

# 基于 MG-GMRES 算法的图像超分辨率重建

韩玉兵<sup>1)</sup> 束 锋<sup>1)</sup> 孙锦涛<sup>1)</sup> 吴乐南<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

<sup>2)</sup>(东南大学无线电工程系 南京 210096)

**摘 要** 提出了一种基于多层网格(MG)和广义极小残余(GMRES)算法相结合的图像超分辨率重建快速算法,首先采用正则化方法给出图像超分辨率重建模型;然后在系统介绍 MG 和 GMRES 算法的基础上,针对图像超分辨率重建中非对称线性稀疏方程的求解,提出多层网格-广义极小残余(MG-GMRES)算法;详细讨论了 MG-GMRES 算法的光滑、限制、插值操作以及计算复杂度.实验研究表明该算法的重建结果相当有效,与 MG、GMRES 和 Richardson 迭代相比,具有更快的收敛速度.

**关键词** 图像处理;超分辨率重建;多层网格算法;广义极小残余算法;多层网格-广义极小残余算法

**中图法分类号** TP391

## Image Super-Resolution Reconstruction Based on MG-GMRES Algorithm

HAN Yu-Bing<sup>1)</sup> SHU Feng<sup>1)</sup> SUN Jin-Tao<sup>1)</sup> WU Le-Nan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Electronic Engineering & Optoelectronic Techniques, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

<sup>2)</sup>(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096)

**Abstract** A fast image super-resolution reconstruction algorithm is proposed based on multigrid (MG) and generalized minimal residual (GMRES) algorithms. In the first, the image super-resolution reconstruction model is put forward using regularization. After systemically introducing MG and GMRES algorithms, an accelerative MG algorithm named MG-GMRES is proposed to solve the sparse non-symmetric linear equation, which is often occurred in image super-resolution reconstruction. The smoothing, restriction and prolongation operators are thoroughly studied and the computational complexity is analyzed in detail. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm can greatly improve the speed of convergence compared with MG, GMRES, and Richardson iteration.

**Keywords** image processing; super-resolution reconstruction; MG algorithm; GMRES algorithm; MG-GMRES algorithm

## 1 引 言

图像超分辨率重建是目前信号处理领域最为活跃的研究方向之一<sup>[1]</sup>,其通过对观测图像进行处理,

在保证通频带内低频信息复原的基础上,对截止频率以上的高频信息进行复原,使重建图像获得更多的细节和信息,更加接近退化前的理想高分辨率图像.它在军事、天文、遥感等各方面都具有极其重要的应用.超分辨率重建算法主要有频域法<sup>[2]</sup>和空域法,

收稿日期:2006-05-16;修改稿收到日期:2007-02-05. 本课题得到江苏省图像处理与图像通信重点实验室开放研究课题项目基金(ZK206006)资助. 韩玉兵,男,1971年生,博士,讲师,研究方向为数字图像处理、数字视频处理. E-mail: hanyb@163.com. 束 锋,男,1973年生,博士,副教授,研究方向为无线通信. 孙锦涛,男,1942年生,教授,博士生导师,研究领域为通信信号处理. 吴乐南,男,1952年生,教授,博士生导师,研究领域为数据压缩与多媒体信号处理.

而空域法又分为基于最小二乘的方法<sup>[3]</sup>、Bayesian方法<sup>[4]</sup>和基于凸集投影<sup>[5]</sup>的方法等。

本文针对图像超分辨率重建中常见的一类非对称大型稀疏线性方程的求解,提出一种基于多水平处理和 Krylov 加速技术的图像超分辨率快速重建算法。具体组织如下:首先利用病态问题的正则化处理给出图像超分辨率重建的数学模型;其次在系统介绍多层网格和广义极小残差算法的基础之上,提出基于多层网格和广义极小残差算法相结合的图像超分辨率重建算法;最后为实验分析和结论。

## 2 图像超分辨率重建模型

一般图像退化可表示为  $Y = DBX + E$ , 其中  $X$ ,  $Y$ ,  $E$  分别为原始高分辨率图像、低分辨率退化图像和观测噪声,  $B$  为模糊卷积矩阵,  $D$  为降采样矩阵。所谓超分辨率重建就是由观测图像  $Y$  复原重建出原来高分辨率图像  $X$ , 显然最直接的方法就是最小二乘估计, 或在假设  $E$  为高斯白噪声条件下的极大似然估计, 即  $\hat{X} = \arg \min_X \|Y - DBX\|^2$ , 其 Euler-Lagrange 方程为  $B^T D^T DBX = B^T D^T Y$ 。由于这是一个高度病态的反问题, 需要进行正则化处理, 典型的正则化泛函<sup>[6]</sup>为

$$\hat{X} = \arg \min_X \left\{ \|Y - DBX\|^2 + \alpha \iint_{\Omega} \phi(|\nabla X|) dx dy \right\} \quad (1)$$

