第 22 卷 第 4 期 应用数学学报 Vol. 22 No. 4
1999 年 10 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Oct., 1999

NA 样本回归函数估计的强相合性*

杨善朝

(广西师范大学数学与计算机科学系，桂林 541004)

王岳宝

(苏州大学数学科学院，苏州 215006)

摘 要 在 NA 相依样本下研究非参数回归函数加权核估计的相合性，获得了一些较弱的充分条件，与此同时对 NA 序列给出一个简洁实用的 Bernstein 型不等式

关键词 NA 样本，非参数回归，加权核估计，强相合性

1 引言与结论

称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geq 2)$ 是 NA 的，如果对于集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 A_1 与 A_2，都有

$$\operatorname{cov}\left(f_1(X_i;\, i \in A_1), f_2(X_j;\, j \in A_2)\right) \leq 0,$$

其中 f_1 与 f_2 是任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降 (或同为对每个变元均非升) 的函数. 称随机变量序列 $\{X_i;\, i \geq 1\}$ 是 NA 序列，如果对任何 $n \geq 2$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是 NA 的.

自 [1,2] 给出这种 NA 序列相依性概念以来，已有一些学者 [3-6] 研究了 NA 序列的极限性质，如中心极限定理，强大数律及完全收敛性等. 但在 NA 相依样本下研究具体的统计估计问题还是比较少，而 NA 相依概念在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析中有广泛的应用，因此本文在 NA 相依样本下讨论非参数回归函数加权核估计的相合性是有意义的.

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是在固定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个观察值，适合模型

$$Y_i = g(x_i) + \varepsilon_i, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{1.1}$$

其中 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的未知函数，且把 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 外的值定义为 0, $\{\varepsilon_i\}$ 是随机误差序列，且假定 $0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1$, Priestley 和 Chao[7] 对未知函数 $g(x)$ 提出一种加权核估计

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\Big(\frac{x - x_i}{h_n}\Big), \tag{1.2}$$

其中 $K(u)$ 是可测函数， $0 < h_n \to 0$ (当 $n \to \infty$).

本文 1997 年 11 月 13 日收到. 1998 年 12 月 31 日收到修改稿.
* 广西青年科学研究基金，广西高校科学研究基金资助项目.

关于 $g_n(x)$ 的强相合性，无论是在独立情形还是在相依情形下都已有了不少文献[见 7-11] 研究过，获得了很好的结果. 本文则在 NA 相依样本下给出强相合性的结论. 记 $\delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$, 全文将使用如下基本条件：

(a) $K(\cdot)$ 在 R^1 上满足 $\beta\,(\beta>0)$ 阶 Lipschitz 条件, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\,\mathrm{d}u=1$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u<\infty$, $K(\cdot)$ 在 R^1 上有界；

(b) $g(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $\alpha\,(\alpha>0)$ 阶 Lipschitz 条件；

(c) 当 $n\to\infty$ 时, $h_n\to 0$ 和 $\delta_n\to 0$;

(d) 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{h_n}\{(\delta_n/h_n)^\beta+\delta_n^\alpha\}\to 0$.

我们的主要结论是：

定理 1 设基本条件 (a)-(d) 成立. 又设

(i) $\{\varepsilon_i\}$ 为 NA 相依, $E\varepsilon_i=0$, $|\varepsilon_i|\le b$, a.s.;

(ii) $\delta_n/h_n=o\big((\log n)^{-1}\big)$ 且存在 $d>0$ 使

$$n^d h_n\to\infty,\qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}. \tag{1.3}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\ \text{a.s.},\qquad x\in(0,1) \tag{1.4}$$

且对任给定的 $0<\tau<1/2$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\big|g_n(x)-g(x)\big|=0,\qquad \text{a.s.} \tag{1.5}$$

推论 1 设基本条件 (a), (b) 和定理 1 的条件 (i) 成立. 若取

$$\delta_n=O(1/n),\qquad h_n=n^{-1}, \tag{1.6}$$

其中 $0<l<\min\{\alpha,\beta/(1+\beta)\}$, 则 (1.4) 和 (1.5) 亦成立.

