信度的计算和使用一阶迭代可信度对 MAF 算法的改进; 第 3 节介绍曲线的二次估计和二阶迭代可信度; 第 4 节介绍利用曲率圆计算迭代步长值; 第 5 节给出算法的若干结果, 并和原始 MAF 算法结果进行比较.

## 2 一阶迭代可信度和 MAF 算法的改进

泰勒展开是估计近似误差的常用工具<sup>[8-10]</sup>. 设  $C(t)$  为二阶连续的参数曲线, 它在  $t_0$  处的一阶泰勒展开是

$$C(t_0 + \Delta t) = C(t_0) + C'(t_0)\Delta t + \frac{C''(\xi)}{2}\Delta t^2,$$

其中,  $\xi \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ .

假定  $C''(\xi)$  在  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  区间内变化不是很大, 可以使用  $C''(t_0)$  近似. 如果使用直线  $L(\Delta t) = C(t_0) + C'(t_0)\Delta t$  对曲线进行近似, 则对于给定的误差  $d$  ( $d$  一般由两条曲线初始点的距离决定), 可以得到

$$\frac{\|C''(t_0)\|}{2}\Delta t^2 \leq d, \text{ 有 } \Delta t \leq \sqrt{\frac{2d}{\|C''(t_0)\|}}.$$

定义  $\Delta t_{\max 1} = \sqrt{\frac{2d}{\|C''(t_0)\|}}$  为一阶迭代可信度,

并对 MAF 算法进行改进(原始的 MAF 算法参见附录):

(1) 计算曲线  $A$  的位置  $p_1$ 、一阶导矢  $v_{11}$  和二阶导矢  $v_{12}$  以及曲线  $B$  的位置  $p_2$ 、一阶导矢  $v_{21}$  和二阶导矢  $v_{22}$ .

(2) 计算  $dis = \|p_1 - p_2\|$ , 如果  $dis < \epsilon$ , 则退出迭代.

(3) 设  $d = dis/k$  ( $k$  是一个常数, 比如 8), 分别计算两条曲线的一阶迭代可信度  $\Delta t_{\max 1}$ .

(4) 利用 MAF 算法计算两条曲线的步长值  $\Delta t$ , 如果  $\Delta t > \Delta t_{\max 1}$ , 则  $\Delta t = \Delta t_{\max 1}$ ; 如果  $\Delta t < -\Delta t_{\max 1}$ ,

则  $\Delta t = -\Delta t_{\max 1}$ . 转(1)进行下一次迭代.

第 5 节的表 2 给出改进的结果.

## 3 二阶迭代可信度

曲率圆的思想在参数曲线曲面计算中已有相关的应用<sup>[11]</sup>, 该工作利用曲线局部的曲率圆信息, 提出了二阶的正交投影算法. 在本文中, 本文将曲率圆应用于两条参数曲线求交的迭代算法中.

如图 1 所示,  $C(t_0)$  为曲线  $A$  上参数为  $t_0$  的点,  $C'(t_0)$  为该点处的一阶导矢,  $C''(t_0)$  为二阶导矢.  $O$  为曲率圆的圆心, 以  $O$  为原点建立一个局部坐标系,  $X$  轴为从  $O$  到  $C(t_0)$  的单位向量,  $Y$  轴方向为  $C'(t_0)$ .

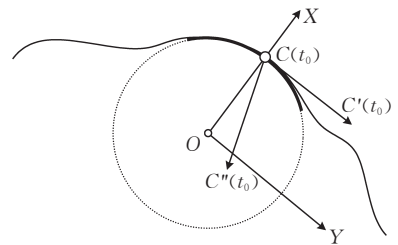


图 1 曲线的曲率圆估计

设二阶迭代可信度  $\Delta t_{\max 2}$ , 则曲线  $A$  上  $C(t_0)$  处局部的曲率圆弧的参数表示为

$$P(t) = r \begin{bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{bmatrix}, \quad t \in (-\Delta t_{\max 2}, \Delta t_{\max 2}) \quad (1)$$

其中

$$r = \frac{\|C'(t_0)\|^3}{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|}, \quad k = \frac{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|}{\|C'(t_0)\|^2} \quad (2)$$

$P(t)$  在全局坐标系下表示为

$$P(t) = O + r \cos kt N + r \sin kt \frac{C'(t_0)}{\|C'(t_0)\|}, \quad t \in (-\Delta t_{\max 2}, \Delta t_{\max 2}) \quad (3)$$

其中,  $N = \frac{C(t_0) - O}{\|C(t_0) - O\|}$ .