其中  $\|Y - DBX\|^2$  表示数据拟合项, 衡量数据拟合程度;  $\iint_{\Omega} \phi(|\nabla X|) dx dy$  为正则项, 衡量信号的某种奇异性;  $\phi(s)$  为单调非降函数, 满足保持图像细节的各向异性演化条件<sup>[6]</sup>:  $\phi'(0) = 0$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi''(s) = \phi''(0) > 0$ ,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi''(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(s)}{s} = 0$ ,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi''(s)}{\phi'(s)/s} = 0$ ,  $\frac{\phi'(s)}{s}$  在  $[0, +\infty)$  上连续和严格下降;  $\alpha$  为与观测噪声有关的正则化参数, 起平衡正则项和数据项的作用, 其本质含义就是寻找解  $X$ , 在充分拟合观测数据的前提下, 使某种奇异性度量最小, 当  $\alpha$  变大时, 解趋于光滑或者正则, 反之则数据拟合误差变小。由变分原理得到以下的 Euler-Lagrange 方程

$$B^T D^T DBX - \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\phi'(|\nabla X|)}{|\nabla X|} \nabla X \right) = B^T D^T Y \quad (2)$$

采用半二次规整<sup>[7]</sup>或不动点迭代方法<sup>[8]</sup>, 可得到如下迭代形式

$$B^T D^T DBX_k - \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\phi'(|\nabla X_{k-1}|)}{|\nabla X_{k-1}|} \nabla X_k \right) = B^T D^T Y \quad (3)$$

其中  $X_k$  表示第  $k$  次迭代值, 设  $g = \frac{\phi'(|\nabla X_{k-1}|)}{|\nabla X_{k-1}|}$ ,  $L$  为离散  $\operatorname{div}(g \nabla X_k)$  得到的线性微分算子或该线性算子对应的矩阵, 即  $LX_k = \operatorname{div}(g \nabla X_k)$ , 则有

$$TX_k = B^T D^T DBX_k - \alpha LX_k = B^T D^T Y = b \quad (4)$$

其中  $T = B^T D^T DB - \alpha L$ ,  $b = B^T D^T Y$ 。一般情况下,  $L$  与  $g$  有关且不是对称矩阵, 这可由如下观察得到: 当  $\phi(s) = s^2$  时,  $g$  恒为常数,  $LX = \operatorname{div}(g \nabla X) = g \Delta X$ , 其中  $\Delta$  为 Laplacian 算子, 此时无论采用何种边界条件, 算子  $\Delta$  对应的矩阵都不是对称的。因此  $T$  一般为非对称矩阵, 上述线性方程不能采用简单的共扼梯度算法进行求解, 本文采用一种多层网格与 Krylov 加速技术相结合的方法进行求解, 详见下面三节。

## 3 多层网格算法

多层网格(MG)算法<sup>[9]</sup>是一种多水平的高效迭代算法, 目前已经成为求解微分方程和大型线性方程组最有效的方法之一, 它的最大优点就是具有拟线性复杂度和快速收敛性。其基本思想主要源于以下几点:

(1) 误差校正。假设  $\hat{X}$  为方程  $TX = b$  的近似解, 残值为  $r = b - T\hat{X}$ , 则解误差  $e = X - \hat{X}$  满足残值误差方程  $Te = r$ , 如果能够求出误差  $e$ , 则最终解即为  $X = \hat{X} + e$ 。虽然求解残值误差方程的难度与原方程一样, 但这个方程具有以下两个优点: ① 由于误差  $e$  比  $X$  更加光滑, 它可以用粗网格来很好地逼近; ② 残值误差方程  $Te = r$  的初值可以简单确定为 0。

(2) 光滑迭代特性。众所周知, 线性方程组存在许多经典迭代算法, 如 Richardson 迭代、Jacobi 迭代和 Gauss-Siedal 迭代<sup>[9]</sup>等, 它们都具有一个共性特征, 即对解中的高频(振荡)误差具有快速衰减性, 但对低频(光滑)误差却衰减缓慢, 这样就会导致这些迭代算法的渐进收敛特性很差, 下文统称这些迭代算法为光滑迭代。

(3) 网格粗化和细化特性。由于光滑迭代仅对解中的高频误差具有良好的衰减特性, 而对低频误差则衰减很慢, 如果将解中的低频误差部分降采样到粗网格上, 它就会表现出更多的高频振荡。在粗网格上进行几次光滑迭代, 就可以很快地衰减这种高

频误差(即细网格上的低频误差),然后再插值回到细网格上,最后再在细网格上进行几次光滑迭代就可以进一步减少解中的高频误差. 这样通过细网格上的光滑迭代可以很好地抑制解中的高频误差,而解中的低频误差部分可以通过粗网格上的光滑迭代得到快速衰减. 这种思想可以通过限制和插值操作推广到多层网格,在各层网格上的光滑迭代可以很好地抑制相应的不同频率误差,从而得到很快的收敛速度.

