第 26 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 26 No. 1
2003 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2003

一类二维微分差分方程具有多个周期的周期解的一个条件

王东达 孙纪方
(北华大学数学系, 吉林 132013)
沈景清
(通化师范学院数学系, 通化 135000)

摘 要 本文给出二维微分差分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t-1), y(t-1)), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, x(t-1), y(t-1)) \end{cases} \tag{E}$$

具有周期为 $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \frac{4}{2n-3}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, 4$ 的周期解的一个条件, 并在定理的证明过程中给出了如何求出其相应周期解的方法.

关键词 P- 周期解, 关联曲线

1 引言

许多应用较广泛的二维微分差分方程经过适当的变换均可化为方程 (E) 类型. 例如在生态数学模型中著名的 Kolmogorov 模型 [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1F_1\big(N_1(t-1), N_2(t-1)\big), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2F_2\big(N_1, N_2, N_1(t-1), N_2(t-1)\big). \end{cases} \tag{1.0}$$

令 $x = \ln N_1$, $y = \ln N_2$, 就可化为 (E) 类型方程. 研究方程 (E) 的周期解的存在条件以及给出周期解的求法, 无疑是十分重要的.

我们首先给出的:

设 $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}[t_0-1, t_0]$ 表示定义在 $[t_0-1, t_0]$ 上全体实值连续函数所构成的 Banach 空间, 又设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 满足: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{C}(t_0-1, t_0)$, 函数 $f\big(\varphi(t-1), \psi(t-1)\big)$ 在 $[t_0, t_0+1]$ 上 Riemann 可积. 又设 $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 满足: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x(t) \in \mathbb{C}(t_0, t_0+1)$ 和 $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{C}(t_0-1, t_0)$ 都有

$$\big|g\big(x(t), y_1, \varphi(t-1), \psi(t-1)\big) - g\big(x(t), y_2, \varphi(t-1), \psi(t-1)\big)\big| \le L|y_1 - y_2|,$$

$\forall t \in [t_0, t_0+1]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, L 是正常数.

本文 2000 年 4 月 5 日收到. 2001 年 9 月 17 日收到修改稿.

用 $x(t,t_0+n,\varphi,\psi)$, $y(t,t_0+n,\varphi,\psi)$ 表示方程 (E) 以 $\varphi,\psi\in\mathbb{C}[t_0-1,t_0]$ 为初始函数在区间 $[t_0+n-1,t_0+n]$ 上解的表达式，由 f 与 g 所满足的条件易知

$$\begin{cases} x(t,t_0+n,\varphi,\psi)=x(t_0+n-1,t_0+n-1,\varphi,\psi) \\ \quad +\displaystyle\int_{t_0+n-1}^{t} f\big(x(t-1,t_0+n-1,\varphi,\psi),g(t-1,t_0+n-1,\varphi,\psi)\big)\,\mathrm{d}t, \\ y(t,t_0+n,\varphi,\psi)=y(t_0+n-1,t_0+n-1,\varphi,\psi) \\ \quad +\displaystyle\int_{t_0+n-1}^{t} g\big(x(t,t_0+n,\varphi,\psi),y(t,t_0+n,\varphi,\psi),x(t-1,t_0+n-1,\varphi,\psi), \\ y(t-1,t_0+n-1,\varphi,\psi)\big)\,\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{1.1}$$

$\forall\, t\in[t_0+n-1,t_0+n]$.

定义 设 $y=H(x)$ 是一条平面曲线，使得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g\big(x,H(x),x(t-1),H(x(t-1))\big),\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

则称曲线 $y=H(x)$ 是方程 (E) 的一条关联曲线.

