

# 复合模糊命题中基于弱逻辑的拟三角模算子研究

李爱平 吴泉源

(国防科学技术大学计算机学院 长沙 410073)

**摘 要** 修正了  $f$  范数的概念,指出了符合弱逻辑关系的算子实际上是一种拟三角模算子中的 Uninorm 算子,接着给出了严格弱逻辑关系的拟三角模算子概念,在提出概念时,考虑了多维、基于单一数值和基于区间值以及加权的情况,并证明了符合弱逻辑关系的连续拟三角模算子是不存在的;给出了弱逻辑拟三角模算子的具体形式,给出了具体的四类弱逻辑关系的拟三角模算子,讨论了它们的性质,并进行了比较;定义了评价算子的边缘性测度和敏感性测度,对各算子进行了对比和评价.结果表明,文中给出的弱逻辑拟三角模算子可以在不同应用背景下,有效地处理不同类型的复合模糊命题真值运算,也可以在其它的模糊系统中有效处理多个模糊子集之间的聚集运算.

**关键词** 复合模糊命题;拟三角模算子;弱逻辑关系;边缘性测度;敏感性测度  
中图法分类号 TP18

## A Study of the Generalized Triangular Norm Based on Weak Logic in Compound Fuzzy Proposition

LI Ai-Ping WU Quan-Yuan

(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

**Abstract** During the development of fuzzy expert system and fuzzy control systems, we should deal with the aggregation atomic propositions in compound fuzzy propositions. Besides the common relationship of the atomic proposition, which is conjunction, disjunction and weighted average operator, there is an important weak logic operator. Firstly, the authors amend the definition of  $f$  norms in the paper appeared by An Shi-Hu; point out the weak logic operator is a generalized triangular norm, give the definition of weak logic generalized triangular norm operator and strict weak logic generalized triangular norm operator, including both numerical value and interval of numerical values, multi-dimension form operator are also discussed. The weights associated with the atomic proposition are also considered in the forms. Then a proof of continuous generalized triangular norm operator that associated with weak logic does not exist is provided. Secondly, the detail form generalized triangular norm operator based on weak logic is given, four types of generalized triangular norm operator based on weak logic are brought forward. Characteristics of the operators are discussed. Thirdly, two measures associated with the operators are defined, one is marginal measure and the other is sensitive measure. Based on the measure, the relationships of those operators and classical operators are evaluated and compared. The result shows that the operators offer a new method to aggregation of fuzzy atomic propositions (multi-fuzzy inputs in fuzzy control systems) in fuzzy environments.

**Keywords** compound fuzzy propositions; generalized triangular norm; weak logic; marginal measure; sensitive measure

## 1 引言

在模糊专家系统的复合模糊命题的各子命题之间以及模糊控制系统的多个模糊输入之间,除了存在析取、合取、加权平均关系<sup>[1]</sup>以及有序加权平均关系 OWA<sup>[2]</sup>之外,还存在着一种弱逻辑关系<sup>[3-4]</sup>.这是因为已存在的上述算子在计算各子命题的真值时,没有考虑各子命题在都偏真和都偏假时的算子的不同形式,如可能存在这样的需求,两个都偏真的子命题的聚合值不小于任何一个子命题的真值,而两个都偏假的子命题的聚合值不大于任何一个子命题的真值,一个偏真一个偏假时的聚合值在它们真值之间.弱逻辑关系算子则是描述这样一种关系的算子,如营养专家系统中,存在这样的规则:

若患者症状含有脚气病、头痛失眠、食欲不振,则患者缺乏维生素 A.

专家分析时,认为这几个症状都是导出结论的证据,它们之间既不是单纯的合取或析取关系,又不是加权平均关系,文献[3-4]给出的弱逻辑关系及其运算对该类问题的解决获得了令人满意的结果.

文献[3]在提出了算子的基本概念后,给出了一个具体的算子,但是给出的算子不能满足结合性,因此不能推广到多维的情况.文献[4]将文献[3]提出的算子概念进行了修正,并进行了抽象,提出了基于单一数值和区间值表示的弱逻辑关系的弱范数( $f$ 范数和  $f$ -范数)概念,对算子进行了理论上的研究,取得了非常好的结果.但是,文献[4]提出的  $f$  范数不满足单调性,而且没有考虑各子命题的权重的情况.本文对算子的性质进一步进行探讨,指出弱逻辑关系算子实质上是一种拟三角模算子,并证明了连续的弱逻辑关系算子是不存在的.然后给出了基于单一数值和基于区间值表示模糊命题的弱逻辑拟三角模算子和弱逻辑拟三角模算子的一般形式,讨论了它们的性质并给出了具体形式,并考虑了子命题具有不同权重的情况.本文进一步定义了评价算子的边缘性测度和敏感性测度,给出了构造符合弱逻辑关系拟三角模算子的方法,并比较了不同算子之间的关系.本文给出了模糊集合上的一类新的拟三角模聚集算子,并讨论了它们的性质,这对于模糊子命题之间、模糊控制系统的多输入之间以及多 Agent 系统的模糊决策等问题的研究,提供了一种新的选择,可以有效处理具有不同类型的弱逻辑关系符合模糊命题的真值运算.

## 2 弱逻辑拟三角模算子

### 2.1 算子的定义和性质

**定义 1**<sup>[5]</sup>. 映射  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  称作一个拟三角模,如果满足条件

$$(t.1) \quad T(0, 0) = 0, T(1, 1) = 1;$$

$$(t.2) \quad T(x, y) = T(y, x);$$

$$(t.3) \quad (x \leq x', y \leq y') \Rightarrow T(x, y) \leq T(x', y');$$

$$(t.4) \quad T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)),$$

如果拟三角模  $T$  还满足条件

$$(t.1') \quad T(x, 1) = x,$$

则称之为三角模算子(Triangular norms, 简称为 T-norms);若满足条件

$$(t.1'') \quad T(x, 0) = x,$$

则称之为余三角模算子(Triangular connorms, 简称为 T-connorms).