综上可得如下的多层网格基本算法.

**算法 1.** 多层网格算法  $X^h = MG(T^h, b^h, X_0^h, \Omega^h, S_1, S_2, I_h^{2h}, I_{2h}^h, \alpha_1, \alpha_2, p)$ .

1. 前光滑. 设置初始值  $X_0^h$ , 针对  $T^h X^h = b^h$  运用光滑迭

代算法  $S_1$  迭代  $\alpha_1$  次,  $X^h = S_1^{\alpha_1}(T^h, b^h, X_0^h)$ ;

2. 若  $\Omega^h$  为最粗层, 转步 4, 否则令  $T^{2h} = I_h^{2h} T^h I_{2h}^h, b^{2h} = I_h^{2h}(b^h - T^h X^h), X_0^{2h} = 0$ , 针对粗网格  $\Omega^{2h}$  和粗网格方程  $T^{2h} X^{2h} = b^{2h}$ , 调用  $p$  次  $\{X^{2h} = MG(T^{2h}, b^{2h}, X_0^{2h}, \Omega^{2h}, S_1, S_2, I_h^{2h}, I_{2h}^h, \alpha_1, \alpha_2, p), X_0^{2h} = X^{2h}\}$ ;

3. 校正.  $X^h = X^h + I_{2h}^h X^{2h}$ ;

4. 后光滑. 令  $X_0^h = X^h$ , 针对  $T^h X^h = b^h$  运用光滑迭代算法  $S_2$  迭代  $\alpha_2$  次,  $X^h = S_2^{\alpha_2}(T^h, b^h, X_0^h)$ .

其中  $\Omega^h, \Omega^{2h}$  为细网格层和粗网格层,  $I_h^{2h}, I_{2h}^h$  为限制和插值算子,  $S_1, S_2$  为前后光滑迭代算子,  $T^h, T^{2h}$  为相邻层网格矩阵,  $X_0^h, X_0^{2h}$  为迭代初值,  $\alpha_1, \alpha_2$  为前后光滑迭代次数,  $p$  为内嵌的多层网格算法调用次数, 它决定了多层网格算法的具体迭代型式<sup>[9]</sup>, 如  $p=1$  时即为简单的 V 型算法,  $p=2$  时为 W 型算法, 若将多层网格与嵌套迭代相结合, 还可得到 Full 型多层网格算法, 如图 1 所示.

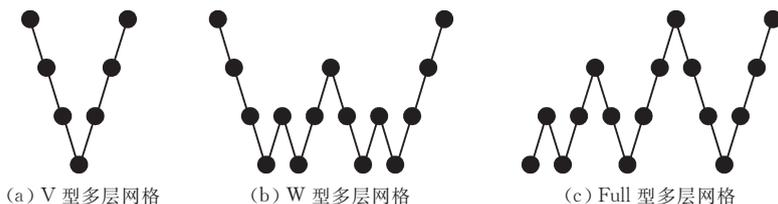


图 1 多层网格型式

### 4 广义极小残余算法

广义极小残余 (Generalized Minimal Residual, GMRES) 算法<sup>[10]</sup>, 是一种基于 Galerkin 原理和 Krylov 子空间理论的加速方法, 由于具有优良的收敛特性, 目前已经成为求解大型稀疏非对称线性方程组的主流方法之一. 为保证良好的收敛特性, 一般情况下 GMRES 算法常常佐以预处理技术, 变成求解等价方程  $M^{-1}TX = M^{-1}b$ , 此处要求预处理矩阵  $M^{-1}$  非奇异.

考虑方程  $TX = b, X_0$  为初值, 令  $X = X_0 + z$ , 则有  $Tz = r_0$ , 其中  $r_0 = b - TX_0$ . 定义 Krylov 子空间  $K_m = \text{span}\{r_0, Tr_0, \dots, T^{m-1}r_0\}, L_m = TK_m = \text{span}\{Tr_0, T^2r_0, \dots, T^m r_0\}$ . GMRES 算法的本质就是求  $z_m \in K_m$ , 使  $(r_0 - Tz_m, w) = 0, \forall w \in L_m$ . 为方便起见, 令  $V_m = (v_1, v_2, \dots, v_m), W_m = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  是子空间  $K_m, L_m$  中的一组基向量形成的矩阵, 且设  $m$  为循环起始步数, 则预处理 GMRES( $m$ ) 算法<sup>[10]</sup> 具体步骤如下.

