第 26 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 4
2003 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 2003

二次损失下一般 Gauss-Markov 模型中可估函数的线性 Minimax 估计 *

喻胜华

(湖南大学数学与计量经济学院，长沙 410082)

摘　要　设 Y 是具有均值 $X\beta$ 和协方差阵 $\sigma^2 V$ 的 n 维随机向量， $S\beta$ 是线性可估函数，这里 X, S 和 $V \geq 0$ 是已知矩阵， $\beta \in R^p$ 和 $\sigma^2 > 0$ 是未知参数. 本文在二次损失下研究了线性估计的 Minimax 性. 在适当的假设下，得到了 $S\beta$ 的唯一线性 Minimax 估计 (有关唯一性在几乎处处意义下理解).

关键词　二次损失，可估函数， Minimax 估计

1　引言

考虑线性模型：

$$EY = X\beta, \qquad \mathrm{Cov}\,(Y) = \sigma^2 V, \tag{1}$$

其中 Y 为 n 维观察向量， X 为 $n \times p$ 的设计阵， β 为 p 维未知参数向量， $\sigma^2 > 0$ 为未知参数， V 为已知的 n 阶对称非负定矩阵，设 $S\beta$ 为线性可估函数，这里 S 为 $k \times p$ 的常数矩阵.

对于 V 为正定矩阵的情形， Efron[1,2] 等人在损失函数 $\|d-\beta\|^2/\sigma^2$ 下研究了参数 β 在一切估计类中的 Minimax 估计，徐兴忠 [3] 选取损失函数

$$L_0(d, S\beta) = \frac{(d-S\beta)'(d-S\beta)}{\sigma^2 + \beta' X' V^{-1} X\beta}$$

研究了一般的可估函数 $S\beta$ 在线性估计类中的 Minimax 估计，温忠麟 [4] 进一步研究了线性 Minimax 估计的性质，并对 [3] 的结果给出了一个相对简短的证明. 本文研究一般的 Gauss-Markov 模型 (1), 我们对 [3] 中的二次损失函数作了相应的修改，在齐次线性估计类的一个子集上研究了估计的 Minimax 性，在一定条件下，得到了 $S\beta$ 的线性 Minimax 估计，并在几乎处处意义下证明了它的唯一性.

由于下文需要，特引进如下记号：

设 A 是一个矩阵， $R(A)$ 表示 A 的秩， A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆， $\lambda(A)$ 表示 A 的最大特征值， $\mu(A)$ 表示由 A 的列向量生成的线性子空间， $\mathrm{tr}\,(A)$ 表示 A 的迹.

本文 2001 年 9 月 17 日收到.
* 国家自然科学基金 (10101006 号) 资助项目.

2 主要结果

设 $R(V)=r$, $Q=(Q_1\vdots Q_2)$ 为正交矩阵，满足

$$Q'VQ=\begin{pmatrix}\wedge & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \wedge=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r),\quad \lambda_i>0,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

易知， $V=Q_1\wedge Q_1'$, $V^+=Q_1\wedge^{-1}Q_1'$, $Q_2Q_2'=I-V^+V$.

因 $S\beta$ 为线性可估函数，故 $\mu(S')\subset\mu(X')$, 而 $\mu(X')=\mu(X'Q_1)+\mu(X'Q_2)$. 所以，存在矩阵 T_1,T_2 使得

$$S=T_1Q_1'X+T_2Q_2'X\triangleq S_1+S_2. \tag{2}$$

记

$$\begin{aligned}&\pounds_0=\{LY: L \text{ 为 } k\times n \text{ 的常数矩阵},\ LQ_2Q_2'X=S_2\},\\ &\pounds=\{LY: L \text{ 为 } k\times n \text{ 的常数矩阵 }\},\\ &L(d,S\beta)=\frac{(d-S\beta)'(d-S\beta)}{\sigma^2+\beta'X'V^+X\beta},\qquad R(\beta,\sigma^2;L)=EL(LY,S\beta).\end{aligned}$$

引理 1 设 $LY\in\pounds$, $VXX'(I-V^+V)=0$, 则 $\sup\limits_{\sigma^2>0,\ \beta\in R^p}R(\beta,\sigma^2;L)$ 存在，当且仅当 $LQ_2Q_2'X=S_2$, 且有

$$\sup_{\sigma^2>0,\,\beta\in R^p}R(\beta,\sigma^2;L)=\max\{\mathrm{tr}\,(LVL'),\ \lambda\big[(LQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(LQ_1-T_1)'\big]\},$$

其中 $P=\wedge^{-\frac12}Q_1'X(X'V^+X)^-X'Q_1\wedge^{-\frac12}$.