定理 2 设基本条件 (a)-(d) 成立. 又设

(i) $\{\varepsilon_i\}$ 为 NA 相依, $E\varepsilon_i=0$, $\sup\limits_i E|\varepsilon_i|^r<\infty$ (其中 $r>1$);

(ii) (1.3) 式成立且存在 $\rho>1$ 使

$$\delta_n/h_n=O\left(n^{-1/r}(\log n)^{-(1+\rho)}\right), \tag{1.7}$$

则 (1.4) 和 (1.5) 成立.

推论 2 设基本条件 (a), (b) 和定理 2 的条件 (i) 成立. 若取 l 满足 $0<l<\min\{\alpha,\beta/(1+\beta),1-1/r\}$ 使 (1.6) 成立, 则 (1.4) 和 (1.5) 亦成立.

注 1 这里结论的条件是比较弱的, 其中推论 2 的条件比独立情形下研究强相合性的 [8] 中定理 3 和 [11] 中定理 1 的条件有实质性减弱. 事实上,

(1) 减弱了对核函数 $K(\cdot)$ 的要求. [8] 和 [11] 中均要求 $K(\cdot)$ 是密度函数, 在 R^1 上满足 $\beta(\beta>0)$ 阶 Lipschitz 条件, 从而 $K(\cdot)$ 连续且 $\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\,\mathrm{d}u=1$, 因此可得 $K(\cdot)$ 有界. 于是已满足这里的基本条件 (a). 而 [8] 和 [11] 中对 $K(\cdot)$ 还增加如下要求：当 $u>0$ 时非降, 当 $u<0$ 时非增, $\int_{-\infty}^{+\infty}K^2(u)\,\mathrm{d}u<\infty$, 且 [8] 中还要求 $K(u)=K(-u)$, [11] 中还要求 $\lim\limits_{|u|\to\infty}|uK(u)|=0$.

(2) 放宽了对 $\{\varepsilon_i\}$ 的要求. [8] 中要求 $\{\varepsilon_i\}$ 独立同分布且 $E\varepsilon_1^4<\infty$, 而 [11] 中要求 $\{\varepsilon_i\}$ 独立同分布且 $E|\varepsilon_1|^r<\infty$ (其中 $r>2$).

(3) 对 h_n 阶 l 降低要求. [8] 中要求 $0 < l < \min\{\alpha, \beta/(1+\beta), 1/2\}$ (注意 [8] 中定理 1 之后进一步注明 $l < 1/2$), 显然当 $r = 4$ 时, $1 - 1/r > 1/2$, 所以 [8] 中对 l 的要求强于这里推论 2 的要求; [11] 中要求 $0 < l < \min\{\alpha, \beta/(1+\beta), 1-2/r\}$, 显然 [11] 也强于这里推论 2 的要求.

本文用 C 表示常数, I_A 表示示性函数.

2 Bernstein 型不等式及引理

为了定理的证明, 本节先给出一个有用的 Bernstein 型不等式和一些预备引理.

定理 3 设 $\{X_i : i \geq 1\}$ 为 NA 序列, $EX_i = 0$, $|X_i| \leq d_i$, a.s. $(i = 1, 2, \cdots)$, $t > 0$ 为实数, 且满足 $t \cdot \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i \leq 1$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big| > \varepsilon\Big) \leq 2\exp\Big\{-t\varepsilon + t^2\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\Big\}.$$

证 因为 $|tX_i| \leq 1$, a.s., 所以

$$E\exp(tX_i) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E(tX_i)^k}{k!} \leq 1 + E(tX_i)^2\Big\{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\Big\} \leq 1 + t^2EX_i^2 \leq \exp\{t^2EX_i^2\}.$$

因此, 由 Markov 不等式和 [1] 中性质 2 (可见 [6] 中引理 1) 知, $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i > \varepsilon\Big) \leq \mathrm{e}^{-t\varepsilon}E\exp\Big(t\sum_{i=1}^{n}X_i\Big) \leq \mathrm{e}^{-t\varepsilon}\prod_{i=1}^{n}E\exp(tX_i) \leq \exp\Big\{-t\varepsilon + t^2\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\Big\}.$$

由此即得结论. 证毕.