**算法 2.** 预处理 GMRES( $m$ ) 算法.

1. 设定循环起始步数  $m$ , 初值  $X_0$ , 计算  $r_0 = b - TX_0$ ,

$$z_0 = M^{-1}r_0, v_1 = \frac{z_0}{\|z_0\|}, \beta = \|z_0\|;$$

2. 调用带预处理的 Arnoldi( $m$ ) 算法得到  $V_m = \{v_i\}_{i=1}^m$  和上 Hessenberg 矩阵  $\bar{H}_m$ ;

3. 极小化  $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y_m\|$  得到  $y_m$ , 其中  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ ;

4.  $X_m = X_0 + V_m y_m$ ;

5. 计算  $\|r_m\| = \|b - TX_m\|$ , 若  $\|r_m\| < \epsilon$ , 则停止; 否则令  $X_0 = X_m, r_0 = r_m, z_0 = M^{-1}r_0, v_1 = \frac{z_0}{\|z_0\|}, \beta = \|z_0\|$ , 转步 2.

上述算法中带预处理的 Arnoldi( $m$ ) 算法<sup>[11]</sup> 如下.

**算法 3.** 预处理 Arnoldi( $m$ ) 算法.

求解  $K_m$  的正交基  $V_m = \{v_i\}_{i=1}^m$  和相应的上 Hessenberg 矩阵  $\bar{H}_m$ .

1.  $r_0 = b - TX_0, z_0 = M^{-1}r_0, v_1 = \frac{z_0}{\|z_0\|}, \bar{H}_1 = []$  为空矩阵,  $i=1$ . 若  $m=1$ , 则停止; 否则转步 2;

2.  $u = M^{-1}Tv_1, k=1$ ;

2. 1.  $h_{k,i} = (u, v_k); w = u - h_{k,i}v_k$ ;

2. 2. 如果  $k=i$ , 则转步 3; 否则令  $u = w, k = k+1$ , 转步 2. 1;

$$3. h_{i+1,i} = \|w\|, v_{i+1} = \frac{w}{h_{i+1,i}}, \bar{H}_{i+1} = \begin{pmatrix} & & h_{1,i} \\ & & \vdots \\ \bar{H}_i & & \\ & & h_{i,i} \\ \mathbf{0} & & h_{i+1,i} \end{pmatrix};$$

4. 若  $i+1=m$ , 则停止; 否则, 令  $i=i+1$ , 转步 2.

另外, 极小化  $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y_m\|$  可以通过 Givens 旋转矩阵<sup>[12]</sup> 先将  $\bar{H}_m$  变为上三角形, 然后直接求解. 显

然当  $\mathbf{M}=\mathbf{I}$  时, 上述算法即为不带预处理的标准 GMRES 算法.

## 5 多层网格-广义极小残余算法

### 5.1 算法描述

由于广义极小残余算法和多层网格算法均是目前求解大型稀疏方程组较为有效的方法, 许多学者尝试将其进行有机结合, 期望达到更好的性能. 本节采用多层网格-广义极小残余算法 (MG-GMRES) 进行线性方程  $\mathbf{T}\mathbf{X}_k=\mathbf{b}$  的求解, 此处  $\mathbf{T}=\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{B}-\alpha\mathbf{L}$  一般为大型稀疏非对称矩阵. 所谓 MG-GMRES 算法就是一种结合多层网格和广义极小残余的混合算法, 它运用 Krylov 子空间加速技术 (GMRES 算法) 对多层网格算法进行加速, 从另一角度看, 它也是一种采用多层网格算法作为内嵌预处理操作的预处理广义极小残余算法. 其具体实现只需将算法 2 和算法 3 中的  $\mathbf{z}_0=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0$  和  $\mathbf{u}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{v}_i$  分别更改为  $\mathbf{z}_0=\text{MG}(\mathbf{T}, \mathbf{r}_0, \mathbf{z}_0^{(0)}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_h^{2h}, \mathbf{I}_{2h}^h, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$  和  $\mathbf{u}=\text{MG}(\mathbf{T}, \mathbf{T}\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_h^{2h}, \mathbf{I}_{2h}^h, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$  即可, 其中  $\mathbf{z}_0^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}$  为内嵌多层网格迭代的初始值. 采用这种内嵌预处理技术具有以下两个好处, 一是不需要具体考虑预处理矩阵的细微结构; 二是多层网格算法具有拟线性复杂度的计算量.