显然,  $(t.1')$  或  $(t.1'') \Rightarrow (t.1)$ .

当拟三角模算子、三角模算子、余三角模算子为连续函数时,分别称为连续的拟三角模算子、连续的三角模算子、连续的余三角模算子.

显见,  $\min, \max$  算子分别是连续的三角模算子和余三角模算子.

**定义 2.** 映射  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  是一个拟三角模算子,如果还满足条件

$$(t.5) \quad T(x, 0.5) = x;$$

$$(t.6)$$

$$T(x, y) \geq x \text{ 且 } T(x, y) \geq y, \text{ 若 } x, y \in (0.5, 1];$$

$$T(x, y) \leq x \text{ 且 } T(x, y) \leq y, \text{ 若 } x, y \in [0, 0.5];$$

$$T(x, y) \geq x \text{ 且 } T(x, y) \leq y, \text{ 若 } x \in [0, 0.5], y \in (0.5, 1],$$

则称映射  $T$  为弱逻辑拟三角模算子.实际上,弱逻辑拟三角模算子是 Yager 在文献[1]提出的 Uninorm 算子的一个特例,Uninorm 算子的幺元可定义为  $[0, 1]$  中的任一实数,在实际应用中,一般应用最广泛的是 0 和 1,关于这方面的文献也非常多.但在实际应用中,当幺元为 0.5 时,其同样有着重要的意义,但这方面的研究就非常少,本文就该种情况详细展开讨论.

若将条件(t.6)中的不等式定义成严格的,即

$$(t.6')$$

$$T(x, y) > \max(x, y), \text{ 当 } \max(x, y) < 1 \text{ 时, 否则}$$

$$T(x, y) = 1, \text{ 若 } x, y \in (0.5, 1];$$

$$T(x, y) < \min(x, y), \text{ 当 } \min(x, y) > 0 \text{ 时, 否则}$$

$T(x, y) = 0$ , 若  $x, y \in [0, 0.5)$ ;  
 $T(x, y) > x$  且  $T(x, y) < y$ , 若  $x \in (0, 0.5)$ ,  
 $y \in (0.5, 1)$ ,

则称映射  $T$  为严格的弱逻辑拟三角模算子.

弱逻辑拟三角模算子的两个约束的语义解释如下:

(1)  $T(x, 0.5) = x$ , 即取值为  $[0, 1]$  间的任何真值与 0.5 (真假完全未知) 的真值聚集运算结果还是其本身.

(2)  $T(x, y) \geq x$  且  $T(x, y) \geq y$ , 若  $x, y \in (0.5, 1]$ , 即两个较真变量的聚集运算结果大于其中任何一个值;  $T(x, y) \leq x$  且  $T(x, y) \leq y$ , 若  $x, y \in [0, 0.5)$ , 即两个较假变量的聚集运算结果小于其中任何一个值;  $T(x, y) \geq x$  且  $T(x, y) \leq y$ , 若  $x \in [0, 0.5)$ ,  $y \in (0.5, 1]$ , 即一个较假变量与一个较真变量的运算结果值在它们两个值之间.

注. 文献[4]中的定义 2 中弱逻辑组合范数(简称  $f$  范), 没有考虑单调性(t.3), 因此不是一个拟三角模算子, 下面给出一个  $f$  范数的例子, 说明不考虑单调性的不合理之处.

**命题 1.** 对  $\forall x, y \in [0, 1]$ , 定义  $T_f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  如下:

$$T_f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}, & x \text{ 或 } y = 0.5 \\ 1, & x, y \in (0.5, 1] \text{ 且 } (x, y) \neq (0.9, 0.9) \\ 0.9, & (x, y) = (0.9, 0.9) \\ \min(x, y), & \text{其它} \end{cases}$$

则  $T_f$  是文献[4]中的  $f$  范.

证明略.

因为有  $T_f(0.9, 0.9) < T_f(0.51, 0.51)$ , 这显然在很多情况下是不合理的.

下面证明连续的拟三角模算子是不存在的.

**引理 1.** 任一连续的拟三角模算子  $T$  必可表示为如下形式: 对于  $\forall x, y \in [0, 1]$ ,

$$T(x, y) = \begin{cases} T_V(x, y), & (x, y) \in [0, \lambda] \\ T_\wedge(x, y), & (x, y) \in (\lambda, 1] \\ \lambda, & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\lambda = T(0, 1)$ ,  $T_V, T_\wedge$  分别为某个连续的余三角模算子、三角模算子.

证明略.

**定理 1.** 符合弱逻辑关系的连续拟三角模算子  $\tilde{T}$  是不存在的.

证明. 假设存在符合弱逻辑关系的连续拟三

角模算子  $\tilde{T}$ , 则根据引理 1,  $\tilde{T}$  可表示为如下的形式:

对于  $\forall x, y \in [0, 1]$ ,

$$\tilde{T}(x, y) = \begin{cases} T_V(x, y), & (x, y) \in [0, \lambda] \\ T_\wedge(x, y), & (x, y) \in (\lambda, 1] \\ \lambda, & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\lambda = \tilde{T}(0, 1)$ ,  $T_V, T_\wedge$  分别为某个连续的余三角模算子、三角模算子.

当  $\lambda = 0$  或 1 时, 则  $\tilde{T}$  分别为三角模算子和余三角模算子, 显然不成立.

当  $\lambda \neq 0$  或 1 时, 则有当  $(x, y) \in [0, \lambda]$  时,  $\tilde{T}(x, y) = T_V(x, y)$ , 取  $\xi \in (0, \lambda]$ , 则  $\tilde{T}(\xi, 0) = T_V(\xi, 0) = \xi > 0$ , 这与弱逻辑算子的条件(t.6)矛盾. 所以不存在符合弱逻辑关系的连续拟三角模算子  $\tilde{T}$ .