推论 3 设 $\{X_i : i \geq 1\}$ 为 NA 序列, $EX_i = 0$, $|X_i| \leq b$, a.s. $(i = 1, 2, \cdots)$, 又设 $\sigma^2 := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$P\Big(\frac{1}{n}\Big|\sum_{n=1}^{n}X_i\Big| > \varepsilon\Big) \leq 2\exp\Big\{-\frac{n\varepsilon^2}{2(2\sigma^2 + b\varepsilon)}\Big\}.$$

注 2 推论 3 与独立情形的 Bernstein 不等式一致 (可见 [12] 中引理 6.2). 推论 3 的证明只需在定理 3 中取 $t = \varepsilon/(2\sigma^2 + b\varepsilon)$ 即可, 证明从略.

引理 1 设 $X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nn}$ 为 NA 的, $EX_{ni} = 0$, 且

$$\max_{1\leq i\leq n}|X_{ni}| = o\big((\log n)^{-1}\big), \qquad \sum_{i=1}^{n}EX_{ni}^2 = o\big((\log n)^{-1}\big),$$

则 $\forall \lambda > 0$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n}X_{ni}\Big| > \varepsilon\Big) \leq 2n^{-\lambda}, \qquad \text{对充分大的 } n.$$

证　由条件有：$\forall\lambda>0$ 和 $\forall\varepsilon>0$, 当 n 充分大时，

$$\max_{1\le i\le n}|X_{ni}|\le\varepsilon^2\big(2\lambda(2+\lambda)\log n\big)^{-1},\qquad \sum_{i=1}^n EX_{ni}^2\le\varepsilon^2\big(2\lambda(2+\lambda)\log n\big)^{-1}.$$

取 $t=\varepsilon^{-1}\cdot 2\lambda\log n$, 则 t 满足定理 3 的要求，因此

$$P\Big(\Big|\sum_{i=1}^n X_{ni}\Big|>\varepsilon\Big)\le 2\exp\Big\{-2\lambda\log n+\frac{2\lambda}{2+\varepsilon}\log n\Big\}\le 2n^{-\lambda}.$$

引理 2　设 $\{Z_i: i\ge1\}$ 是随机变量序列, 存在常数 $\rho>1$ 使 $E|Z_i|=O\left(i^{-1}(\log n)^{-(1+\rho)}\right)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}Z_i$ a.s. 收敛.

证　令 $T_n=\sum\limits_{i=1}^n Z_i$, $\forall m\ge n\ge1$, 有

$$\begin{aligned}E|T_m-T_n|\le&\sum_{i=n+1}^m E|Z_i|\le C\sum_{i=n+1}^m i^{-1}(\log i)^{-(1+\rho)}\\ \le&C(\log n)^{-(1+\rho)/2}\to0,\qquad 当\ n\to\infty.\end{aligned}$$

因此 $\{T_n\}$ 是 L_1 中 Cauchy 序列，从而存在 r.v.T 使 $E|T|<\infty$ 且 $E|T_n-T|\to0$. 又 $\forall\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&P\left(|T_{2^k}-T|>\varepsilon\right)\le C\limsup_n E|T_{2^k}-T_n|\le C\sum_{i=2^k+1}^{\infty}E|Z_i|\\ \le&C(\log 2^k)^{-(1+\rho)/2}\le C2^{-(1+\rho)/2},\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&P\Big(\max_{2^{k-1}<n\le2^k}|T_n-T_{2^{k-1}}|>\varepsilon\Big)\le C\Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}|Z_i|>\varepsilon\Big)\\ \le&C\sum_{i=2^{k-1}+1}^{\infty}E|Z_i|\le C(k-1)^{-(1+\rho)/2}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由 (2.1), (2.2) 和子序列法知，$T_n\to T$, a.s. 从而有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}Z_i=T$, a.s. 证毕.