### 5.2 算子讨论

下面先来讨论 MG-GMRES 算法中的插值、限制算子以及粗网格矩阵, 至于光滑算子则在后面介绍.

本文  $\mathbf{I}_{2h}^h$  采用循环周期边界的分片线性插值算子, 其模板为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

限制算子为  $\mathbf{I}_h^{2h}=\frac{1}{4}(\mathbf{I}_{2h}^h)^T$ . 对于粗网格矩阵, 因为

$\mathbf{T}^h=(\mathbf{B}^h)^T(\mathbf{D}^h)^T\mathbf{D}^h\mathbf{B}^h-\alpha\mathbf{L}^h$ , 所以

$$\mathbf{T}^{2h}=\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{T}^h\mathbf{I}_{2h}^h=\mathbf{I}_h^{2h}(\mathbf{B}^h)^T(\mathbf{D}^h)^T\mathbf{D}^h\mathbf{B}^h\mathbf{I}_{2h}^h-\alpha\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{L}^h\mathbf{I}_{2h}^h \quad (5)$$

由于降采样算子和限制算子的相似性, 所以可将  $\mathbf{D}^h$  近似为  $\mathbf{I}_h^{2h}$ , 则

$$\mathbf{T}^{2h}=\mathbf{I}_h^{2h}(\mathbf{B}^h)^T(\mathbf{I}_h^{2h})^T\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{B}^h\mathbf{I}_{2h}^h-\alpha\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{L}^h\mathbf{I}_{2h}^h \quad (6)$$

又因为  $(\mathbf{I}_h^{2h})^T=\frac{1}{4}\mathbf{I}_h^{2h}$ , 所以整理得

$$\mathbf{T}^{2h}=\frac{1}{4}(\mathbf{B}^{2h})^T\mathbf{B}^{2h}-\alpha\mathbf{L}^{2h} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{B}^{2h}=\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{B}^h\mathbf{I}_{2h}^h$ ,  $\mathbf{L}^{2h}=\mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{L}^h\mathbf{I}_{2h}^h$  分别为  $\mathbf{B}^h, \mathbf{L}^h$  在粗网格  $\boldsymbol{\Omega}^{2h}$  上的近似.

下面详细讨论 MG-GMRES 算法中内嵌多层网格算法的前后光滑迭代算子  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ , 为简单起见, 不妨设  $\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2=\mathbf{S}$ , 且模糊卷积  $\mathbf{B}$  和微分离散格式  $\mathbf{L}$  均采用循环周期边界. 考虑到超分辨率重建的具体降质模型, 由于  $\mathbf{B}, \mathbf{L}$  以及降采样矩阵  $\mathbf{D}$  的复杂性, 很难确定矩阵  $\mathbf{T}$  的具体结构, 这里采用如下的松弛 Richardson 迭代方法. 将  $\mathbf{T}$  分解为

$$\mathbf{T}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}-\alpha\mathbf{L}=\omega\mathbf{I}-(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{L}) \quad (8)$$

其中  $\mathbf{A}=\mathbf{D}\mathbf{B}$ ,  $\omega$  为松弛因子, 则构成如下迭代格式

$$\mathbf{X}_{k+1}=\frac{1}{\omega}(\mathbf{b}+(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{L})\mathbf{X}_k) \quad (9)$$

本文称之为“Richardson”迭代格式, 显然上述格式的迭代矩阵为  $\frac{1}{\omega}(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{L})$ , 其迭代收敛的充要条件为

$$\rho\left[\frac{1}{\omega}(\omega\mathbf{I}-\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\alpha\mathbf{L})\right]=\rho\left[\mathbf{I}-\frac{1}{\omega}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-\alpha\mathbf{L})\right]<1 \quad (10)$$

其中  $\rho(\cdot)$  为矩阵的谱半径.

