第 22 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 22 No. 4
1999 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 1999

代数多项式和指数型整函数在Besov空间中的逼近

盛宝怀
(西安电子科技大学应用数学系，西安 710071)
尚增科
(宝鸡文理学院数学系，宝鸡 721007)

摘 要 用 K- 泛函定义了一类 Besov 空间，并分别用 n 阶代数多项式及指数为 σ 的整函数的最佳逼近阶给出了其特征的刻画.

关键词 Besov 空间， K- 泛函，积分光滑模， n 阶代数多项式最佳逼近，指数型整函数

1 基本概念与主要结果

令 $L_{p(D)}$ $(0<p<+\infty)$ 代表满足

$$\|f\|_p=\left(\int_D |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

的函数类，其中 $D=R=(-\infty,+\infty)$ 或 $D=[-1,1]$. 当 $D=R$, 我们定义经典的积分光滑模为

$$\omega_r(f;t)_p=\sup_{|h|\le t}\left\|\Delta_r^h(f;x)\right\|_{p(R)}.$$

当 $D=[-1,1]$ 时，我们定义 Ditzian-Totik 的积分光滑模为

$$\omega_\varphi^r(f;t)_p=\sup_{|h|\le t}\|\Delta_r^{h\varphi}(f;x)\|_{p[-1,1]},$$

其中 $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ 及

$$\Delta_r^\eta(f;x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}f\left(x-\dfrac{r}{2}\eta+k\eta\right), & x\pm\dfrac{r}{2}\eta\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

本文 1997 年 2 月 4 日收到. 1999 年 4 月 14 日收到修改稿.
* 陕西自然科学研究项目 (98G01) 资助.

在 [1] 中张和周给出了 Jackson 算子 $J_n(f;x)$ 在 Besov 空间逼近的正、逆定理，其中

$$J_n(f;x)=\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\Big[\Big(\sin\frac{n+1}{2}t\Big)\Big/\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)\Big]^4\mathrm{d}t,\qquad J_n(1;x)=1.$$

其主要结果为： $f\in B^s_{p,q}$ 的充要条件为

$$\Big[\sum_{n=1}^{+\infty}\big[n^s\|f-J_n(f)\|_p\big]^q\Big]^{\frac{1}{q}}<+\infty.$$

用 $E^*_n(f)_p$ 表示 f 在 L_p 范数下的 n 阶最佳三角逼近阶，则有 [2]

$$E^*_n(f)_p=O\,(t^{-s})\ \text{的充要条件为}\ f\in B^s_{p,\infty},$$

而且找到了 $L_{p(T^r)}$ 中满足

$$\Big[\sum_{n=1}^{+\infty}[n^sE^*_n(f)_p]^r\Big]^{\frac{1}{r}}<+\infty$$

的函数类，其中 r 为正整数.

用 π_n 表示最高阶为 n 的代数多项式的集合. B_σ 表示阶不超过 σ 的指数型整函数的集合. 令

$$E_n(f)_p=\inf_{p_n\in\pi_n}\|f-p_n\|_p,\qquad E_\sigma(f)_p=\inf_{p_\sigma\in B_\sigma}\|f-\varphi_\sigma\|_p.$$

本文将定义一类新的 Besov 空间并且用 $E_n(f)_p$ 及 $E_\sigma(f)_p$ 对其特征进行刻画.

记 $\mathrm{Lip}^*\alpha=\{g(x):\omega_r(g;t)_p=O\,(t^\alpha),\ 0<\alpha<r\}$, 对 $g\in\mathrm{Lip}^*\alpha$ 可定义范数

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}^*\alpha}=\|g\|_p+\sup_{t\ge0}t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_p.$$

记 $\mathrm{Lip}\,\alpha=\{g(x):\omega^r_\varphi(g;t)_p=O\,(t^\alpha),\ 0<\alpha<r\}$, 对 $g\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 可定义范数

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}=\|g\|_p+\sup_{t\ge0}t^{-\alpha}\omega^r_\varphi(g;t)_p,$$

则 $\mathrm{Lip}^*\alpha$ 和 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 为赋范空间.