证

$$\begin{aligned}\sup_{\sigma^2>0,\,\beta\in R^p}R(\beta,\sigma^2;L)&=\sup_{\sigma^2>0,\,\beta\in R^p}\frac{\sigma^2\mathrm{tr}\,(LVL')+\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta}{\sigma^2+\beta'X'V^+X\beta}\\&=\max\Big\{\mathrm{tr}\,(LVL'),\sup_{\beta\in R^p,\,\beta\neq0}\frac{\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta}{\beta'X'V^+X\beta}\Big\}.\end{aligned}\tag{3}$$

若 $LQ_2Q_2'X=S_2$, 则

$$(LX-S)\beta=\big[(LQ_1-T_1)Q_1'X+(LQ_2-T_2)Q_2'X\big]\beta=(LQ_1-T_1)Q_1'X\beta,$$

从而

$$\sup_{\beta\in R^p,\,\beta\neq0}\frac{\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta}{\beta'X'V^+X\beta}=\sup_{\beta\in R^p,\,\beta\neq0}\frac{\beta'X'Q_1(LQ_1-T_1)'(LQ_1-T_1)Q_1'X\beta}{\beta'X'Q_1\wedge^{-1}Q_1'X\beta}. \tag{4}$$

由 (3),(4) 式及 [3] 中引理 2.1 的证明方法可得

$$\sup_{\sigma^2>0,\,\beta\in R^p}R(\beta,\sigma^2;L)=\max\Big\{\mathrm{tr}\,(LVL'),\lambda\big[(LQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(LQ_1-T_1)'\big]\Big\}.$$

反之, 若 $\sup\limits_{\sigma^2>0,\,\beta\in R^p} R(\beta,\sigma^2;L)$ 存在, 不妨设

$$\sup_{\beta\in R^p,\,\beta\neq 0}\frac{\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta}{\beta' X'V^+X\beta}=a,$$

则

$$\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta\le a\beta'X'V^+X\beta \tag{5}$$

对一切 $\beta\in R^p$ 成立.

取 $\beta=(X'Q_2Q_2'X)^+X'Q_2(LQ_2-T_2)'t,\ t\in R^k$, 则有

$$\begin{aligned}(LQ_1-T_1)Q_1'X\beta=&(LQ_1-T_1)Q_1'X(X'Q_2Q_2'X)^+X'Q_2(LQ_2-T_2)'t\\=&(LQ_1-T_1)Q_1'XX'Q_2(Q_2'XX'Q_2)^+(LQ_2-T_2)'t.\end{aligned}$$

由题设可知 $Q_1'XX'Q_2=0$, 从而

$$(LQ_1-T_1)Q_1'X\beta=0. \tag{6}$$

同理可证

$$\beta'X'V^+X\beta=0. \tag{7}$$

由 (5)–(7) 式知

$$\beta'X'Q_2(LQ_2-T_2)'(LQ_2-T_2)Q_2'X\beta=0$$

对一切 $\beta\in R^p$ 成立, 而这等价于 $LQ_2Q_2'X=S_2$. 引理证毕

由于引理 1, 我们只得在 $\pounds_0$ 中讨论估计的 Minimax 性.

引理 2 设 $VXX'(I-V^+V)=0$, 则在 $\pounds_0$ 中存在 $S\beta$ 的 Minimax 估计.

证　设 $LY\in\pounds_0$, 则 L 可以表为

$$L=S_2\big[X'(I-V^+V)X\big]^+X'(I-V^+V)+N(I-P_0),$$

其中 $P_0=(I-V^+V)X\big[X'(I-V^+V)X\big]^-X'(I-V^+V)$, N 为任意的 $k\times n$ 矩阵.

记 $g(L)=\max\big\{\mathrm{tr}\,(LVL'),\lambda\big[(LQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(LQ_1-T_1)'\big]\big\}$.