下面确定松弛因子  $\omega$  的取值, 因为  $\mathbf{B}$  采用循环矩阵模型, 由循环矩阵对角化性质<sup>[13]</sup> 知  $\rho(\mathbf{B}^T\mathbf{B})$  为卷积核所有元素的绝对值之和, 不妨假设为 1. 又由于降采样矩阵  $\mathbf{D}$  的行和为 1, 则  $\rho(\mathbf{D}^T\mathbf{D})=1$ . 所以  $\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=\rho(\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{B})=\rho(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{B}^T\mathbf{B})\leq 1$ . 至于  $\mathbf{L}\mathbf{X}$ , 则采用如下鲁棒格式进行离散<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{X} &= \text{div}(g\nabla\mathbf{X}) \approx \frac{\lambda_p}{h^2}(g_{+0}\mathbf{X}_{i+1,j}+g_{-0}\mathbf{X}_{i-1,j}+ \\ & g_{0+}\mathbf{X}_{i,j+1}+g_{0-}\mathbf{X}_{i,j-1}-\beta_p\mathbf{X}_{i,j}) + \frac{\lambda_d}{h^2}(g_{++}\mathbf{X}_{i+1,j+1}+ \\ & g_{--}\mathbf{X}_{i-1,j-1}+g_{+-}\mathbf{X}_{i-1,j+1}+g_{-+}\mathbf{X}_{i+1,j-1}-\beta_d\mathbf{X}_{i,j}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $h$  为离散步长,  $g_{\pm 0}=g_{i\pm\frac{1}{2},j}$ ,  $g_{0\pm}=g_{i,j\pm\frac{1}{2}}$  和  $g_{\pm\pm}=g_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$  为  $g$  的非整点插值,  $\beta_p=g_{+0}+g_{-0}+g_{0+}+g_{0-}$ ,  $\beta_d=g_{++}+g_{--}+g_{+-}+g_{-+}$ ,  $\lambda_p\geq 0$ ,  $\lambda_d\geq 0$  为满足一致性条件  $\lambda_p+2\lambda_d=1$  的两个权值, 可以根据梯度方向自适应选择, 这里取  $\lambda_p=|\cos(2\theta)|$ , 其中  $\theta$  为梯度  $\nabla\mathbf{X}$  与  $x$  轴正向的夹角. 显然  $-\mathbf{L}$  是对角元为正的对称占优矩阵, 由特征值分布的圆盘定理<sup>[12]</sup> 知, 其特征值分布满足  $0\leq\lambda\leq 2\max_i(-L_{ii})$ , 其中  $L_{ii}$  为矩阵  $\mathbf{L}$  的第  $i$  个对角元. 所以

$$\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \alpha \mathbf{L}) \leq \rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \rho(-\alpha \mathbf{L}) \leq 1 + 2\alpha \max_i(-L_{ii}) \quad (12)$$

根据式(10)和式(12)可得,只要

$$\omega > \frac{1}{2}(1 + 2\alpha \max_i(-L_{ii})) \geq \frac{1}{2}\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \alpha \mathbf{L}),$$

就有  $\rho\left[\frac{1}{\omega}(\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L})\right] < 1$ , 即可保证迭代收敛. 又因为  $0 \leq \frac{\phi'(|\nabla \mathbf{X}|)}{|\nabla \mathbf{X}|} \leq \phi''(0)$ ,  $\lambda_p \leq 1$ ,  $\lambda_d \leq \frac{1}{2}$ , 则

$$\text{有 } \max_i(-L_{ii}) \leq \frac{6\phi''(0)}{h^2}. \text{ 所以根据 } \omega > \frac{1}{2}(1 +$$

$2\alpha \max_i(-L_{ii}))$ , 取  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{6\alpha\phi''(0)}{h^2}$  就可以得到最大松弛效果.

### 5.3 算法复杂度分析

本节分析 MG-GMRES 算法的计算复杂度, 为简单起见, 主要考虑有关卷积运算, 忽略插值、限制等运算, 且卷积采用两次 FFT 进行计算<sup>[13]</sup>. 首先讨论预处理多层网格(以 V 型格式为例)算法, 设网格层数为  $L$ ,  $N_l$ ,  $l=0, \dots, L-1$  表示第  $l$  层网格节点数, 且令  $N_0 = N$ , 多层网格算法的光滑松弛操作采用“Richardson”迭代公式, 则 V 型多层网格一次迭代的计算量为

$$\sum_{l=1}^{L-1} [(\alpha_1 + \alpha_2)(4\text{FFT}(N_l) + dN_l)],$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  分别为前后光滑迭代次数,  $d$  为离散线性微分算子  $\mathbf{L}$  的邻域大小, 又因为  $N_l = 4^{-l}N$ ,  $\text{FFT}(N_l) \sim O(N_l \log(N_l))$ , 则

$$\begin{aligned} & O\left(\sum_{l=0}^{L-1} [(\alpha_1 + \alpha_2)(4\text{FFT}(N_l) + dN_l)]\right) = \\ & O\left(\sum_{l=0}^{L-1} [4(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N \log(4^{-l}N) + d(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N]\right) \end{aligned} \quad (13)$$