本文的主要结果：

定理 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, 满足 $\forall\, t_0\in\mathbb{R}$ 和 $\forall\,\varphi,\psi\in\mathbb{C}(t_0-1,t_0)$, 函数 $f\big(\varphi(t-1),\psi(t-1)\big)$ 在 $[t_0,t_0+1]$ 上都 Riemann 可积，又设 $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, 满足 $\forall\, t_0\in\mathbb{R}$ 和 $\forall\,\varphi,\psi\in\mathbb{C}(t_0-1,t_0)$ 和 $\forall\, x(t)\in\mathbb{C}[t_0,t_0+1]$ 都有

$$\big|g\big(x(t),y_1,\varphi(t-1),\psi(t-1)\big)-g\big(x(t),y_2,\varphi(t-1),\psi(t-1)\big)\big|\le L\,|y_1-y_2|,$$

$\forall\, t\in[t_0,t_0+1]$, $\forall\, y_1,y_2\in\mathbb{R}$, L 是正常数. 再假设微分差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f\big(x(t-1),y(t-1)\big), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g\big(x,y,x(t-1),y(t-1)\big) \end{cases} \tag{E}$$

存在一条关联曲线： $y=H(x)$, 假如 $y=H(x)$ 代入方程 (E) 的第一个方程后，使得函数

$$f\big(x(t-1),y(t-1)\big)\overset{\text{def}}{=}F\big(x(t-1)\big) \tag{1.3}$$

满足下列条件：存在实常数 a,l $(l>0)$ 使得函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $2l$- 周期的有界函数且满足：

(i) $F(a)=0$, $F(x\pm l)=-F(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$;

(ii) $F(x)$ 在 $(a,a+l)$ 内一致连续，$F(x)=F(y)>0$, $y=2a+l-x$, $\forall\, x\in(a,a+l)$, $y\in(a,a+l)$;

(iii) 瑕积分 $\int_a^{a+l}\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}$ 收敛且对于某个固定的自然数 n $(n=1,2,\cdots)$ 有

$$0<d=\int_a^{a+l}\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}\le\frac{1}{2n+1}, \tag{1.4}$$

则方程组 (E) 存在周期为 $\frac{4}{2n+1},\frac{4}{2n-1},\frac{4}{2n-3},\cdots,\frac{4}{7},\frac{4}{5},\frac{4}{3},4$ 的周期解，并且利用构造法可给出相应每个周期的周期解的具体求法.

2 准备知识

设 $F(x)$ 满足定理的条件，则当 $x_k=a+kl$ $(k\in\mathbb{Z})$ 为 $F(x)$ 的间断点时，那么它们为 $|F(x)|$ 的可去间断点，因此，总可以认为 $|F(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上为 l- 周期的连续函数. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 定义

$$\psi_\alpha(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{\alpha-l}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{|F(s)|}-1. \tag{2.0}$$

引理 1.1 由 (2.0) 式所定义的函数 ψ_α 有下列性质：

(i) ψ_α 在 $(\alpha-l,\alpha)$ 上严格单调递增， $\psi_\alpha(\alpha-l)=-1$, $\psi_\alpha(\alpha)=-1+d$;

(ii) 当 $x_0\in(\alpha-l,\alpha)$ 且 $x_0\neq a+kl$ $(k\in\mathbb{Z})$ 时，有

$$\psi'_\alpha(x_0)=\frac{1}{|F(x_0)|};$$

(iii) 当 $x_0\in(\alpha-l,\alpha)$, $x_0=a+kl$ $(k\in\mathbb{Z})$ 时， $|F(x_0)|=0$, 则有 $\psi'_a(x_0)=+\infty$;

(iv) 当 $\alpha=a\pm kl$ $(k\in\mathbb{Z})$ 时

$$\psi'_\alpha(y)=\psi'_\alpha(x),\qquad y=2\alpha+l-x,\qquad x\in(\alpha-l,\alpha).$$

此引理由 $|F(x)|$ 的性质与定义 (2.0) 式可立刻推出，故略去证明.