易知: $\mathrm{tr}\,(LVL')=\mathrm{tr}\,(NVN')$, 且

$$\lambda\big[(LQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(LQ_1-T_1)'\big]=\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(NQ_1-T_1)'\big].$$

故

$$g(L)=\max\big\{\mathrm{tr}\,(NVN'),\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(NQ_1-T_1)'\big]\big\}=g(N).$$

上式说明: 在 $\pounds_0$ 中存在 Minimax 估计, 当且仅当对于 $LY\in\pounds_0$, $g(L)$ 有最小值, 而这等价于: 对于 $NY\in\pounds$, $g(N)$ 有最小值.

若 $\mathrm{tr}\,(NVN')=0$, 则 $g(N)=\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(NQ_1-T_1)'\big\}$, 显然有最小值. 不妨设 $\mathrm{tr}\,(NVN')\neq 0$, 从而 $NQ_1\neq 0$. 所以 $g(N)=\max\big\{\mathrm{tr}\,(NQ_1\wedge Q_1'N'),\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac12}P\wedge^{\frac12}(NQ_1-T_1)'\big]\big\}$ 关于 N 是非负连续函数, 且

$$\lim_{\mathrm{tr}\,(NN')\to\infty\,\mathrm{tr}\,(NVN')\neq 0}g(N)=+\infty.$$

故 $g(N)$ 有最小值，即在 $\mathcal{L}_0$ 中存在 $S\beta$ 的 Minimax 估计.

引理 3 若 N 使 $g(N)$ 达到最小，则

$$\operatorname{tr}(NVN') = \lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big].$$

证 若 $\operatorname{tr}(NVN') > \lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]$, 对充分小的 $a > 0$, 令 $N_1 = (1-a)N$, 则 $\operatorname{tr}(N_1VN_1') < \operatorname{tr}(NVN')$, 且

$$\begin{aligned}
&\lambda\big[(N_1Q_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (N_1Q_1 - T_1)'\big]\\
=&\lambda\big[((NQ_1 - T_1) - aNQ_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} ((NQ_1 - T_1) - aNQ_1)'\big]\\
\le&\lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big] + a^2\lambda(NQ_1 \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} Q_1'N')\\
&+ a\lambda\big[-NQ_1 \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)' - (NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} Q_1'N'\big],
\end{aligned}$$

对充分小的 $a > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&a^2\lambda(NQ_1 \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} Q_1'N') + a\lambda\big[-NQ_1 \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\\
&- (NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} Q_1'N'\big]\\
<&\operatorname{tr}(NVN') - \lambda\big[(NQ_1 - T_1)\wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big],
\end{aligned}$$

故

$$\lambda\big[(N_1Q_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (N_1Q_1 - T_1)'\big] < \operatorname{tr}(NVN'),$$

从而 $g(N_1) < \operatorname{tr}(NVN') = g(N)$, 与题设矛盾．反之，若 $\operatorname{tr}(NVN') < \lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]$. 取 $N_1 = T_1Q_1' + (1-a)(NQ_1Q_1' - T_1Q_1')$, 这里 $a > 0$ 充分小，则 $N_1Q_1Q_1' = (1-a)(NQ_1Q_1' - T_1Q_1') + T_1Q_1'$, 从而

$$\begin{aligned}
&\lambda\big[(N_1Q_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]\\
=&\lambda\big[(N_1Q_1Q_1' - T_1Q_1')X(X'V^+X)^+X'(N_1Q_1Q_1' - T_1Q_1')'\big]\\
=&(1-a)^2\lambda\big[(NQ_1Q_1' - T_1Q_1')X(X'V^+X)^+X'(NQ_1Q_1' - T_1Q_1')'\big]\\
=&(1-a)^2\lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]\\
<&\lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big],\\
&\operatorname{tr}(N_1VN_1') = \operatorname{tr}(N_1Q_1 \wedge Q_1'N_1')\\
=&\operatorname{tr}(N_1Q_1Q_1'Q_1 \wedge Q_1'Q_1Q_1'N_1')\\
=&\operatorname{tr}\big[(NQ_1Q_1' + aT_1Q_1' - aNQ_1Q_1')Q_1 \wedge Q_1'(NQ_1Q_1' + aT_1Q_1' - aNQ_1Q_1')'\big]\\
=&\operatorname{tr}(NVN') + a^2\operatorname{tr}\big[(T_1Q_1' - N)V(T_1Q_1' - N)'\big] + 2a\operatorname{tr}\big[(T_1Q_1' - N)VN'\big].
\end{aligned}$$

对充分小的 $a > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&a^2\operatorname{tr}\big[(T_1Q_1' - N)V(T_1Q_1' - N)'\big] + 2a\operatorname{tr}\big[(T_1Q_1' - N)VN'\big]\\
<&\lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big] - \operatorname{tr}(NVN'),
\end{aligned}$$

从而 $\operatorname{tr}(N_1VN_1') < \lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]$，$g(N_1) < g(N)$, 与题设矛盾.