证毕.

虽然符合弱逻辑关系的拟三角模算子在  $[0, 1]$  上不连续, 但是, 当它在  $[0, 1]$  上只有有限个间断点时, 譬如说 0, 1 等, 在实际应用中还是非常有意义的.

## 2.2 多维弱逻辑拟三角模算子

为了适应多个模糊子命题、模糊子集的运算, 在很多场合下需要采用多维三角模. 与之相对应, 也要给出符合弱逻辑关系的多维拟三角模算子.

在  $[0, 1]^m$  中引入偏序“ $\leq$ ”: 对任意  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m), Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in [0, 1]^m, X \leq Y$  iff  $(\forall j)(x_j \leq y_j)$ .

作 4 个变换  $p_i, q_i, r_i, \sigma_{ij}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ :

$$p_i(X) \triangleq (1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1),$$

$$q_i(X) \triangleq (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0),$$

$$r_i(X) \triangleq (0.5, \dots, 0.5, x_i, 0.5, \dots, 0.5),$$

$$\sigma_{ij}(X) \triangleq \sigma_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m) \triangleq (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m).$$

**定义 3**<sup>[5]</sup>. 映射  $T_m: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  称为一个  $m$  维拟三角模, 如果满足下列条件

$$(T.1) \quad T_m(0, \dots, 0) = 0, T_m(1, \dots, 1) = 1;$$

$$(T.2) \quad T_m(\sigma_{ij}(X)) = T_m(X);$$

$$(T.3) \quad X \leq Y \Rightarrow T_m(X) \leq T_m(Y);$$

(T.4) 对任何  $X = (x_1, \dots, x_m), Y = (x_m, \dots, x_{2m-1})$ , 有

$$T_m((T_m(X), x_{m+1}, \dots, x_{2m-1})) =$$

$$T_m(x_1, \dots, x_{m-1}, T_m(Y)).$$

显然  $T_2$  是通常的(二维的)拟三角模.  $m$  维拟三角模  $T_m$  若还满足条件

$$(T.1') \quad T_m(p_i(X)) = x_i,$$

则称  $T_m$  为  $m$  维三角模; 若满足条件

$$(T.1'') T_m(q_i(\mathbf{X})) = x_i,$$

则称  $T_m$  为  $m$  维余三角模。

当  $m$  维拟三角模,  $m$  维三角模,  $m$  维余三角模为连续函数时, 分别称之为连续的  $m$  维拟三角模, 连续的  $m$  维三角模, 连续的  $m$  维余三角模。

**定义 4.** 映射  $T_m: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  为一个  $m$  维拟三角模, 如果还满足下列条件

$$(T.5) T_m(r_i(\mathbf{X})) = x_i;$$

$$(T.6)$$

当  $r_i(\mathbf{X}) \neq \mathbf{X}$  时;

$$T_m(x_1, \dots, x_m) \geq \max_i(x_i), \text{ 若 } \min_i(x_i) \geq 0.5;$$

$$T_m(x_1, \dots, x_m) \leq \min_i(x_i), \text{ 若 } \max_i(x_i) \leq 0.5;$$

$$T_m(x_1, \dots, x_m) \in [\alpha, \beta], \text{ 其中,}$$

若仅存在一个  $x_i \in [0, 0.5)$ , 则  $\alpha = x_i$ ; 否则  $\alpha = 0$ ;

若仅存在一个  $x_i \in (0.5, 1]$ , 则  $\alpha = x_i$ ; 否则  $\alpha = 1$ 。

则称映射  $T_m$  为  $m$  维弱逻辑拟三角模算子。若将 (T.6) 中的不等式定义成严格的, 即

$$(T.6')$$

当  $r_i(\mathbf{X}) \neq \mathbf{X}$  时;

$$\max_i(x_i) < T_m(x_1, \dots, x_m) \leq 1, \text{ 若 } \min_i(x_i) \geq 0.5;$$

$$0 \leq T_m(x_1, \dots, x_m) < \min_i(x_i), \text{ 若 } \max_i(x_i) \leq 0.5;$$

若仅存在一个  $x_i \in [0, 0.5)$ , 并且  $x_i > 0$ , 则  $T_m(x_1, \dots, x_m) > x_i$ ;

若仅存在一个  $x_j \in (0.5, 1]$ , 并且  $x_j < 1$ , 则  $T_m(x_1, \dots, x_m) > x_j$ 。

则称映射  $T_m$  为  $m$  维的严格弱逻辑拟三角模算子。

若  $T_m$  满足条件

$$(T.7) \text{ 存在弱逻辑拟三角模 } T_r, T_{m-r}, T_2, 2 \leq m < r, \text{ 使得}$$

$$T_m(\mathbf{X}) = T_2(T_r(x_1, \dots, x_r), T_{m-r}(x_{r+1}, \dots, x_m)),$$

则称  $T_m$  为可化约的  $m$  维弱逻辑拟三角模;

若  $T_m$  满足条件

$$(T.8) \text{ 存在弱逻辑拟三角模 } T_2, \text{ 使得}$$

$$T_m(\mathbf{X}) = T_2(T_2(\dots T_2(T_2(x_1, x_2), x_3) \dots, x_{m-1}), x_m),$$

则称  $T_m$  为完全可化约的  $m$  维弱逻辑拟三角模。

由于二维弱逻辑的拟三角模算子符合结合律, 因此, 可以很方便地通过结合运算构造出一个完全可化约的  $m$  维弱逻辑拟三角模算子。所以, 在讨论每个二维弱逻辑的拟三角模算子时, 至少可以保证构造出一个与之相对应的  $m$  维弱逻辑拟三角模算子。仿定理 1 证明方法可证明定理 2。