令 $\widehat{\varphi}_\alpha(t):[-1,-1+d]\to[\alpha-l,\alpha]$ 表示 $\psi_\alpha(x)$ 的反函数，则易见

(i) $\widehat{\varphi}_\alpha(t)$ 在 $[-1,-1+d]$ 上严格单调递增，且 $\widehat{\varphi}_\alpha(-1)=\alpha-l$, $\widehat{\varphi}_\alpha(-1+d)=\alpha$;

(ii)
$$\widehat{\varphi}'_\alpha(t)=\big|F(\widehat{\varphi}_\alpha(t))\big|,\qquad t\in(-1,-1+d); \tag{2.1}$$

(iii) 当 $\alpha=a+kl$ $(k\in\mathbb{Z})$ 时有

$$\widehat{\varphi}'_\alpha(s)=\widehat{\varphi}'_\alpha(t),\qquad s=-2+d-t,\ \ t\in(-1,-1+d). \tag{2.2}$$

3 定理的证明

首先证明方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F\big(x(t-1)\big) \tag{E$_0$}$$

存在 $\frac{4}{2n+1},\frac{4}{2n-1},\frac{4}{7},\frac{4}{5},\frac{4}{3},4$ 的周期解.

当 $d=\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{4k+3}$ $(n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots)$ 时，定义 $\overline{\varphi}:[-1,-1+4d]\to\mathbb{R}$ 如下：当 $t\in[-1,-1+d]$ 时规定

$$\overline{\varphi}(t)\overset{\text{def}}{=}\overline{\varphi}_{a+l}(t),\qquad t\in[-1,-1+d],$$

当 $t\in[-1,-1+2d]$ 时规定

$$\overline{\varphi}(t)\overset{\text{def}}{=}\overline{\varphi}(s),\qquad t=-2+2d-s,\ \ s\in[-1,-1+2d],$$

当 $t\in[-1+2d,-1+4d]$ 时规定

$$\overline{\varphi}(t)\overset{\text{def}}{=}\overline{\varphi}(s),\qquad t=-2+4d-s,\ \ s\in[-1,-1+2d].$$

由 $\overline{\varphi}$ 的定义易见：

(i) $\overline{\varphi}(t)$ 在 $[-1,-1+d]$ 上严格单调递增， $\overline{\varphi}(-1)=a$, $\overline{\varphi}(-1+d)=a+l$; $\overline{\varphi}(t)$ 在 $[-1+d,-1+3d]$ 上严格单调递减, $\overline{\varphi}(-1+d)=a+l$, $\overline{\varphi}(-1+2d)=a$, $\overline{\varphi}(-1+3d)=a-l$; $\overline{\varphi}(t)$ 在 $[-1+3d,-1+4d]$ 上严格单调递增， $\overline{\varphi}(-1+3d)=a-l$, $\overline{\varphi}(-1+4d)=a$;

(ii) 当 $t\in(-1,-1+d)$ 时， $\overline{\varphi}'(t)=F\big(\overline{\varphi}(t)\big)$;

当 $t\in(-1+d,-1+2d)$ 时， $\overline{\varphi}'(t)=-F\big(\overline{\varphi}(t)\big)$;

当 $t\in(-1+2d,-1+3d)$ 时， $\overline{\varphi}'(t)=F\big(\overline{\varphi}(t)\big)$;

当 $t\in(-1+3d,-1+4d)$ 时， $\overline{\varphi}'(t)=-F\big(\overline{\varphi}(t)\big)$;

(iii) $\overline{\varphi}'(t)=\overline{\varphi}'(t)$, $s=-2+d-t$, $t\in(-1,-1+d)$ 或 $s=-2+3d-t$, $t\in(-1+d,-1+2d)$ 或 $s=-2+5d-t$, $t\in(-1+2d,-1+3d)$ 或 $s=-2+7d-t$, $t\in(-1+3d,-1+4d)$.