对 $f\in L_{p(R)}$ 可定义 K- 泛函

$$K^*_p(f;t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}^*\alpha}\big(\|f-g\|_p+t\|g\|_{\mathrm{Lip}^*\alpha}\big).$$

对 $f\in L_p[-1,1]$ 可定义 K 泛函

$$K_p(f;t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}\,\alpha}\big(\|f-g\|_p+t\|g\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}\big).$$

本文如下定义 Besov 空间

$$f\in B^{*\theta}_{p,q}\Longleftrightarrow\Big(\int_0^{+\infty}\big(t^{-\theta}K^*_p(f;t^\alpha)\big)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}<+\infty,$$

$$f\in B^{*\theta}_{p,\infty}\Longleftrightarrow\sup_{t\ge0}t^{-\theta}K^*_p(f;t^\alpha)<+\infty,$$

$$f \in B^{\theta}_{p,q} \Longleftrightarrow \Big(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$
$$f \in B^{\theta}_{p,\infty} \Longleftrightarrow \sup_{t\geq 0} t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}) < +\infty,$$

其中 $0<\theta<\alpha$, $0<\alpha<r$. 由 [1] 或 [2] 我们知道

$$\Big(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta}K^*_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty \Longleftrightarrow \Big(\int_0^{1} (t^{-\theta}K^*_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$
$$\Big(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty \Longleftrightarrow \Big(\int_0^{1} (t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

定理 1 令 $0<\theta<\alpha$, $0<\alpha<r$, $1\leq p,q\leq+\infty$, 则下面两式等价:
(i) $f\in B^{\theta}_{p,q}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[n^{\theta}E_n(f)_p]^q\frac{1}{n}<+\infty$.

定理 2 令 $0<\theta<\alpha$, $0<\alpha<r$, $1\leq p,q\leq+\infty$, 则下面两式等价:
(i) $f\in B^{*\theta}_{p,q}$; (ii) $\int_0^{+\infty}[\sigma^{\theta}E_{\sigma}(f)_p]^q\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}<+\infty$.

推论 1 在定理 1 的条件下

$$\Big(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} \sim \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}[n^{\theta}E_n(f)_p]^q\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

推论 2 在定理 2 的条件下

$$\Big(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta}K^*_p(f;t^{\alpha}))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} \sim \Big(\int_0^{+\infty}[\sigma^{\theta}E_{\sigma}(f)_p]^q\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

本文中, $C, C(q)$ 及 M 为仅与 p,q 有关的常数且 $A=O(B)$ 指存在常数 $C>0$ 而使 $A\leq CB$, $A\sim B$ 指存在常数 $C_1>0$ 和 $C_2>0$ 而使 $C_1\leq A/B\leq C_2$.

2 引理

引理 1 令 $p_n(x)$ 满足 $\|f-p_n\|_p=E_n(f)$, 则存在正常数 M 而使

$$\|f-p_n\|_p\leq M\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p, \tag{2.1}$$
$$\omega^r_{\varphi}\Big(p_n;\frac{1}{n}\Big)_p\leq M\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p, \tag{2.2}$$
$$\|p_n\|_p\leq M\|f\|_p. \tag{2.3}$$

证 由 [3,4] 或 [5] 我们知道 (2.1) 成立. 由于 $\omega^r_{\varphi}(f;\frac{1}{n})\leq C\|f\|_p$, 我们有

$$\begin{aligned}\omega^r_{\varphi}\Big(p_n;\frac{1}{n}\Big)_p &\leq \omega^r_{\varphi}\Big(p_n-f;\frac{1}{n}\Big)_p+\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p\\ &\leq M\|f-p_n\|_p+\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p\leq M\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p,\end{aligned}$$
$$\|p_n\|_p\leq\|p_n-f\|_p+\|f\|_p\leq M\omega^r_{\varphi}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p+\|f\|_p\leq M\|f\|_p.$$