**定理 2.** 符合弱逻辑关系的连续  $m$  维拟三角模算子  $\tilde{T}_m$  是不存在的。

### 2.3 加权弱逻辑拟三角模算子和区间值弱逻辑拟三角模算子

借鉴文献[3,6]中考虑子命题的权重的计算方法和文献[4]中将弱逻辑范数在区间值上的计算方法, 下面分别给出加权弱逻辑拟三角模算子的定义和区间值弱逻辑拟三角模算子的定义。

**定义 5.** 向量  $\mathbf{v} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  称作  $m$  维权重向量当且仅当  $\omega_i \in [0, 1]$  且  $\sum_i \omega_i = 1$ 。

**定义 6.** 映射  $T_m: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  为一个  $m$  维弱逻辑拟三角模算子, 向量  $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  为  $m$  维权重向量, 则  $m$  维加权弱逻辑拟三角模算子  $T_m^w: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  定义如下:

$$T_m^w(x_1, \dots, x_m) = T_m(x_1^w, \dots, x_m^w),$$

$$\text{其中, } x_i^w = \begin{cases} 0.5 + (x_i - 0.5) \times \frac{\omega_i}{\omega_{\max}}, & x_i \geq 0.5 \\ 0.5 - (0.5 - x_i) \times \frac{\omega_i}{\omega_{\max}}, & x_i < 0.5 \end{cases},$$

$$\omega_{\max} = \max_i \{\omega_i\}.$$

模糊命题的真值表示方法除了单一数值外, 还有区间值、模糊数、语言真值等表示方法<sup>[7]</sup>。下面将在文献[4]的基于区间值表示的弱逻辑关系的弱范数( $f$ -范数)概念基础上, 给出基于区间值表示的弱逻辑拟三角模算子。

记  $I[0, 1] = \{\bar{a} = [a^-, a^+] \mid 0 \leq a^- \leq a^+ \leq 1\}$ , 在  $I[0, 1]$  上引入偏序包含于  $\subseteq$ , 定义为

对  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in I[0, 1], \bar{a} \subseteq \bar{b}$  当且仅当  $a^- \geq b^-$  且  $a^+ \leq b^+$ 。

$I[0, 1]$  上的小于等于“ $\leq$ ”定义为

对  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in I[0, 1], \bar{a} \leq \bar{b}$  当且仅当  $a^- \leq b^-$  且  $a^+ \leq b^+$ 。

另外, 记  $I[0, 1]^m = \{\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \mid \bar{x}_i \in I[0, 1]\}$ 。若  $\bar{x}_i \in I[0, 1]$  为常量, 即  $\bar{c} \in I[0, 1], c$  为常量, 则  $\bar{c} = [c, c]$ , 如  $\bar{0} = [0, 0], \bar{1} = [1, 1], \bar{0.5} = [0.5, 0.5]$ 。

$$\bar{p}_i(\bar{\mathbf{X}}) \triangleq (\bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{x}_i, \bar{1}, \dots, \bar{1});$$

$$\bar{q}_i(\bar{\mathbf{X}}) \triangleq (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{x}_i, \bar{0}, \dots, \bar{0});$$

$$\bar{r}_i(\bar{\mathbf{X}}) \triangleq (\bar{0.5}, \dots, \bar{0.5}, \bar{x}_i, \bar{0.5}, \dots, \bar{0.5});$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(\bar{\mathbf{X}}) \triangleq \bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m) \triangleq (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_j, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{j+1}, \dots, \bar{x}_m).$$

在  $I[0, 1]^m$  中引入偏序小于等于“ $\leq_I$ ”: 对任意  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m), \bar{\mathbf{Y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) \in [0, 1]^m, \bar{\mathbf{X}} \leq_I \bar{\mathbf{Y}}$  iff  $(\forall j)(\bar{x}_j \leq \bar{y}_j)$ 。

如文献[4]中所述,现有文献中对基于区间值表示的模糊命题的基本运算:合取和析取,大都作为普通模糊命题的推广来定义的,设命题  $P$  的真值  $\bar{a} = [a^-, a^+]$ , 命题  $Q$  的真值  $\bar{b} = [b^-, b^+]$ , 则合取、析取运算如下:

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = [\min(a^-, b^-), \min(a^+, b^+)],$$

$$\bar{a} \vee \bar{b} = [\max(a^-, b^-), \max(a^+, b^+)].$$

若复合命题的子命题之间不具有典型的合取和析取关系,而是具有弱逻辑组合关系时,则上式给出的运算不能满足要求,因此,下面给出  $I[0, 1]$  上的区间值弱逻辑拟三角模算子的定义.

**定义 7.** 映射  $T_m^l: I[0, 1]^m \rightarrow I[0, 1]$  称为一个  $m$  维区间值拟三角模, 如果满足下列条件

$$(T.1) T_m^l(\bar{0}, \dots, \bar{0}) = \bar{0}, T_m^l(\bar{1}, \dots, \bar{1}) = \bar{1};$$

$$(T.2) T_m^l(\bar{\sigma}_{ij}(\bar{X})) = T_m^l(\bar{X});$$

$$(T.3) \bar{X} \leq \bar{Y} \Rightarrow T_m^l(\bar{X}) \leq T_m^l(\bar{Y});$$

(T.4) 对任何  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m), \bar{Y} = (\bar{x}_m, \dots, \bar{x}_{2m-1})$ , 有

$$T_m(T_m(\bar{X}), \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{2m-1}) = \bar{T}_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}, T_m(\bar{Y})).$$

$m$  维区间值拟三角模  $T_m^l$  若还满足条件

$$(T.1') T_m(\bar{p}_i(\bar{X})) = \bar{x}_i,$$

则称  $T_m^l$  为  $m$  维区间值三角模; 若满足条件

$$(T.1'') \bar{T}_m(\bar{q}_i(\bar{X})) = \bar{x}_i,$$

则称  $T_m^l$  为  $m$  维区间值余三角模.