使用  $\cos kt$  和  $\sin kt$  级数代入方程, 得到

$$P(t) = O + r \left( 1 - \frac{(kt)^2}{2!} + o(t^3) \right) N + r \left( kt + \frac{(kt)^3}{3!} + o(t^3) \right) \frac{C'(t_0)}{\|C'(t_0)\|},$$

代入  $r$ ,  $k$  和  $N$ , 化简得

$$P(t) = C(t_0) + C'(t_0)t + \frac{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|}{2\|C'(t_0)\|} N t^2 + \frac{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|^2}{3!\|C'(t_0)\|^4} C'(t_0)t^3 + o(t^3).$$

上式与曲线  $A$  在  $t_0$  处的三次泰勒展开相减, 并且忽略余项  $o(t^3)$ , 就可以得到曲率圆与原曲线  $A$  的差, 化简以后得到

$$R(t) = \frac{C'(t_0) \cdot C''(t_0)}{2\|C'(t_0)\|} \cdot \frac{C'(t_0)}{\|C'(t_0)\|} t^2 + \left( \frac{C'''(t_0)}{3!} + \frac{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|^2}{3!\|C'(t_0)\|^4} C'(t_0) \right) t^3.$$

设  $d$  为给定的最大容许误差, 则二阶迭代可信度  $\Delta t_{\max 2}$  应该有如下关系:

$$\|R(\Delta t_{\max 2})\| \leq d.$$

设  $A = \frac{C'(t_0) \cdot C''(t_0)}{2\|C'(t_0)\|} \cdot \frac{C'(t_0)}{\|C'(t_0)\|}$ ,  $B = \frac{C'''(t_0)}{3!} + \frac{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|^2}{3!\|C'(t_0)\|^4} \cdot C'(t_0)$ , 通过两步计算得到

$\Delta t_{\max 2}$  的近似值: 首先计算  $t' = \sqrt[3]{\frac{d}{A+B}}$ , 然后计算

$$\Delta t_{\max 2} = \sqrt{\frac{d}{A+Bt'}}.$$

## 4 曲率圆计算步长值方法

除了通过迭代可信度限制迭代的最大步长值外, 还可以通过修改迭代步长值的计算方法来进一步改进 MAF 算法. 传统 MAF 算法使用直线来近似曲线一点处的局部特征, 并使用两条直线的最短距离点来计算迭代步长值. 曲线的二次估计更加逼近曲线, 保留了更多局部特征, 使用曲线的二次近似计算迭代步长值, 可以使步长的计算更加准确, 特别是提高了步长的方向的准确性, 从而加快收敛速度. 由于曲率圆具有很好的几何性质, 本文使用曲线上一点处的曲率圆和二阶迭代可信度构成的曲率圆弧, 对该点处的曲线形状进行近似, 根据两条曲率圆弧的相对位置, 计算两圆弧的近似最短距离和当前点到达最短距离点的变化角度, 然后将变化角度转为迭代步长值. 由方程(1)可以得到角度值转化为步长值的公式为

$$\Delta t = \frac{da}{k} = \frac{\|C'(t_0)\|^2 da}{\|C'(t_0) \times C''(t_0)\|},$$

其中  $da$  为角度的变化.

设  $cir_1$  和  $cir_2$  分别是曲线  $A$  和  $B$  在  $P_1$  和  $P_2$  处的曲率圆,  $c_1$  和  $c_2$  是圆心,  $r_1$  和  $r_2$  是半径.  $arc_1$  和  $arc_2$  分别是曲线  $A$  和  $B$  的曲率圆弧. 设  $discc$  为圆心距, 根据圆心距与两圆半径的关系可以分为 3 种情况:

(1)  $discc \geq r_1 + r_2$ , 两圆相离或外切(图 2). 可以分别在两条圆弧上找到距离直线  $\overline{c_1 c_2}$  最近点  $P'_1$  和  $P'_2$ , 这两个点被认为是近似的最短距离点.  $da_1$  和  $da_2$  分别是两曲线当前点的角度变化量.