引理 3　设基本条件 (a)-(d) 成立，则

$$\lim_{n\to\infty}Eg_n(x)=g(x),\qquad x\in(0,1),\tag{2.3}$$

且对任给的 $0<\tau<1/2$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\big|Eg_n(x)-g(x)\big|=0.\tag{2.4}$$

证　由于当 $x\notin[0,1]$ 时，$g(x)=0$, 所以

$$Eg_n(x)-g(x)=\Big\{\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)g(x_i)-h_n^{-1}\int_0^1K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big)g(u)\,\mathrm{d}u\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{h_n^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big)g(u)\,\mathrm{d}u-g(u)\right\}\\
=:&J_{n1}(x)+J_{n2}(x).
\end{aligned}\tag{2.5}
$$

记 $\widetilde{\delta}_i=x_i-x_{i-1}$. 由积分中值定理存在 $0<\theta_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 使

$$
\begin{aligned}
J_{n1}(x)=&\Big|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)g(x_i)-h_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big)g(u)\,\mathrm{d}u\Big|\\
=&\Big|h_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\Big\{K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)g(x_i)-K\Big(\frac{x-x_i+\theta_i\widetilde{\delta}_i}{h_n}\Big)g(x_i-\theta_i\widetilde{\delta}_i)\Big\}\Big|\\
\le&h_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\delta}_i\Big\{\Big|K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)-K\Big(\frac{x-x_i+\theta_i\widetilde{\delta}_i}{h_n}\Big)\Big|\,|g(x_i)|\\
&+\Big|K\Big(\frac{x-x_i+\theta_i\widetilde{\delta}_i}{h_n}\Big)\Big|\,\big|g(x_i)-g(x_i-\theta_i\widetilde{\delta}_i)\big|\Big\}\\
\le&Ch_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\delta}_i\big\{(\theta_i\widetilde{\delta}_i/h_n)^{\beta}+(\theta_i\widetilde{\delta}_i)^{\alpha}\big\}\le Ch_n^{-1}\big\{(\delta_n/h_n)^{\beta}+(\delta_n)^{\alpha}\big\}.
\end{aligned}
$$

因此，由基本条件 (d) 知

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\big|J_{n1}(x)\big|=0.\tag{2.6}
$$

对 $J_{n2}(x)$ 作积分变换，有

$$
\big|J_{n2}(x)\big|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\big|g(x-h_nu)-g(x)\big|\,|K(u)|\,\mathrm{d}u.\tag{2.7}
$$

由于 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $\alpha>0$ 阶 Lipschitz 条件，所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续. 而当 $x\notin[0,1]$ 时， $g(x)=0$. 因此 $g(x)$ 在 R^1 上有界，不妨设 $|g(x)|<B_1$. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u<\infty$, 可取正常数 $B_2\ge\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u$. 又由 $g(x)$ 在 [0,1] 上的一致连续性， $\forall\varepsilon>0$, 可选取充分小的正数 $\tau_0<\tau$ 使当 $|h_nu|<\tau_0$ 时,

$$
\big|g(x-h_nu)-g(x)\big|<\frac{\varepsilon}{2B_2},\qquad \text{对 } x\in[\tau,1-\tau] \text{ 一致成立}.
$$

又由于 $h_n\to0$ 且 $|K(u)|$ 可积，所以当 n 充分大时,

$$
\int_{|u|\ge\tau_0/h_n}|K(u)|\,\mathrm{d}u<\frac{\varepsilon}{4B_1}.
$$

于是，当 n 充分大时，对 $x\in[\tau,1-\tau]$ 一致地有

$$
\begin{aligned}
|J_{n2}(x)|\le&\int_{|h_nu|<\tau_0}+\int_{|h_nu|\ge\tau_0}\big|g(x-h_nu)-g(x)\big|\,|K(u)|\,\mathrm{d}u\\
\le&\frac{\varepsilon}{2B_2}\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u+2B_1\int_{|u|\ge\tau_0/h_n}|K(u)|\,\mathrm{d}u\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

从而当 n 充分大时，有 $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|J_{n2}(x)\right| < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|J_{n2}(x)\right| = 0$. 故由此及 (2.5), (2.6) 知，(2.4) 式成立.

令 $G_n(u) = \left|g(x-h_nu)-g(x)\right||K(u)|$, 则 $0 \le G_n(u) \le 2B_1|K(u)|$. 由于 $|K(u)|$ 可积，且当 $x\in(0,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} G_n(u) = 0$. 由积分控制收敛定理知，(2.7) 式右边趋于 0, 由此及 (2.6) 知，(2.3) 式成立．证毕.