**定义 8.** 映射  $T_m^l: [0, 1]^m \rightarrow I[0, 1]$  为一个  $m$  维区间值拟三角模, 如果还满足下列条件

$$(T.5) T_m^l(\bar{r}_i(\bar{X})) = \bar{x}_i;$$

(T.6)

$$T_m^l(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \geq [\max_i(x_i^-), \max_i(x_i^+)],$$

若  $\min_i(x_i^-) \geq 0.5$ ;

$$T_m^l(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \leq [\min_i(x_i^-), \min_i(x_i^+)],$$

若  $\max_i(x_i^+) \leq 0.5$ ;

$$T_m^l(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = [\alpha, \beta], \text{ 其中, } \alpha = T_m(x_1^-, \dots,$$

$x_n^-), \beta = T_m(x_1^+, \dots, x_n^+), T_m$  为  $m$  维弱逻辑拟三角模算子, 其它情况.

则称映射  $T_m^l$  为  $m$  维弱逻辑区间值拟三角模算子.

### 3 具体的弱逻辑拟三角模算子及构造方法

上一节中给出了弱逻辑拟三角模算子的定义和

性质, 下面给出一些具体的算子, 并给出构造算子的一般方法. 下面的阐述中, 由于定义 2 中的 2 维弱逻辑拟三角模算子的是定义 4 中的  $m$  维弱逻辑拟三角模算子特例, 给出  $m$  维弱逻辑拟三角模算子的具体形式, 由定义 4 和定义 6, 7 知, 可以很方便地进一步得出定义 6 和定义 7 中的弱逻辑拟三角模算子. 由于篇幅关系, 下面几个定理的证明都略去, 有兴趣的读者可以进一步与作者联系.

**定理 3.** 符合如下形式的映射: 对  $\forall \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m, T_m^{\min}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ ,

$$T_m^{\min}(\mathbf{X}) = \begin{cases} x_i, & \mathbf{X} = r_i(\mathbf{X}) \\ \max_i(x_i) + \lambda \cdot (1 - \max_i(x_i)), & (\forall i)x_i \in [0.5, 1] \text{ 且 } \mathbf{X} \neq r_i(\mathbf{X}), \\ \eta \cdot \min_i(x_i), & (\forall i)x_i \in [0, 0.5] \text{ 且 } \mathbf{X} \neq r_i(\mathbf{X}) \\ \min_i(x_i), & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\lambda, \eta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, m\}$ .

是  $m$  维的弱逻辑拟三角模算子.

证明略.

显然算子  $T_m^{\min}$  有性质:

$$(1) T_2^{\min}(0, 1) = 0.$$

(2)  $T_m^{\min}$  算子是完全可以化约的.

由定理 3 可得出, 当  $\lambda, \eta$  分别取 0, 1 值, 可以得到 4 个  $m$  维弱逻辑拟三角模算子. 与定理 3 类似, 可以得出如下定理.

**定理 4.** 符合如下形式的映射: 对  $\forall \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m, T_m^{\max}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ ,

$$T_m^{\max}(\mathbf{X}) = \begin{cases} x_i, & \mathbf{X} = r_i(\mathbf{X}); \\ \max_i(x_i) + \lambda \cdot (1 - \max_i(x_i)), & (\forall i)x_i \in [0.5, 1] \text{ 且 } \mathbf{X} \neq r_i(\mathbf{X}), \\ \eta \cdot \min_i(x_i), & (\forall i)x_i \in [0, 0.5] \text{ 且 } \mathbf{X} \neq r_i(\mathbf{X}) \\ \max_i(x_i), & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\lambda, \eta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, m\}$ .

是  $m$  维的弱逻辑拟三角模算子.

显然算子  $T_m^{\max}$  有性质:

$$(1) T_2^{\max}(0, 1) = 1.$$

(2)  $T_m^{\max}$  算子是完全可以化约的.

同样, 由定理 4 可得出, 当  $\lambda, \eta$  分别取 0, 1 值, 可以得到 4 个  $m$  维弱逻辑拟三角模算子.

由上面的定理 3, 4 可以得出, 构造弱逻辑拟三

角模算子时,首先要让算子满足性质(T.5), (T.6), 然后在构造的时候,要让其满足(T.3), (T.4). 因为定理 3,4 中的算子都不是严格的弱逻辑拟三角模算子,虽然可以适合很多情况下的聚集运算. 但是,有些情况下,需要严格的弱逻辑算子,下面构造严格的弱逻辑拟三角模算子.

**定理 5.** 符合如下形式的映射:对  $\forall \mathbf{X}=(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m, T_m^{\Pi}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ ,

$$T_m^{\Pi}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \lambda, & \min_{i=1}^m(x_i) = 0 \text{ 且 } \max_{i=1}^m(x_i) = 1 \\ \frac{\prod_{i=1}^m x_i}{\prod_{i=1}^m x_i + \prod_{i=1}^m (1-x_i)}, & \text{其它} \end{cases},$$

其中,  $\lambda=0$  或者 1.

是  $m$  维的严格弱逻辑拟三角模算子.

证明略.

容易验证算子  $T_m^{\Pi}$  有如下性质:

- (1)  $T_m^{\Pi}$  算子是完全可化约的.
- (2)  $T_2^{\Pi}(0, 1) = 0$  或 1.

同样,由定理 5 可得出,当  $\lambda$  分别取 0, 1 值,可以得到 2 个  $m$  维的严格弱逻辑拟三角模算子.

因为定理 3~5 中的算子分别有  $T_2(0, 1) = 0$  或  $T_2(0, 1) = 1$ , 即完全为假(真值为 0)与完全为真(真值为 1)的运算值是完全为真或完全为假,虽然可以适合很多情况下的聚集运算. 但是,有些情况下,需要  $T_2(0, 1) = 0.5$  这样的算子,即完全为假(真值为 0)与完全为真(真值为 1)的运算值是真假完全未知(真值为 0.5),下面构造这样的弱逻辑拟三角模算子.