故 $\operatorname{tr}(NVN') = \lambda\big[(NQ_1 - T_1) \wedge^{\frac{1}{2}} P \wedge^{\frac{1}{2}} (NQ_1 - T_1)'\big]$. 引理证毕.

对矩阵 $S_1(X'V^+X)^+X'Q_1\wedge^{-\frac{1}{2}}$ 作奇异值分解：

$$S_1(X'V^+X)^+X'Q_1\wedge^{-\frac{1}{2}}=K\begin{pmatrix}F&0\\0&0\end{pmatrix}R',\tag{8}$$

其中 $F=\mathrm{diag}\,(f_1,f_2,\cdots,f_t)$, $f_1\geq f_2\geq\cdots\geq f_t>0$, $t=R\big(S_1(X'V^+X)^+X'Q_1\wedge^{-\frac{1}{2}}\big)$, 不妨设 $t<\min\{k,n\}$. K 和 R 分别为 k 阶和 n 阶的正交矩阵.

再记

$$C_i=\Big[\sum_{j=1}^{i}(f_j-f_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}},\qquad i=1,2,\cdots,t,\ \ \text{则}\ C_t\geq C_{t-1}\geq\cdots\geq C_1=0,$$

$m=\max\{i:\,C_i\leq f_i\}$.

引理 4　设 N 使 $g(N)$ 达到最小，则存在对角阵 $\Delta=\mathrm{diag}\,(h_1,h_2,\cdots,h_t)$, 使 $0\leq h_i\leq f_i$, 且

$$NQ_1Q_1'=K\begin{pmatrix}\Delta&0\\0&0\end{pmatrix}R'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1',$$

其中 $K,R,\wedge$ 和 Q_1 的定义同前.

证　NQ_1Q_1' 可表示为

$$NQ_1Q_1'=KAR'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'.$$

这里

$$A=K'NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}R=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\qquad A_{11}=(a_{ij})_{t\times t}.$$

令

$$h_i=\begin{cases}a_{ii}, & 0\leq a_{ii}\leq f_i,\\ 0, & a_{ii}\leq 0,\\ f_i, & a_{ii}>f_i,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,t,$$

$$N_0=K\begin{pmatrix}\Delta&0\\0&0\end{pmatrix}R'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1',\qquad \Delta=\mathrm{diag}\,(h_1,h_2,\cdots,h_t).$$

下证 $NQ_1Q_1'=N_0Q_1Q_1'$.

若 $NQ_1Q_1'\neq NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$, 则令 $N_1=NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$.

可以证明：　$NQ_1Q_1'X=N_1Q_1Q_1'X$, 且 $(N-N_1)VN_1'=0$, 从而

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(NVN')=&\mathrm{tr}\,(N_1VN_1')+\mathrm{tr}\,\big[(N-N_1)V(N-N_1)'\big]\\=&\mathrm{tr}\,(N_1VN_1')+\mathrm{tr}\,\big[(NQ_1-N_1Q_1)\wedge(NQ_1-N_1Q_1)'\big].\end{aligned}$$

因 $NQ_1Q_1'\neq N_1Q_1Q_1'$, 所以 $NQ_1\neq N_1Q_1$, 从而 $\mathrm{tr}\,(NVN')>\mathrm{tr}\,(N_1VN_1')$. 另一方面

$$\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(NQ_1-T_1)'\big]=\lambda\big[(N_1Q_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(N_1Q_1-T_1)'\big].$$

由上可知，　$g(N_1)\leq g(N)$, 这与题设矛盾. 故 $NQ_1Q_1'=NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$.