引理 2 对引理 1 中的代数多项式 $p_n(x)$ 存在正常数 M 而使

$$\|f-p_n\|_p \le MK_p(f;n^{-\alpha}), \tag{2.5}$$
$$\|p_n\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha} \le Mn^{\alpha}K_p(f;n^{-\alpha}). \tag{2.6}$$

证 由 (2.1), 对任意 $g\in \mathrm{Lip}\,\alpha$,

$$\begin{aligned}\|f-p_n\| &\le M\omega_\varphi^r\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p \le M\Big(\|f-g\|_p+\omega_\varphi^r\Big(g;\frac{1}{n}\Big)_p\Big)\\ &\le M\Big(\|f-g\|_p+n^{-\alpha}\Big(\|g\|_p+n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(g;\frac{1}{n}\Big)_p\Big)\Big)\le M(\|f-g\|_p+n^{-\alpha}\|g\|_{\mathrm{Lip}\alpha}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|f-p_n\|_p \le& MK_p(f;n^{-\alpha}),\\ \|p_n\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha} =& \|p_n\|_p+\sup_{n\ge1}n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(p_n;\frac{1}{n}\Big)_p \le \|f-p_n\|_p+\|f\|_p+\sup_{n\ge1}n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p\\ \le& M\Big(\omega_\varphi^r\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p+\|f\|_p+\sup_{n\ge1}n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(f;\frac{1}{n}\Big)_p\Big)\\ \le& M\Big[\Big(\|f-g\|_p+\omega_\varphi^r\Big(g;\frac{1}{n}\Big)_p+\|g\|_p\Big)+n^{\alpha}\|f-g\|_p+\sup_{n\ge1}n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(g;\frac{1}{n}\Big)_p\Big]\\ \le& Mn^{\alpha}\Big(\|f-g\|_p+n^{-\alpha}\Big(\|g\|_p+\sup_{n\ge1}n^{\alpha}\omega_\varphi^r\Big(g;\frac{1}{n}\Big)_p\Big)\Big)\\ \le& Mn^{\alpha}(\|f-g\|_p+n^{-\alpha}\|g\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}).\end{aligned}$$

从而有 $\|p_n\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}\le MK_p(f;n^{-\alpha})$.

引理 3 令 $\varphi_\sigma(x)$ 满足 $\|f-\varphi_\sigma\|_p=E_\sigma(f)_p$, 则存在正常数 C 而使

$$\|f-\varphi_\sigma\|_p\le M\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p,\qquad \omega_r\Big(\varphi_\sigma;\frac{1}{\sigma}\Big)_p\le M\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p,\qquad \|\varphi_\sigma\|_p\le M\|f\|_p.$$

引理 4 对引理 3 中的整函数 $\varphi_\sigma(x)$ 存在正常数 M 而使

$$\|f-\varphi_\sigma\|_p\le MK_p^*(f;\sigma^{-\alpha}),\qquad \|\varphi_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\alpha^*}\le M\sigma^{\alpha}K_p^*(f;\sigma^{-\alpha}).$$

引理 3 和引理 4 可与引理 1 及引理 2 同样证明.

3 定理证明

定理 1 的证明 (i)⇒ (ii) 对 $f\in B_{p,q}^\theta$, 由引理 2 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}[n^\theta E_n(f)_p]^q\frac{1}{n}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\big[n^\theta MK_p(f;n^{-\alpha})\big]^q\frac{1}{n}\le\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\big[n^\theta MK_p(f;n^{-\alpha})\big]^q\frac{1}{n}\\ \le&\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\big[2^{(k+1)\theta}MK_p(f;2^{-k\alpha})\big]^q\frac{1}{2^k}\le 2^{\theta q}M^q\sum_{k=0}^{+\infty}(2^{k\theta}K_p(f;2^{-k\alpha}))^q\\ \le& C\int_0^1(t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha}))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[n^{\theta}E_n(f)_p]^q\frac{1}{n}<+\infty$, 则对任意 $\beta>1$ 有

$$I=\int_0^1\left(t^{-\theta}K_p(f;t^{\alpha})\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\le C\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\beta^{k\theta}K_p(f;\beta^{-k\alpha})\right)^q.$$