为方便记,  $\exists k \in \{2, \dots, m\}, x_{k-1} \leq 0.5, x_k > 0.5$  时,作如下变换  $s: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ ,

$$s(x_1, \dots, x_m) = (x'_1, \dots, x'_{k-1}, x'_k, \dots, x'_m),$$

满足:

- (i)  $x'_i \leq x'_{i+1}, i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ;
- (ii)  $x'_k > 0.5$ , 并且  $x'_{k-1} \leq 0.5$ .

**定理 6.** 符合如下形式的映射:对  $\forall \mathbf{X}=(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m, T_m^{\Pi}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ ,

$$T_m^*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 - 2^{m-1} \cdot \prod_{i=1}^m (1-x_i), & (\forall i \in \{1, \dots, m\}) x_i \geq 0.5 \\ 2^{m-1} \cdot \prod_{i=1}^m x_i, & (\forall i \in \{1, \dots, m\}) x_i \leq 0.5 \\ \frac{\varphi + \gamma - 1}{1 - \min(1 - 2\varphi, 2\gamma - 1)} + \frac{1}{2}, & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\varphi = 2^{k-2} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} x'_i, \gamma = 1 - 2^{m-k} \cdot \prod_{i=k}^m (1-x'_i) + 1$ ,

$\mathbf{X}' = s(\mathbf{X}) = (x'_1, \dots, x'_{k-1}, x'_k, \dots, x'_m), x'_k > 0.5, x'_{k-1} \leq 0.5$ , 特别地,当  $\varphi=0, \gamma=1$  时,令  $T_m^*(\mathbf{X}) = 0.5$ .

是  $m$  维的严格弱逻辑拟三角模算子.

证明略.

显然算子  $T_m^*$  有性质:

- (1)  $T_2^*(x, y) = 0.5$ , 当  $x + y = 1$  时,特别地,  $T_2^*(0, 1) = 0.5$ ;
- (2)  $T_m^*$  算子是完全可化约的.

下面表 1 就各算子的二维形式在  $[0, 1]^2$  区间上一些典型值的运算结果进行比较. 其中,  $\min$  和  $\max$  算子分别是取小和取大算子,  $\text{mean}$  算子是加权平均算子, 权重向量为  $\mathbf{v}=(0.5, 0.5)$ .

表 1 各算子的运算结果比较

输入值	$T^{\min}$			$T^{\max}$				$T^{\Pi}$		$T^*$
	min	max	mean	$\lambda=0, \eta=0$	$\lambda=0, \eta=1$	$\lambda=1, \eta=0$	$\lambda=1, \eta=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1$	
(0, 0.2)	0	0.2	0.1	0	0	0	0	0	0	0
(0, 0.5)	0	0.5	0.25	0	0	0	0	0	0	0
(0, 0.7)	0	0.7	0.35	0	0	0	0	0.7	0.7	0
(0, 1)	0	1	0.5	0	0	0	0	1	1	0.5
(0.2, 0.3)	0.2	0.3	0.25	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0
(0.2, 0.5)	0.2	0.5	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
(0.2, 0.8)	0.2	0.8	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.8	0.8	0.5
(0.3, 0.9)	0.3	0.9	0.6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.9	0.9	0.75
(0.2, 1)	0.2	1	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2	1	1	1
(0.5, 0.7)	0.5	0.7	0.65	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
(0.5, 1)	0.5	1	0.75	1	1	1	1	1	1	1
(0.7, 0.8)	0.7	0.8	0.75	0.8	0.8	1	1	0.8	0.8	0.9
(0.7, 1)	0.7	1	0.85	1	1	1	1	1	1	1

由表 1 的运算结果可知,  $\min$  和  $\max$  算子过分强调了各因子的局部性而没有考虑全局性, 而加权平均算子则过分强调了各因子的全局性而没有考虑因子的局部性. 而弱逻辑拟三角模算子则整体考虑了因子的局部性和全局性, 其中不同的  $T^{\min}$  算子和  $T^{\max}$  算子可以认为是  $\min$  和  $\max$  算子考虑全局性后的不同形式, 而严格弱逻辑拟三角模算子  $T^{\square}$  算子和  $T^*$  算子则综合考虑了全局性和局部性. 图 1 是

本文提出的弱逻辑拟三角模算子与经典算子三维图形的比较, 从图形对比中可以看出,  $T^{\square}$  算子和  $T^*$  算子的光滑程度和坡度都从不同角度上弥补了经典算子在模糊聚集运算方面的不足. 因此, 本文提出的弱逻辑拟三角模算子可以弥补单纯的  $\min$  和  $\max$  算子以及加权平均算子不能适合的场合, 是一个极好的补充.