引理 4 设基本条件 (a), (c), (d) 成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u, \qquad x\in(0,1),$$

且对任给定的 $0<\tau<1/2$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u.$$

证　设当 $x\in[0,1]$ 时，$G(x)=1$; 当 $x\notin[0,1]$ 时，$G(x)=0$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)\right| - \int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u\\
=&\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)\right|G(x_i) - h_n^{-1}\int_0^1\left|K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big)\right|G(u)\,\mathrm{d}u\Big\}\\
&+\Big\{h_n^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big)\right|G(u) - \int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\,\mathrm{d}u\Big\}\\
=:&I_{n1}(x)+I_{n2}(x).
\end{aligned}$$

对 $I_{n1}(x)$ 和 $I_{n2}(x)$ 使用引理 3 的证明方法即可．证毕.

3　定理的证明

记 $a_{ni}(x) = \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K\big(\frac{x-x_i}{h_n}\big)$. 则

$$\left|g_n(x)-g(x)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i\right| + \left|Eg_n(x)-g(x)\right|.$$

由此及引理 3 知，定理的证明归结为证明如下两式:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i\right| = 0, \qquad \text{a.s.}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i\right| = 0, \qquad \text{a.s.} \tag{3.2}$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i = \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}^{+}(x)\varepsilon_i - \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}^{-}(x)\varepsilon_i$. 因此不失一般性，可假设 $a_{ni}(x)\ge 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

定理 1 的证明 记 $X_{ni}=a_{ni}(x)\varepsilon_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nn}$ 仍为 NA 的，且使用引理 4 有

$$\max_{1\le i\le n}|X_{ni}|\le C\delta_n/h_n=o\left((\log n)^{-1}\right),$$
$$\sum_{i=1}^n EX_{ni}^2=\sum_{i=1}^n\left(a_{ni}(x)\right)^2E\varepsilon_i^2\le C\delta_n/h_n=o\left((\log n)^{-1}\right).$$

因此利用引理 1, $\forall\varepsilon>0$ 和 $\lambda>0$, 当 n 充分大时，有

$$P\Big(\Big|\sum_{i=1}^n X_{ni}\Big|>\varepsilon\Big)\le Cn^{-\lambda}. \tag{3.3}$$

在上式中取 $\lambda>1$ 知， (3.1) 式成立．下面证明 (3.2) 式．

可选取 $l(n)$ 个中心在 $t_1,t_2,\cdots,t_{l(n)}$, 半径为 $R_n=(h_n^{1+\beta}/\log n)^{1/\beta}$ 的邻域 $B_1,B_2,\cdots,B_{l(n)}$ 覆盖 $[0,1]$, 其中个数 $l(n)$ 小于 $O\left((h_n^{1+\beta}/\log n)^{1/\beta}\right)$. 记 $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}(x)\varepsilon_i$. 由 $|\varepsilon_i|<b$, a.s. 和 $K(\cdot)$ 满足 $\beta>0$ 阶 Lipschitz 条件，有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_k}|S_n(x)-S_n(t_k)|&=\sup_{x\in B_k}\left|\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\Big\{K\Big(\frac{x-x_i}{h_n}\Big)-K\Big(\frac{t_i-x_i}{h_n}\Big)\Big\}\varepsilon_i\right|\\&\le C\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\sup_{x\in B_k}\left|\frac{x-t_k}{h_n}\right|^\beta\le CR_n^\beta h_n^{-(1+\beta)}\\&\le C(\log n)^{-1}\longrightarrow 0,\qquad 当\ n\to\infty\ 时.\end{aligned}\tag{3.4}$$

由 (3.3) 和 (3.4), 当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}&P\Big(\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}|S_n(x)|>\varepsilon\Big)\le\sum_{k=1}^{l(n)}\Big\{P\Big(\sup_{x\in B_k}|S_n(x)-S_n(t_k)|>\varepsilon\Big)+P\big(|S_n(t_k)|>\varepsilon\big)\Big\}\\&=\sum_{k=1}^{l(n)}P\big(|S_n(t_k)|>\varepsilon\big)\le Cl(n)n^{-\lambda}\le C(\log n)^{1/\beta}n^{-\lambda}h_n^{-(1+\beta)/\beta}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