对 $k\in N$ 选择 n_k 而使

$$\beta^k\le n_k\le\beta^{k+1},\qquad E_{n_k}(f)_p=\min_{\beta^k\le n\le\beta^{k+1}}E_n(f)_p.$$

由引理 2 及 [1] 中的方法得

$$K_p(f;\beta^{-k\alpha})\le E_{n_k}(f)_p+\sum_{m=0}^{k-1}(\beta^{-k}n_{k-m})^{\alpha}M^{m+1}E_{n_{k-m-1}}(f)_p+M^{k+1}(n_0\beta^{-k})^{\alpha}K_p(f;n_0^{-\alpha}).$$

令

$$I_1=\sum_{k=0}^{+\infty}(3\beta^{k\theta}E_{n_k}(f)_p)^q,\qquad I_2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(3\beta^{k\theta}\sum_{m=0}^{k-1}(\beta^{-k}n_{k-m})^{\alpha}M^{m+1}E_{n_{k-m-1}}(f)_p\right)^q,$$

$$I_3=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(3\beta^{k\theta}(\beta^{-k}n_0)^{\alpha}M^{k+1}K_p(f;n_0^{-\alpha})\right)^q.$$

由凸函数的性质得

$$I\le C(I_1+I_2+I_3),$$

$$I_3\le\sum_{k=0}^{+\infty}\left(3\beta^{k\theta}(\beta^{-k}\beta)^{\alpha}M^{k+1}K_p(f;1)\right)^q\le\sum_{k=0}^{+\infty}(3MK_p(f;1)\beta^{\alpha}(\beta^{\theta-\alpha}M)^k)^q.$$

选择 β 而使 $\beta^{\theta-\alpha}M<\frac{1}{2}$, 如令 $\beta>(2M)^{\frac{1}{\alpha-\theta}}$, 则有

$$I_3\le(3MK_p(f;1))^q\beta^{\alpha q}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\beta^{\theta-\alpha}M)^k\right)^q<+\infty$$

及

$$I_1\le\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=\beta^k}^{\beta^{k+1}-1}(3\beta^{k\theta}E_{n_k}(f)_p)^q\frac{\beta}{n}\le\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=\beta^k}^{\beta^{k+1}-1}(3n^{\theta}E_n(f)_p)^q\frac{\beta}{n}$$

$$\le C\sum_{n=\beta}^{+\infty}(3n^{\theta}E_n(f)_p)^q\frac{1}{n}<+\infty.$$

令 $k-m-1=l$, 则

$$I_2\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left(3\beta^{k\theta}\sum_{l=0}^{k-1}(\beta^{-k}\beta^{l+2})^{\alpha}M^{k-l}E_{n_l}(f)_p\right)^q$$

$$\le\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(3\sum_{l=0}^{k-1}\beta^{(k-l)\theta}\beta^{-(k-l)\alpha}\beta^{l\theta}\beta^{2\alpha}M^{k-l}E_{n_l}(f)_p\Big)^q$$
$$\le\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(3\sum_{l=0}^{k-l}\beta^{(k-l)(\theta-\alpha)}M^{k-l}\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p\Big)^q\beta^{2\alpha q}$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(3\sum_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p\Big)^q\beta^{2\alpha q}.$$

不失一般性，令 $0<c=\sum\limits_{l=0}^{\infty}(\beta^{\theta-\alpha}M)^l<+\infty$, 则

$$I_2\le\sum_{k=1}^{+\infty}\Bigg(3\Big[\sum_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}\Big]\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}{\sum\limits_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p\Bigg)^q$$
$$\le\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}{\sum\limits_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}\Big(3\sum_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p\Big)^q$$
$$\le\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=l+1}^{+\infty}\frac{(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}{\sum\limits_{l=0}^{k-1}(\beta^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}(3c\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p)^q\le\sum_{l=0}^{+\infty}(3c\beta^{l\theta}E_{n_l}(f)_p)^q$$
$$\le\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{n^l}(3cn^{l\theta}E_{n_l}(f)_p)^q\le\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l}(3cl^{\theta}E_l(f)_p)^q<+\infty.$$

定理 2 同理可证.