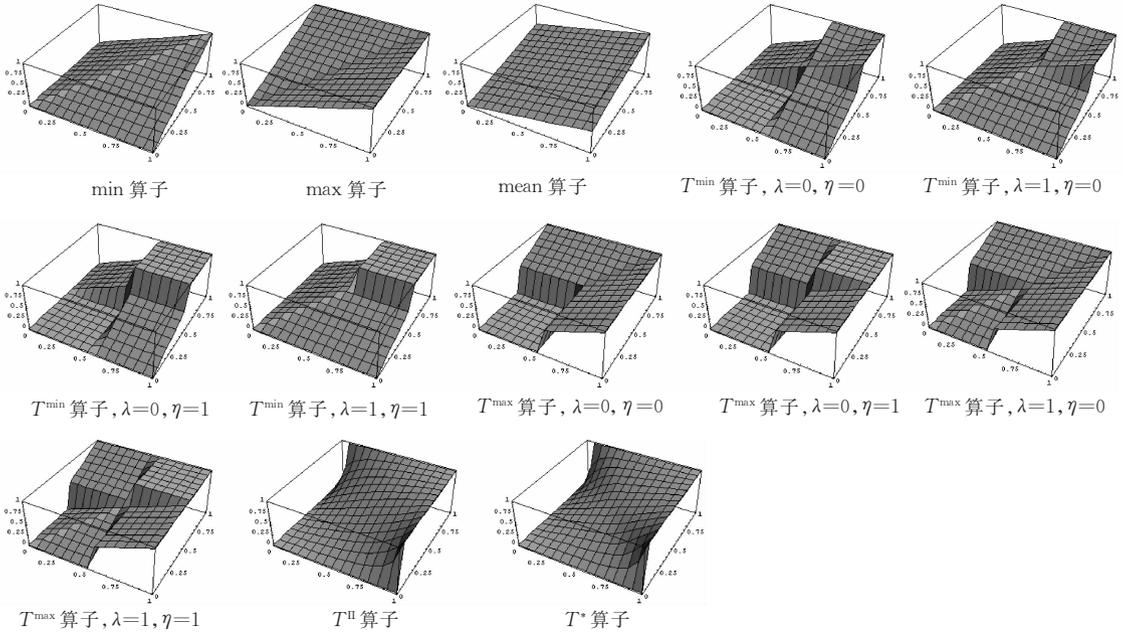


图 1 经典算子与各调和三角模算子之间的图形比较

### 4 弱逻辑拟三角模算子的测度和评价

在上一节给出了弱逻辑拟三角模算子的具体形式并给出了构造方法, 下面对拟三角模算子定义两个测度, 从而可在选择不同算子时进行方便评估.

一般说来, 如果有两个二维拟三角模算子  $T^1$  和  $T^2$ , 在  $(x_0, y_0)$  处如果有  $|T^1(x_0, y_0) - 0.5| > |T^2(x_0, y_0) - 0.5|$ , 称在  $(x_0, y_0)$  处算子  $T^1$  的边缘性强于算子  $T^2$ .

因为拟三角模算子在  $[0, 1]^m$  区间上有界并且单调递增, 根据黎曼积分定理可知拟三角模算子在

$[0, 1]^m$  区间上可以进行定积分.

**定义 9.**  $m$  维拟三角模算子  $T_m: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  的边缘性测度为

$$M(T_m) = \int_{x_i=0}^1 |T_m(x_1, \dots, x_m) - 0.5| dx_i.$$

上式中的含义为算子的值与 0.5 的差的绝对值在每个因子  $x_i \in [0, 1]$  上的卷积积分. 特别地, 如果  $m=2$  时, 有

$$M(T_2) = \int_0^1 \int_0^1 |T_2(x, y) - 0.5| dx dy.$$

显然, 如果一算子的边缘性测度越大, 说明它越靠近 0 或 1, 表明该算子的计算结果越清晰化. 表 2 是表 1 中的各二维算子的边缘性测度.

表 2 各算子的边缘性测度的比较

	$T^{\min}$			$T^{\max}$				$T^{\square}$		$T^*$				
	$\min$	$\max$	$\text{mean}$	$\lambda=0, \eta=0$	$\lambda=0, \eta=1$	$\lambda=1, \eta=0$	$\lambda=1, \eta=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1$					
$M(T)$	0.25	0.25	0.167	0.33	0.375	0.29	0.33	0.33	0.375	0.29	0.33	0.307	0.307	0.3125

由表 2 比较可知, 各二维拟三角模算子的边缘性测度均大于通常的  $\min, \max$  和  $\text{mean}$  算子, 其中

$T^{\min}$  和  $T^{\max}$  算子在当  $\lambda, \eta$  分别取 0, 1 值时, 边缘性测度取得最大值 0.375. 而光滑性比较好的  $T^*$  算子

边缘性测度稍大于  $T^{\text{u}}$  算子, 加权平均算子的边缘性测度最低. 实际上, 边缘性测度是算子的局部性能方面的一个评价和测度.

下面引入另一个拟三角模算子的另一个测度, 即敏感性测度. 经典的 mean 算子在每一个因子改变时, 结果也随之改变, 也就是考虑因子的全局性方面比较好, 而 min, max 算子则不然. 希望算子在  $[0, 1]^m$  区间上可以随着某一个因子的改变而均衡改变, 即可从  $[0, 0]^m$  上取值为 0 均衡的变化到  $[1, 1]^m$  的 1. 敏感性测度实际上也是算子的全局性能方面的一个评价和测度.

**定义 10.**  $m$  维拟三角模算子  $T_m: [0, 1]^m \rightarrow$

$[0, 1]$  的敏感性测度为

$$S(T_m) = - \oint_{x_i} \frac{1}{0} |T_m(x_1, \dots, x_m) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i| dx_i.$$

上式中的含义为算子的值与  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$  的差的绝对值在每个因子  $x_i \in [0, 1]$  上的卷积积分. 特别地, 如果  $m=2$  时, 有

$$S(T_2) = - \int_0^1 \int_0^1 |T_2(x, y) - \frac{1}{2}(x+y)| dx dy.$$

显然, 如果一算子的敏感性测度越大, 说明它越靠近平均平面, 表明该算子的计算结果越敏感, 即全局性越好. 表 3 是表 1 中各二维算子的敏感性测度.