并有如下不等式估计

$$\begin{aligned} & O(4(\alpha_1 + \alpha_2)N \log(N) + d(\alpha_1 + \alpha_2)N) \leq \\ & O\left(\sum_{l=0}^{L-1} [4(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N \log(4^{-l}N) + d(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N]\right) \leq \\ & O\left(\sum_{l=0}^{\infty} [4(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N \log(4^{-l}N) + d(\alpha_1 + \alpha_2)4^{-l}N]\right) = \\ & O\left(\frac{4}{3}(\alpha_1 + \alpha_2)N[4\log(N) + d] - \frac{32}{9}(\alpha_1 + \alpha_2)N\right) \end{aligned} \quad (14)$$

上式中利用了  $\sum_{l=0}^{\infty} 4^{-l} = \frac{4}{3}$ ,  $\sum_{l=0}^{\infty} l4^{-l} = \frac{4}{9}$ , 由于  $\alpha_1, \alpha_2, d$  均为不太大的整数, 所以 V 型多层网格算法的计算量近似为  $O(N \log(N))$ . 又由于 GMRES 算法每迭代步主要包含一个 Arnoldi( $m$ ) 过程和一个极小化  $\|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|$  过程, 其中 Arnoldi( $m$ ) 过程

主要包括  $m$  次矩阵向量乘积,  $m$  次多层网格预处理过程和  $\frac{m(m+1)}{2}$  次内积运算, 计算复杂度为  $O(mN \log(N) + m^2 N)$ ; 极小化  $\|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|$  过程主要包括  $m$  次 Givens 变换和一次  $m$  阶上三角形方程的求解, 复杂度为  $O(m^2)$ . 所以 MG-GMRES 总的计算复杂度可近似为

$$C_{\text{MG-GMRES}} \sim O(mN \log(N) + m^2 N) \quad (15)$$

## 6 实验研究

本节针对二维图像的超分辨率重建, 给出 MG-GMRES 算法的数值实验, 采用 Baboon 测试图像, 大小为  $512 \times 512$ . 取方差为 1 的  $5 \times 5$  的高斯模糊核, 降采样因子为 2, 噪声为均值 0、标准差  $\sigma = 2$  的加性高斯白噪声. 正则化函数取  $\phi(s) = \sqrt{1+s^2} - 1$ , 满足保持图像细节的各向异性演化条件, 正则化参数  $\alpha = 0.01$ . MG 算法采用 V 型格式, 网格层数为 6, 前后光滑迭代次数  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , “Richardson”迭代松弛因子  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{6\alpha\phi''(0)}{h^2} = 0.5 + 6\alpha$ , 其中  $\phi''(0) = 1$  且最细层网格离散步长  $h = 1$ . GMRES 算法的重新初始化步数  $m = 5$ , 迭代停止条件为残值误差范数  $\|\mathbf{r}_k\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{T}\mathbf{X}_k\| \leq 1\text{E}-6$ .

图 2 给出了“Richardson”松弛迭代算法、GMRES 算法、MG 算法和 MG-GMRES 算法的残值误差范数曲线. 图 3 为具体的 Baboon 图像超分辨率重建结果.

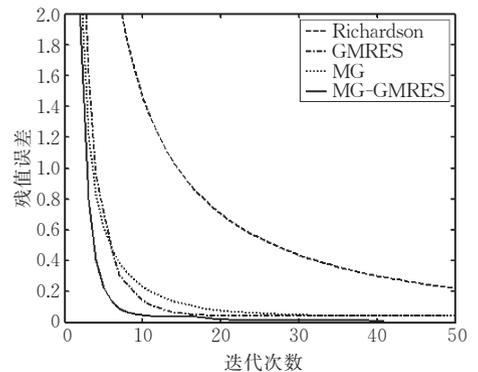


图 2 MG-GMRES 算法的残值误差范数曲线

由实验结果可以看出, Richardson 松弛迭代收敛较慢, GMRES 算法收敛较快, MG 算法前期收敛较快, 后期由于某些误差频率不对应于任何一层网格步长, 因而收敛呈现缓慢趋势, 这可以通过 Krylov 子空间加速技术 GMRES 算法进行加速, 而

MG-GMRES 算法则结合了 MG 和 GMRES 算法的特点, 具有更好的收敛特性.