于是

$$(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P=NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'Q_1\wedge^{\frac{1}{2}}-T_1Q_1'X(X'V^+X)^-X'Q_1\wedge^{-\frac{1}{2}}$$
$$=NQ_1\wedge^{\frac{1}{2}}-S_1(X'V^+X)^+X'Q_1\wedge^{-\frac{1}{2}}=K\begin{pmatrix}A_{11}-F & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}R',$$
$$\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(NQ_1-T_1)'\big]\geq\lambda\big[(A_{11}-F)'(A_{11}-F)\big]$$
$$\geq\max_{1\leq i\leq t}\big\{(a_{ii}-f_i)^2\big\}\geq\max_{1\leq i\leq t}\big\{(h_i-f_i)^2\big\},$$

而

$$\lambda\big[(N_0Q_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(N_0Q_1-T_1)'\big]$$
$$=\lambda\left[PR\begin{pmatrix}(\Delta-F)'(\Delta-F) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}R'P\right]\leq\max_{1\leq i\leq t}\big\{(h_i-f_i)^2\big\},$$

故

$$\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(NQ_1-T_1)'\big]\geq\lambda\big[(N_0Q_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(N_0Q_1-T_1)'\big].\qquad(9)$$

另一方面

$$\mathrm{tr}\,(NVN')=\mathrm{tr}\,(NQ_1Q_1'Q_1\wedge Q_1'Q_1Q_1'N')=\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}'\right].$$

若 $NQ_1Q_1'\neq N_0Q_1Q_1'$, 则

$$\mathrm{tr}\,(NVN')>\mathrm{tr}\,(N_0VN_0')=\sum_{i=1}^{t}h_i^2.\qquad(10)$$

所以 $g(N_0)\leq g(N)$, 即 N_0 也使 $g(N_0)$ 达到最小.

由引理 3, (9) 式只有严格不等号成立，由此可得 $g(N_0)<g(N)$, 与题设矛盾．故 $NQ_1Q_1'=N_0Q_1Q_1'$. 引理得证.

引理 5 若 N 使 $g(N)$ 达到最小，则有 $NQ_1Q_1'=K_1\Delta_fR_1'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$且$g(N)=J_f^2$, 其中 K_1 和 R_1 分别是 K 与 R 的前 m 列， $\Delta_f=\mathrm{diag}\,(f_1-J_f,f_2-J_f,\cdots,f_m-J_f)$.

$$J_f=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}f_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}f_i+\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{m}f_i\right)^2-(m-1)\sum\limits_{i=1}^{m}f_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

证　由引理 4,

$$NQ_1Q_1'=K\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}R'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1',\qquad(11)$$

其中 $\Delta=\mathrm{diag}\,(h_1,h_2,\cdots,h_t),\ 0\leq h_i\leq f_i,\ i=1,2,\cdots,t.$

对 K, R, Δ 进行相应的分块：

$$K=(K_1\vdots K_2\vdots K_3),\qquad R=(R_1\vdots R_2\vdots R_3),$$
$$\Delta=\begin{pmatrix}\Delta_1 & 0\\ 0 & \Delta_2\end{pmatrix},\quad \Delta_1=\mathrm{diag}\,(h_1,h_2,\cdots,h_m),\quad \Delta_2=\mathrm{diag}\,(h_{m+1},h_{m+2},\cdots,h_t),$$
$$K_1'K_1=R_1'R_1=I_m,\qquad g(N)=\max\Big\{\sum_{i=1}^t h_i^2,(f_1-h_1)^2,\cdots,(f_t-h_t)^2\Big\}.$$

记 $N_2=K_1\Delta_1R_1'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$. 若 $\Delta_2\neq 0$, 则 $\mathrm{tr}\,(NVN')>\mathrm{tr}\,(N_2VN_2')$. 由于 N 使 $g(N)$ 达到最小及 $\Delta_2\neq 0$, 所以 $\max\big\{(h_1-f_1)^2,\cdots,(h_m-f_m)^2,f_{m+1}^2,\cdots,f_t^2\big\}>g(N)$.

由 $f_1\geq f_2\geq\cdots\geq f_t>0$ 可得 $f_{m+1}^2>(h_i-f_i)^2,\ i=1,2,\cdots,t$, 且

$$f_{m+1}^2>\sum_{i=1}^t h_i^2,\tag{12}$$

再由 $0\leq h_i\leq f_i$ 及 $f_{m+1}>f_i-h_i$ 可得 $0\leq f_i-f_{m+1}<h_i,\ i=1,2,\cdots,m$. 由 m 的定义有 $f_{m+1}^2<\sum\limits_{i=1}^m h_i^2$, 与 (12) 式矛盾，故 $\Delta_2=0$. 从而 $NQ_1Q_1'=K_1\Delta_1R_1'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$. 若 $\sum\limits_{i=1}^m h_i^2=(f_1-h_1)^2=\cdots=(f_m-h_m)^2$ 不成立．不妨设

$$\sum_{i=1}^m h_i^2>(f_l-h_l)^2=\min_{1\leq i\leq m}\big\{(f_i-h_i)^2\big\}.\tag{13}$$