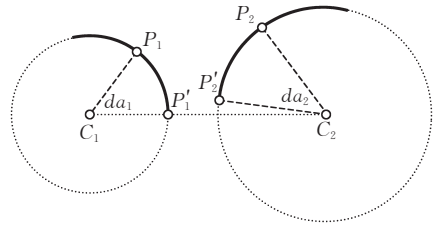


图 2 两圆相离或外切

(2)  $discc \leq |r_1 - r_2|$ , 两圆内切, 或者一圆在另一圆内部(图 3). 与第一种情况类似, 可以分别在两条圆弧上找到距离射线最近点  $P'_1$  和  $P'_2$ , 这两个点被认为是近似的最短距离点.  $da_1$  和  $da_2$  分别是两曲线当前点的角度变化量.

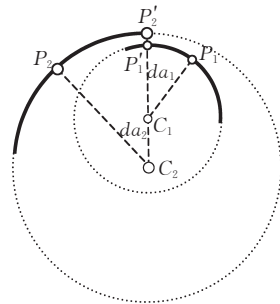


图 3 两圆内切, 或者一圆在另一圆内部

(3) 两圆相交于两个交点, 设为  $Q_1$  和  $Q_2$ (图 4). 分别以  $Q_1$  和  $Q_2$  作为最短距离点, 计算两条曲线的角度变化  $da_1$  和  $da_2$ , 并计算评价函数  $f(Q) = |da_1| \times r_1 + |da_2| \times r_2$ . 选择评价函数值较小那组角度变化量作为本次迭代的角度变化.

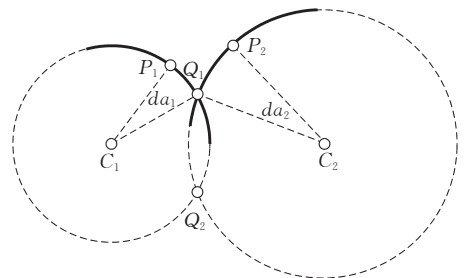


图 4 两圆相切

## 5 实验结果

### 5.1 两条曲线求交

本文使用常用的四阶 B 样条曲线进行测试. 考虑

两条 4 阶 B 样条曲线  $C_k(t) = \sum_{i=0}^n p_{ik} B_{i,4}(t)$ ,  $k=1, 2$ .

第 1 条曲线的控制顶点为  $(-24, 1)$ ,  $(-18.3, 12.4)$ ,  $(18.3, -0.5)$ ,  $(-15.3, -3.5)$ ,  $(26.2, 10.4)$ ,  $(13.4, -5.9)$ ; 第 2 条曲线的控制顶点为  $(-17.5, 16.3)$ ,  $(-14.9, -8.1)$ ,  $(-5.6, 3.3)$ ,  $(10.8, 9.5)$ ,  $(16.1, -7)$ . 两条曲线的节点矢量都是均匀分布的(图 5(a)).

表 1~表 3 分别给出了初值点取在  $(0.708333333, 0.562500000)$  时传统 MAF 算法(图 5(b))、带一阶迭代可信度的 MAF 算法(图 5(c))和曲率圆算法(图 5(d))的实验结果,理想的迭代结果应为  $(0.785476472, 0.823941808)$ . 可以看到传统 MAF 算法,没有迭代

最大值的控制,第一次迭代时,由于两条直线方向相近,计算出的迭代值很大,两条曲线的迭代值分别为  $-0.524464400, -0.816157632$ ,迭代以后曲线上两个迭代点的距离增大到  $13.525130104$ ,第一步迭代实际上是失败的.所以后面的迭代都是无意义的,碰巧收敛到了离初值点很远的另一个交点(两曲线参数值分别为  $0.100631308, 0.077459841$ )上.改进的 MAF 算法考虑了迭代可信度,步长得到了控制,虽然迭代次数有所增加,但是每一步迭代都是可信的,最终收敛到期望的交点.曲率圆算法比使用一阶迭代可信度的 MAF 算法效果更好,它准确地计算出正确地迭代方向,使得在很少的迭代次数内收敛到期望的交点上.