表 3 各算子的敏感性测度的比较

	min	max	mean	$T^{\text{min}}$				$T^{\text{max}}$				$T^{\text{u}}$		$T^*$
				$\lambda=0, \eta=0$	$\lambda=0, \eta=1$	$\lambda=1, \eta=0$	$\lambda=1, \eta=1$	$\lambda=0, \eta=0$	$\lambda=0, \eta=1$	$\lambda=1, \eta=0$	$\lambda=1, \eta=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1$	
$S(T)$	-0.17	-0.17	0	-0.21	-0.25	-0.29	-0.21	-0.17	-0.25	-0.17	-0.21	-0.141	-0.141	-0.146

由表 3 比较可知, 加权平均算子 mean 算子的敏感性测度最高, 即全局性最好, 这也是符合实际意义的. 其中  $T^{\text{min}}$  和  $T^{\text{max}}$  算子的敏感性测度相对来说比较高, 全局性不是很好, 这也与它们的函数不是很光滑相符, 在当  $\lambda, \eta$  分别取 0, 1 值时, 敏感性测度取得最大值. 而光滑性比较好的  $T^*$  算子敏感性测度稍小于  $T^{\text{u}}$  算子, 它们的敏感性测度均大于 min, max 算子.

通过与表 2 的比较, 说明敏感性测度与边缘性测度是互相矛盾的一对测度, 即算子的局部性越好, 则全局性越差, 反之亦然, 加权平均算子 mean 算子的局部性最差, 而全局性最好, 这与实际意义相符. 综合边缘性测度和敏感性测度折衷考虑,  $T^*$  算子和  $T^{\text{u}}$  算子局部性和全局性均好于 min, max 算子.

## 5 结束语

本文首先修正了文献[4]中的 f 范数的概念, 指出了符合弱逻辑关系的算子实际上是一种拟三角模算子 Uninorm 的特例, 并提出了严格弱逻辑关系的拟三角模算子概念, 在提出概念时, 考虑了多维、基于单一数值和基于区间值以及加权的情况, 并证明了符合弱逻辑关系的连续拟三角模算子是不存在的. 接着, 本文给出了弱逻辑拟三角模算子的具体形式, 提出了具体的四类弱逻辑关系的拟三角模算子, 讨论了它们的性质, 并对它们进行了比较. 最后, 定义了评价算子的边缘性测度和敏感性测度, 对各算

子进行了比较和评价. 结果表明, 本文给出的弱逻辑拟三角模算子可以在不同应用背景下, 有效地处理具有不同类型的弱逻辑关系复合模糊命题的真值运算, 也可以在其它模糊系统中有效地处理多个模糊子集之间的聚集运算.

## 参 考 文 献

- [1] An Shi-Hu. On the weak norms of the compound fuzzy proposition. Chinese Journal of Computers, 2001, 24(20): 1071-1076(in Chinese)  
(安世虎. 复合模糊命题运算中的弱范数研究. 计算机学报, 2001, 24(20): 1071-107)
- [2] Su Chang et al. The feeble logic of the compound fuzzy proposition and its algorithm. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(3): 273-277(in Chinese)  
(苏 畅等. 复合模糊命题的弱逻辑关系及其运算方法. 计算机学报, 2000, 23(3): 273-277)
- [3] He Xin-Gui. Weighted fuzzy logic and its application in different fields. Chinese Journal of Computers, 1989, 12(6): 458-464(in Chinese)  
(何新贵. 加权模糊逻辑及其广泛应用. 计算机学报, 1989, 12(6): 458-464)
- [4] Yager R R, Rybalov A. Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80: 111-120
- [5] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190
- [6] Wang Pei-Zhuang et al. Fuzzy System Theory and Fuzzy Computer. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese)

(汪培庄等. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京: 科学出版社, 1996)

- [7] Liu Chun-Wu et al. A new algorithm to the truth value and its information amount of compound fuzzy proposition. *Journal of Software*, 1998, 9(11): 857-860(in Chinese)

(刘纯武等. 复合模糊命题的真值及其信息量计算的新方法. *软件学报*, 1998, 9(11): 857-860)

- [8] Erich P K et al. *Triangular norms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

- [9] Wu Quan-Yuan et al. *Artificial Intelligence and Expert System*. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1995(in Chinese)

(吴泉源等. *人工智能与专家系统*. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995)



**LI Ai-Ping**, born in 1974, Ph. D., associate researcher. His main research interests include artificial intelligence, expert system and fuzzy systems.

**WU Quan-Yuan**, born in 1942, professor. His main research interests include artificial intelligence, expert system and distributed computing.

## Background

This paper is based on the first author's doctor thesis which aimed enhancing the key techniques of new generation expert system.

Information fusion techniques and aggregation operators are commonly applied into several fields of fuzzy information systems. Because different fields imply different requirements, a large number of aggregation operators exist today. For example, triangular norm operator, triangular conorm operator, weighted mean operator, Ordered Weighted Averaging operator, Ordered Weighted Geometric operator, weighted operator and so on.

For T-norm and T-conorm are emphasized particularly on local detail information source, it may lose the global information. WM operator consider the global information, it will lose the local source information. The OWA operator generalized minimum and maximum and WM operators through permutation the truth-value of information source. But it does not solve considering the source global and local information at the same time, because the existent operators have not different aggregation method when the information source are all trend to true or all trend to false. For example, there is such situation, when the two source are trend to true, the aggregated value is not less than either of the

source truth value; otherwise, when the two source are trend to false, the aggregated value is not greater than either of the source truth value either. When one source is trend to true and the other is trend to false, the aggregation value is between them.

When define the identity of generalized triangular norm to 0 or 1, T-norms or T-conorms can be got. It is found that find when define the identity of generalized triangular norm to 0.5, a new kind of aggregation operators can be got, named to harmonic triangular norm. It can aggregate the source when they have weak logic relation, and it can solve considering both the information sources' global property and local property. To strengthen the monotonic in the definition, the authors defined strict harmonic triangular norm. The properties of the aggregation operators is discussed. The authors prove the continuous harmonic triangular norm operator does not exist. Four type detail (strict) harmonic triangular norm operators are given. Two measures associated with the operators are defined, one is marginal measure and the other is sensitive measure. The result shows that the operators offer a new method to aggregation of fuzzy information sources in fuzzy environments.