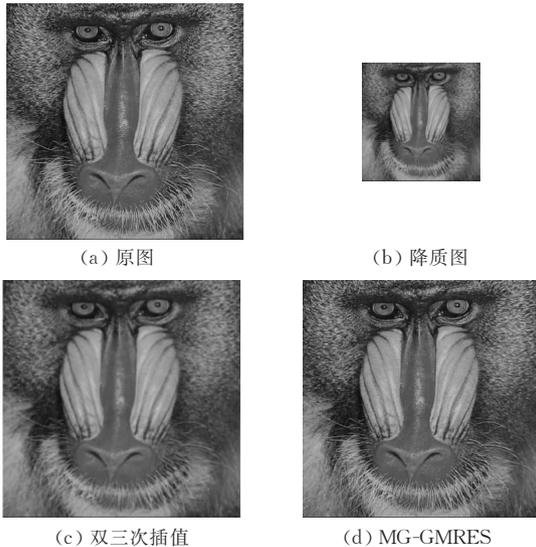


图 3 Baboon 图像超分辨率重建

## 7 结 论

本文针对图像超分辨率重建中常见的一类非对称稀疏线性方程组的数值实现, 提出了基于多层网格与 GMRES 算法相结合的方法. 从本质上讲, MG-GMRES 算法既是基于 Krylov 子空间加速技术的多层网格算法, 又是基于多层网格预处理的 GMRES 算法. 文中结合图像超分辨率重建问题的具体特点, 详细讨论了内嵌多层网格算法的插值、限制、粗网格方程构造和光滑操作以及与 GMRES 算法相结合的相关细节问题. 深刻分析了 MG-GMRES 算法的计算复杂度. 实验结果表明了这种算法的有效性和快速收敛性.

## 参 考 文 献

[1] Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution image reconstruction; A technical overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, 20(3): 21-36

- [2] Tsai R Y, Huang T S. Multiframe image restoration and registration//Tsai R Y, Huang T S eds. *Advances in Computer Vision and Image Processing*. Greenwich, CT: JAI Press, 1984: 317-339
- [3] Nguyen N, Milanfar P, Golub G. A computationally efficient superresolution image reconstruction algorithm. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(4): 573-583
- [4] Elad M, Feuer A. Super-resolution reconstruction of image sequences. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(9): 817-834
- [5] Patti A J, Sezan M I, Tekalp A M. Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1997, 6(8): 1064-1076
- [6] Aubert G, Kornprobst P. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. New York: Springer, 2001
- [7] Charbonnier P, Feraud L B, Aubert G, Barlaud M. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1997, 6(2): 298-311
- [8] Vogel C R, Oman M E. Iterative methods for total variation denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, 17(1): 227-238
- [9] Hackbusch W. *Multi-grid Methods and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- [10] Saad Y, Schultz M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, 7(3): 856-869
- [11] Arnoldi W. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1951, 9: 17-29
- [12] Golub G H, van Loan C F. *Matrix Computations*. 3rd Edition. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996
- [13] Xu Zhong, Zhang Kai-Yuan, Lu Quan. *Fast Algorithms of TOEPLITZ-Like Matrixes*. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1999 (in Chinese)  
(徐 仲, 张凯院, 陆 全. TOEPLITZ 矩阵类的快速算法. 西安: 西北工业大学出版社, 1999)

**HAN Yu-Bing**, born in 1971, Ph.D., lecturer. His research interests include digital image processing, digital video processing.

**SHU Feng**, born in 1973, Ph.D., associate professor. His current research interest is wireless communication.

**SUN Jin-Tao**, born in 1942, professor, Ph.D. supervisor. His current research interests focus on communication signal processing.

**WU Le-Nan**, born in 1952, professor, Ph.D. supervisor. His research interests include data compression, multimedia signal processing.



## Background

In recent years, image super-resolution reconstruction has attracted increasing attention, and the applications can be widely founded in a broad range of image and video processing task such as aerial photo, medical imaging, video surveillance etc. The super resolution reconstruction methods can be mainly divided into two classes: The frequency domain methods and the spatial domain methods. Due to flexibility, spatial domain methods have some important advantages than frequency domain counterparts. On the other hand, the multigrid (MG) and generalized minimal residual (GMRES) algorithms are two effective methods for solving partial differential equation (PDE) and large scale sparse linear equation. In this paper, a fast image super-resolution reconstruction algorithm belonging to spatial domain method is proposed based on the MG and GMRES algorithms. After briefly in-

roduction of image super-resolution reconstruction model, MG and GMRES algorithms, an accelerative MG algorithm named MG-GMRES is put forward to solve the sparse non-symmetric linear equation, which is often occurred in image super-resolution reconstruction based on variation and PDE diffusion. The MG-GMRES is a hybrid algorithm which applies GMRES to accelerate the MG algorithm or uses the MG algorithm as preconditioner in preconditioned GMRES. In this algorithm, the restriction, prolongation and smoothing operators are thoroughly studied, and the convergence and computational complexity are analyzed in detail. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm can greatly improve the convergence rate compared with MG, GMRES and Richardson iteration.