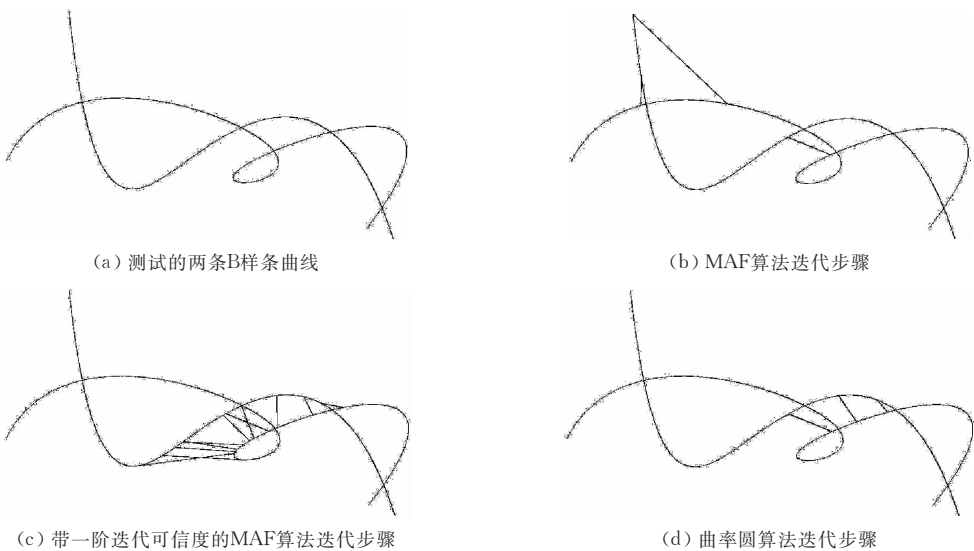


图 5 两条 B 样条曲线求交

表 1 传统 MAF 算法迭代结果

	$dis$	$t_1$	$dt_1$	$t_2$	$dt_2$
1	4.842927532	0.708333333	-0.524464400	0.562500000	-0.816157632
2	13.525130104	0.183868933	-0.088943316	0.000000000	0.052246268
3	2.730649509	0.094925617	0.005247760	0.052246268	0.023415767
4	0.182331150	0.100173377	0.000455342	0.075662035	0.001787512
5	0.001037075	0.100628719	0.000002588	0.077449546	0.000010293
6	0.000000034	0.100631308	0.000000000	0.077459840	0.000000001
7	7.588600e-015	0.100631308		0.077459841	

表 2 用一阶迭代可信度改进的 MAF 算法迭代结果

	$dis$	$t_1$	$dt_1$	$t_2$	$dt_2$
1	4.842927532	0.708333333	-0.047715525	0.562500000	-0.115251575
2	6.236090357	0.660617808	-0.042590488	0.447248425	-0.155025552
3	10.489643721	0.618027320	-0.063348579	0.292222873	0.095825979
4	7.988635919	0.554678741	0.074422096	0.388048852	0.037752001
5	6.208067198	0.629100837	0.046863788	0.425800853	0.130127034
6	3.810863546	0.675964625	-0.034360293	0.555927887	-0.105397366
7	5.595201190	0.641604331	0.042702708	0.450530522	0.151127208
8	3.627387181	0.684307039	0.035149710	0.601657729	0.086176944
9	3.358943567	0.719456750	0.043711684	0.687834674	0.065422623

(续 表)

	$dis$	$t_1$	$dt_1$	$t_2$	$dt_2$
10	2.128666575	0.763168434	0.035773824	0.753257296	0.045767333
11	2.239161421	0.798942258	-0.012545018	0.799024629	0.027015429
12	0.082623642	0.786397240	-0.000914085	0.826040058	-0.002084263
13	0.000558748	0.785483155	-0.000006683	0.823955796	-0.000013987
14	0.000000024	0.785476472	-0.000000000	0.823941808	-0.000000001
15	4.373771e-015	0.785476472		0.823941808	

表 3 曲率圆算法

	$dis$	$t_1$	$dt_1$	$t_2$	$dt_2$
1	4.842927532	0.708333333	0.031632459	0.562500000	0.121784160
2	3.266858141	0.739965793	0.035874268	0.684284160	0.093813541
3	1.631309426	0.775840061	0.009366123	0.778097701	0.045294106
4	0.022132615	0.785206184	0.000270224	0.823391807	0.000550487
5	0.000028622	0.785476408	0.000000064	0.823942294	-0.000000486
6	1.944932e-011	0.785476472		0.823941808	

## 5.2 随机测试结果

为了更好地检验算法,本文进行了随机求交测试.随机生成 20 条 4 阶 B 样条曲线,每条曲线有 4~20 个控制顶点不等(随机决定),分布在

$((-500, -500) - (500, 500))$  的区域内,每次求交迭代 50 次.表 4 给出了随机测试的结果,由于传统 MAF 算法结果更差,本文只比较带一阶迭代可信度的 MAF 算法和曲率圆算法.