当 $h_l>0$ 时，取 $0<b<h_l$, 使得

$$\big[f_l-(h_l-b)\big]^2\leq\max_{1\leq i\leq m}\big\{(f_i-h_i)^2\big\},$$

记 $N_3=K_1\mathrm{diag}\,(h_1,\cdots,h_{l-1},h_l-b,h_{l+1},\cdots,h_m)R_1'\wedge^{-\frac{1}{2}}Q_1'$, 则 $\mathrm{tr}\,(N_3VN_3')<\mathrm{tr}\,(NVN')$, 且

$$\lambda\big[(N_3Q_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(N_3Q_1-T_1)'\big]=\lambda\big[(NQ_1-T_1)\wedge^{\frac{1}{2}}P\wedge^{\frac{1}{2}}(NQ_1-T_1)'\big].$$

与引理 3 矛盾.

当 $h_l=0$ 时，由 $f_l\geq f_{l+1}\geq\cdots\geq f_m$ 及 (13) 式，必有 $h_l=h_{l+1}=\cdots=h_m=0,\ f_l=f_{l+1}=\cdots=f_m$ 且 $f_l\leq f_i-h_i, i=1,2,\cdots,l$. 因而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m h_i^2=&\sum_{i=1}^l h_i^2\leq\sum_{i=1}^l(f_i-f_l)^2=\sum_{i=1}^l(f_i-f_m)^2=\sum_{i=1}^m(f_i-f_m)^2\\ \leq& f_m^2=f_l^2.\end{aligned}$$

与 (13) 式矛盾．故 $\sum\limits_{i=1}^m h_i^2=(f_1-h_1)^2=\cdots=(f_m-h_m)^2$.

由 m 的定义可知上述方程组有解，且解为

$$h_i = f_i - J_f, i = 1, 2, \cdots, m, \qquad \sum_{i=1}^{m} h_i^2 = J_f^2.$$

所以 $NQ_1Q_1' = K_1\Delta_f R_1' \wedge^{-\frac{1}{2}} Q_1'$, 且 $g(N) = J_f^2$.

定理 1 设 $VXX'(I - V^+V) = 0$, 则 $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的 Minimax 估计为

$$\begin{aligned} LY = \big[& S_2(X'(I - V^+V)X)^+ X'(I - V^+V) \\ & + K_1(I - J_f F_1^{-1})K_1' S_1(X'V^+X)^+ X'V^+ + M(I - V^+V)(I - P_0)\big] Y \end{aligned}$$

且 $g(L) = J_f^2$, 其中 M 为任意的 $k \times n$ 矩阵， P_0 的定义同引理 2.

证 由题设及引理 2, 引理 5 可知： $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的 Minimax 估计存在，且可以表为

$$\begin{aligned} LY = \big[& S_2(X'(I - V^+V)X)^+ X'(I - V^+V) \\ & + K_1\Delta_f R_1' \wedge^{-\frac{1}{2}} Q_1' + M(I - V^+V)(I - P_0)\big] Y. \end{aligned}$$

对 F 进行相应的分块：

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, \qquad F_1 = \mathrm{diag}\,(f_1, f_2, \cdots, f_m).$$

由 (8) 式可得 $S_1(X'V^+X)^+X'Q_1 \wedge^{-\frac{1}{2}} = K_1F_1R_1' + K_2F_2R_2'$, 所以

$$\begin{aligned} & K_1\Delta_f R_1' \wedge^{-\frac{1}{2}} Q_1' = K_1\Delta_f F_1^{-1} K_1'(K_1F_1R_1' + K_2F_2R_2') \wedge^{-\frac{1}{2}} Q_1' \\ = & K_1(I - J_f F_1^{-1})K_1' S_1(X'V^+X)^+ X'V^+. \end{aligned} \tag{15}$$

由 (14), (15) 式即可得定理的证明.

定理 2 在定理 1 的条件下， $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的任意两个 Minimax 估计以概率为 1 相等.