由条件 (1.3), 取 $\lambda>2+d(1+\beta)/\beta$, 有 $n^{-\lambda}h_n^{-(1+\beta)/\beta}=o(n^{-2})$. 由此及 (3.5) 有 $\sum\limits_n P\big(\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}|S_n(x)|>\varepsilon\big)<\infty$. 从而 (3.2) 式成立．证毕．

定理 2 的证明 令

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{ni}(1)=-n^{1/r}I_{(\varepsilon_i<-n^{1/r})}+\varepsilon_iI_{(|\varepsilon_i|\le n^{1/r})}+n^{1/r}I_{(\varepsilon_i>n^{1/r})},\\&\varepsilon_{ni}(2)=(\varepsilon_i+n^{1/r})I_{(\varepsilon_i<-n^{1/r})}+(\varepsilon_i-n^{1/r})I_{(\varepsilon_i>n^{1/r})},\\&\widetilde{\varepsilon}_{ni}(1)=\varepsilon_{ni}(1)-E\varepsilon_{ni}(1),\qquad\widetilde{\varepsilon}_{ni}(2)=\varepsilon_{ni}(2)-E\varepsilon_{ni}(2)\\&S_n'(x)=\sum_{i=1}^n a_{ni}(x)\widetilde{\varepsilon}_{ni}(1),\qquad S_n''(x)=\sum_{i=1}^n a_{ni}(x)\widetilde{\varepsilon}_{ni}(2).\end{aligned}$$

1° 先证 $|S_n'(x)|\to0$, a.s. 对 $x\in(0,1)$ 和 $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}|S_n'(x)|\to0$, a.s. 完全利用定理 1 的证明方法即可证明这一事实．此处要求选取邻域的半径 $R_n=(h_n^{1+\beta}n^{-1/r}/\log n)^{1/\beta}$,

邻域个数 $l(n)$ 小于 $O\left((h_n^{-(1+\beta)}n^{1/r}/\log n)^{1/\beta}\right)$. 且注意到利用引理 4 和 $\sup\limits_i E|\varepsilon_i|^r<\infty$ 及 $r>1$ 有

$$\sum_{i=1}^n E\left(a_{ni}(t_k)\widetilde{\varepsilon}_{ni}(1)\right)^2 \le C\sum_{i=1}^n \left(a_{ni}(t_k)\right)^2 n^{1/r} \le Cn^{1/r}\delta_n/h_n = o\left((\log n)^{-1}\right).$$

2° 现证 $|S_n''(x)|\to 0$, a.s. 对 $x\in(0,1)$ 和 $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}|S_n''(x)|\to 0$, a. s. 记 $T_n(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}(x)\varepsilon_{ni}(2)$, 则 $S_n''(x)=T_n(x)-ET_n(x)$. 而由引理 4 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|ET_n(x)\right| \le \sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\sum_{i=1}^n\left|a_{ni}(x)\right|E\left|\varepsilon_{ni}(2)\right|\\
\le&\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}\sum_{i=1}^n\left|a_{ni}(x)\right|\left\{E|\varepsilon_i|I_{(|\varepsilon_i|>n^{1/r})}+n^{1/r}P(|\varepsilon_i|>n^{1/r})\right\}\\
\le& C\sup_{x\in B_k}\sum_{i=1}^n\left|a_{ni}(x)\right|\{n^{-(r-1)/r}+n^{1/r-1}\}\\
\le& Cn^{-(r-1)/r}\to 0,\qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

又由 $K(\cdot)$ 有界性, 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[\tau,1-\tau]}|T_n(x)|\le C\frac{\delta_n}{h_n}\sum_{i=1}^n|\varepsilon_{ni}(2)|\\
\le& C\left\{n^{-1/r}(\log n)^{-(1+\rho)}\sum_{i=1}^n|\varepsilon_i|I_{(|\varepsilon_i|>i^{1/r})}+(\log n)^{-(1+\rho)}\sum_{i=1}^n I_{(|\varepsilon_i|>i^{1/r})}\right\}\\
=:&C\{J_{n1}+J_{n2}\}.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