表 4 随机测试结果

	求交 次数	成功迭代 次数	总迭代 次数	成功率/ %	平均迭代 次数	迭代成功时平均 迭代次数
带一阶迭代可信度的 MAF 算法	5563	4762	64988	4762/5563=85.60	64988/5563=11.7	5.23
曲率圆算法	5563	5559	27879	5559/5563=99.9	27879/5563=5.0	4.97

## 6 结论和将来的工作

本文主要研究了二维下的参数曲线迭代求交算法.首先引入迭代可信度,以控制迭代步长的最大值,并利用一阶迭代可信度,改进传统的 MAF 算法.可以看到,迭代可信度的思想不仅仅用于 MAF 求交算法,在牛顿法等其他迭代算法中也同样适用.同时,使用曲率圆代替原来的直线,可以更好地对原曲线进行近似,并在此基础上,进一步改进 MAF 算法,给出了曲率圆的迭代求交算法.

在三维情况下,曲率圆的相对位置变得复杂,本文希望在将来的工作中找出一个简单的几何算法求出三维下曲率圆弧的近似最近距离点.同时,本文提出的算法相对传统 MAF 算法,增加了二阶导数、三阶导数的计算量,由于只用来估计迭代可信度,可以不用计算二阶、三阶导数,而使用以前迭代步中计算过的在迭代点附近的曲线点的位置和一阶导数来近似.这样可以进一步提高算法的效率.

### 参 考 文 献

[1] Goldman R N. The method of resolvents: A technique for

the implicitization, inversion, and intersection of non-planar, parametric, rational cubic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(4): 237-255

- [2] Sederberg T W, Anderson D C, Goldman R N. Implicitization, inversion, and intersection of planar rational cubic curves. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1985, 31(1): 89-102
- [3] Sederberg T W, Nishita T. Curve intersection using Bezier clipping. *Computer Aided Design*, 1990, 22(9): 538-549
- [4] Koparkar P A, Mudur S P. A new class of algorithms for processing of parametric curves. *Computer Aided Design*, 1983, 15(1): 41-45
- [5] Hoschek J, Lasser D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. Wellestey, MA; A. K. Peters, 1993
- [6] Jin Tong-Guang, Wang Guo-Zhao. MAF method for intersection calculation between parametric surfaces. Zhejiang University: Technical Report; No. \# 8801057, 1988
- [7] Hu Shi-Min, Sun Jia-Guang, Jin Tong-Guang, Wang Guo-Zhao. Computing the parameters of points on Nurbs curves and surfaces via moving affine frame method. *Journal of Software*, 2000, 11(1): 49~53(in Chinese)  
(胡事民,孙家广,金通光,汪国昭.基于活动仿射标架反求 Nurbs 曲线曲面参数. *软件学报*, 2000, 11(1): 49~53)
- [8] Montaudouin W T, Tiller W, Vold H. Applications of power series in computational geometry. *Computer-Aided Design*, 1986, 18(10): 514-524

- [9] Mow C, Peters T J, Stewart N F. Specifying useful error bounds for geometry tools: An intersector exemplar. *Computer-Aided Design*, 2003, 20(5): 247-251
- [10] B(u)hler K. Taylor models and affine arithmetics—Towards a more sophisticated use of reliable arithmetics in computer graphics//Proceedings of the 17th Spring-Conference in Com-

puter Graphics (SCCG' 01). Budmerice, Slovakia, 2001: 40-47

- [11] Hu Shi-Min, Wallner J. A second order algorithm for orthogonal projection onto curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 22(3): 251-260

### 附录. 参数曲线求交的 MAF 算法.

对于给定的两条参数曲线  $A, B$ , 设其初始参数分别为  $t_1$  和  $t_2$ :

(1) 计算曲线  $A$  的位置  $p_1$ , 一阶导矢  $v_1$ , 以位置  $p_1$  和导矢  $v_1$  构造直线  $l_1$  以及曲线  $B$  的位置  $p_2$ , 一阶导矢  $v_2$ , 以位置  $p_2$  和导矢  $v_2$  构造直线  $l_2$ .

(2) 计算  $dis = \|p_1 - p_2\|$ , 如果  $dis < \epsilon$ , 则退出迭代.

(3) 计算由直线  $l_1$  和  $l_2$  的交点  $p$ .

(4) 计算迭代步长:  $\Delta t_i = \frac{\|p - p_i\|}{\|v_i\|}$ ,  $i = 1, 2$ . 转(1)进行

下一次迭代.



**ZHANG Song-Hai**, Ph. D.. His research interests include computer aided design and graphics.

**HUANG Zhi-Yong**, associate professor. His research interest is in computer graphics.