证 由题设 $VXX'(1 - V^+V) = 0$ 可知，分解式 (2) 是唯一的. 现设 L_1Y 和 L_2Y 为 $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的任意两个 Minimax 估计.

由定理 1 可知，存在 $k \times n$ 的矩阵 M_0, 使得 $L_1Y - L_2Y = M_0(I - V^+V)(I - P_0)Y$. 由 P_0 的定义易得 $E(L_1Y - L_2Y) = 0$ 且 $\mathrm{Cov}\,(L_1Y - L_2Y) = 0$, 即 $P(L_1Y = L_2Y) = 1$.

定理 2 表明：在几乎处处意义下， $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的 Minimax 估计是唯一的.

若 V 是正定矩阵，则 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$, $S_1 = S, S_2 = 0$, $V^+ = V^{-1}$ 且定理 1 中的条件恒成立，于是可得到如下推论.

推论 1 若 $V > 0$, 则 $S\beta$ 的唯一线性 Minimax 估计为

$$L_0Y = K_1(I - J_f F_1^{-1})K_1' S(X'V^{-1}X)^- X'V^{-1}Y.$$

这里顺便指出：推论 1 即为 [3] 中的主要结果定理 1.2, 但在形式上有所不同. 推论 1 表明 $S\beta$ 的线性 Minimax 估计是 LS 估计的一个线性变换.

推论 2 若 $k=1$, 即 S 为一行向量, 则 $S\beta$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的 Minimax 估计为

$$L_1Y=[S_2(X'(I-V^+V)X)^+X'(I-V^+V)+\frac{1}{2}S_1(X'V^+X)^-X'V^+]Y$$

且

$$g(L_1)=J_f^2=\frac{1}{4}(S_1(X'V^+X)^-S_1')^2.$$

在几乎处处意义下, L_1Y 是唯一的.

证 由 $k=1$ 可知: 定理 1 中的 $K_1=1$, $F_1=S_1(X'V^+X)^-S_1'$. $J_f=\frac{1}{2}S_1(X'V^+X)^-S_1'$, 从而 $K_1(I-J_fF_1^{-1})K_1'S_1(X'V^+X)^-X'V^+=\frac{1}{2}S_1(X'V^+X)^-X'V^+$. 由上即知推论 2 的结论成立.

推论 3 若 $k=1$ 且 $V>0$, 则 $S\beta$ 的唯一线性 Minimax 估计为

$$L_2Y=\frac{1}{2}S(X'V^{-1}X)^-X'V^{-1}Y$$

且 $g(L_2)=J_f^2=\frac{1}{4}\big(S(X'V^{-1}X)^-S'\big)^2$.

参 考 文 献

1 Efron B, Morris C. Families of Minimax Estimators of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Ann Statist.*, 1976, 4: 12–21

2 Khursheed A. A Family of Admissible Minimax Estimators of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Ann Statist.*, 1973, 1: 517–525

3 徐兴忠. 二次损失下回归系数的线性 Minimax 估计. 数学年刊, 1993, 14 A(5): 521–628.
(Xu Xingzhong. The Linear Minimax Estimators of Regression Coefficient under Quadratic Loss Function. *Chinese Ann. of Math.*, 1993, 14A(5): 621–628).

4 温忠麟. 二次损失下可估函数的线性 Minimax 估计的性质及其应用. 华南师范大学学报 (自然科学版), 1998, 3(1): 85–90
(Wen Zhonglin. The Properties of the Linear Minimax Estimator under a Quadratic Loss and its Application. *Acta of South China Normal University* (Natural Science), 1998, 3(1): 85–90).

THE LINEAR MINIMAX ESTIMATORS OF ESTIMABLE FUNCTION IN A GENERAL GAUSS-MARKOV MODEL UNDER QUADRATIC LOSS FUNCTION

YU SHENGHUA

(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha* 410082)

Abstract Let Y be a random n-vector with mean $X\beta$ and covariance matrix σ^2V, and $S\beta$ be a linear estimable function, where X, S and $V\geq 0$ are known matrics, $\beta\in R^p$ and $\sigma^2>0$ are unknown parameters. In this paper under the quadratic loss function, the minimax property of linear estimators is studied. Under suitable hypotheses, we obtain the unique linear minimax estimator of $S\beta$ (We must comprehend uniqueness in the sense "almost everywhere"

Key words Quadratic loss function, estimable function, minimax estimator