$\xi_i=i^{-1/r}(\log n)^{-(1+\rho)}|\varepsilon_i|I_{(|\varepsilon_i|>i^{1/r})}$, $\eta_i=(\log n)^{-(1+\rho)}I_{(|\varepsilon_i|>i^{1/r})}$, 则

$$\begin{aligned}
E|\xi_i|&\le i^{-1}(\log n)^{-(1+\rho)}E|\varepsilon_i|^r\le Ci^{-1}(\log n)^{-(1+\rho)},\\
E|\eta_i|&=(\log n)^{-(1+\rho)}P\left(|\varepsilon_i|>i^{1/r}\right)\le Ci^{-1}(\log n)^{-(1+\rho)}.
\end{aligned}$$

由此及引理 2 知, $\sum\limits_{i=1}^\infty\xi_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^\infty\eta_i$ 均 a.s. 收敛, 从而由 Kronecker 引理有 $J_{n1}\to 0$, a.s. 和 $J_{n2}\to 0$, a.s. 于是由 (3.7) 式有 $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|T_n(x)\right|\to 0$, a.s. 结合 (3.6) 式知, $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}\left|S_n''(x)\right|\to 0$, a.s. 注意到将 (3.6) 和 (3.7) 式中相应的 $\sup\limits_{x\in[\tau,1-\tau]}$ 去掉仍成立 (当 $x\in(0,1)$ 时), 因此也有 $\left|S_n''(x)\right|\to 0$, a.s. 对 $x\in(0,1)$. 证毕.

推论 1 和推论 2 分别是定理 1 和定理 2 的直接结论, 证明从略.

参 考 文 献

1 Joag-Dey K, Proschan F. Negative Association of Random Variables with Applications. *Ann. Statist.*, 1983, 11: 286–295

2 Block H W, Savits T H, Shaked M. Some Concepts of Negative Dependence. *Ann. Probab.*, 1982, 10: 765–772

3 Newman, C M. Asymptotic Independence and Limit Theorems for Positively and Negatively Dependent Random Variables. In: Tong Y L ed., Inequalities in Statistics and Probability. IMS Lecture Notes-Monograph Series, 1984, 5: 127–140

4 Matula P. A Note on the Almost Sure Convergence of Sums of Negatively Dependence Random Variables. *Statist. Probab. Lett.*, 1992, 15: 209–213

5 苏淳. NA 序列的一个 Hsu-Robbins 型定理. 科学通报, 1996, 41(2): 106–110

6 苏淳, 赵林城, 王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛. 中国科学 (A 辑), 1996, 26(12): 1091–1099

7 Priestley M B, Chao M T. Nonparametric Function Fitting. *J R Statist. Soc.* (Series B), 1972, 34: 385–392

8 Benedetti J K. On the Nonparametric Estimation of Regrssion Functions. *J R Statist. Soc.* (Series B), 1977, 39: 248–253

9 杨善朝. 混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性. 高校应用数学学报, 1995, 10(2): 173–180

10 杨善朝. 混合序列矩不等式和非参数估计. 数学学报, 1997, 40(2): 271–279

11 秦永松. 非参数回归函数估计的一个结果. 工程数学学报, 1989, 6(3): 120–123

12 陈希孺, 方兆本, 李国英, 陶波. 非参数统计. 上海科学出版社, 1989

STRONG CONSISTENCY OF REGRESSION FUNCTION ESTIMATOR FOR NEGATIVE ASSOCIATED SAMPLES

YANG SHANCHAO

(*Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin* 541004)

WANG YUEBAO

(*Mathematics Science College, Suzhou University, Suzhou* 215006)

Abstract Under negative associated dependent samples, we discuss the strong consistency of the weighted kernel estimators of nonparametric regression functions. Some more weakly sufficient conditions are established. At the same time, a simple and useful Bernstein type inequality for negative associated sequences is obtained.

Key words Negative associated sample, nonparametric regression, weighted kernel estimator, strong consistency