4　注记

令 $\mathrm{Lip}^*(\alpha,s)=\big\{g(x):\int_0^{+\infty}\big(\frac{\omega_r(g;t)_p}{t^\alpha}\big)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty\big\}$ 定义范数

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}^*(\alpha,s)}=\|g\|_p+\Big(\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\omega_r(g;t)_p}{t^\alpha}\Big)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/s}.$$

令 $\mathrm{Lip}(\alpha,s)=\big\{g(x):\int_0^{+\infty}\big(\frac{\omega_\varphi^r(g;t)_p}{t^\alpha}\big)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty\big\}^{1/s}$ 并定义范数

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,s)}=\|g\|_p+\Big(\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\omega_\varphi^r(g;t)_p}{t^\alpha}\Big)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/s}.$$

对 $f\in L_{p(R)}$ 定义 K- 泛函

$$K_{p,s}^*(f;t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}^*(\alpha,s)}\big(\|f-g\|_p+t\|g\|_{\mathrm{Lip}^*(\alpha,s)}\big).$$

对 $f\in L_{p[1,-1]}$ 定义 K- 泛函

$$K_{p,s}(f;t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}(\alpha,s)}\big(\|f-g\|_p+t\|g\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,s)}\big),$$

则 $K^*_{p,\infty}(f,t)=K^*_p(f,t)$ 及 $K_{p,\infty}(f,t)=K_p(f,t)$. 定义 Besov 空间如下：

$$f\in B^{*\theta}_{p,q,s}\Longleftrightarrow\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K^*_{p,s}(f;t^\alpha)\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty,$$

$$f\in B^{\theta}_{p,q,s}\Longleftrightarrow\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K_{p,s}(f;t^\alpha)\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty.$$

由以上的叙述，自然有下面的问题

问题

$$f\in B^{*\theta}_{p,q,s}\Longleftrightarrow\int_0^{+\infty}(\sigma^\theta E_\sigma(f)_p)^q\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}<+\infty,$$

$$f\in B^{\theta}_{p,q,s}\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(n^\theta E_n(f)_p)^q\frac{1}{n}<+\infty.$$

致谢 承蒙西安电子科技大学应用数学系刘三阳教授的指导与关照，作者谨此表示衷心感谢！

参 考 文 献

1 张南松，周定轩． Besov 空间中 Jackson 算子的正逆定理． 应用数学学报, 1994, 17(3): 355–363

2 Bergh J, Lofstrom J. Interpolation Spaces, An Introduction. Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1976, 188–189

3 Kopotun K. A Note on Simulaneous Approximation in $L_p[-1,1]$ ($1\le p<\infty$). *Analysis*, 1995, 15: 151–158

4 Ditzian Z, Hristov V H, Ivanov K G. Moduli of Smoothness and K-functionals in L_p ($0<p<1$). *Constr. Approx.*, 1995, 11: 67–83

5 Ditzian Z, Totik V. Moduli of Smoothness. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag

6 Devore R A, Yu Xiangming. K-functionals for Besov Spaces. *J. of Approx. Theory*, 1991, 67: 38–50

7 刘永平． 全实轴上函数的两种连续模之间的关系． 北京师范大学学报 (自然科学版), 1989, (4): 1–6

ON APPROXIMATION BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS AND ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE IN BESOV SPACES

SHENG BAOHUAI

(*Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xian* 710071)

SHANG ZENKE

(*Department of Mathematics, Baoji College of Arts and Sciences, Baoji* 721007)

Abstract A kind of new Besov space is introduced with K-functional and, respectively, their characterizations are presented with the best approximation degree of nth algebraic polynomials and entire functions of exponential type σ.

Key words Besov spaces, K-functional, modulus of smoothness,
best nth degree algebraic polynomial approximation, entire function