现将 $\overline{\varphi}$ 以 $4d$ 为周期连续延拓到 $[-1,+\infty)$ 上，并记此函数为 $\widetilde{\varphi}:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 我们定义

$$\varphi_0(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\varphi}(t)\big|_{[-1,0]}.\tag{3.0}$$

用 $\mathbb{C}[-1,0]$, 表示 $[-1,0]$ 上全体实值连续函数所构成的 Banach 空间, 则易见 $\varphi_0\in\mathbb{C}[-1,0]$. 由 $\overline{\varphi}$ 的三条性质可得 φ_0 也具有与其相对应的三条性质. 由于 $(4k+3)d=1$, 故 $\varphi_0(0)=a-l$. $\forall G\in\mathbb{C}[-1,0]$, 我们用 $x(t,0,G)$ 表示方程组 (E_0) 的以 $(0,G)$ 为初始条件的解，用 $x(t,n,G)$ 表示 $x(t,0,G)$ 在 $[n-1,n]$ $(n=1,2,\cdots,)$ 上的表示式，则由引理 1.1 知

$$x(t,n,G)=x(n-1,n-1,G)+\int_{n-2}^{t-1}F\big(x(s,n-1,G)\big)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[n-1,n].\tag{3.1}$$

引理 3.1 设 $d=\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{4k+3}$, $n=2k+1$, $k=0,1,2,\cdots$, 则方程 (E_0) 的以定义 (3.0) 式中的 φ_0 为初始函数的以 $(0,\varphi_0)$ 为初始条件的解 $x(t,0,\varphi)$ 为 $4d=\frac{4}{2n+1}=\frac{4}{4k+3}$ $(n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots)$- 周期解.

证　只须证明 $x(t,0,\varphi_0)=\widetilde{\varphi}(t)$, $\forall t\in[-1,\infty)$, 由 (3.0) 式知 $\varphi_0(t)=\widetilde{\varphi}(t)$, $\forall t\in[-1,0]$, 当 $t\in[0,d]$ 时，注意到 φ_0 的性质，利用 (3.1) 式计算得

$$\begin{aligned}&x(t,1,\varphi_0)=\varphi_0(0)+\int_{-1}^{t-1}F\big(\varphi_0(s)\big)\,\mathrm{d}s\\&=\varphi_0(0)+\int_{-1}^{t-1}\varphi_0(s)\,\mathrm{d}s=\varphi_0(0)+\varphi_0(t-1)-\varphi_0(-1)\\&=(a-l)+\varphi_0(t-1)-a=\widetilde{\varphi}(t-1)-l,\qquad t\in[0,d].\\&x(d,1,\varphi_0)=\widetilde{\varphi}(-1+d)-l=a+l-l=a.\end{aligned}\tag{3.2}$$

由 (3.2) 式知

$$x'(t,1,\varphi_0)=\widetilde{\varphi}'(t-1),\qquad t\in[0,d].\tag{3.3}$$

又由 $\widetilde{\varphi}$ 的定义易知 $\widetilde{\varphi}'(t-1)=\overline{\varphi}'(t)$, $t\in[0,d]$. 于是由 (3.3) 式与 $\widetilde{\varphi}(0)=x(0,1,\varphi_0)$, $\widetilde{\varphi}(d)=x(d,1,\varphi_0)$ 知 $\widetilde{\varphi}(t)=x(t,1,\varphi_0)$, $t\in[0,d]$.

当 $t\in[d,2d]$ 时，注意 $\widetilde{\varphi}$ 的性质，利用 (3.1) 式计算得

$$\begin{aligned}&x(t,1,\varphi_0)=a+\int_{-1+d}^{t-1}F\big(\varphi_0(s)\big)\,\mathrm{d}s=a-\int_{-1+d}^{t-1}\varphi_0'\,\mathrm{d}s\\&=a+\varphi_0(-1+d)-\varphi_0(t-1)=2a+l-\widetilde{\varphi}(t-1),\qquad t\in[d,2d].\end{aligned}\tag{3.4}$$

由 (3.4) 式以及 $\widetilde{\varphi}$ 的性质得

$$x'(t,1,\varphi_0) = -\widetilde{\varphi}'(t-1) = \widetilde{\varphi}'(t), \qquad t \in [d, 2d], \tag{3.5}$$

于是由 (3.5) 式与 $\widetilde{\varphi}(d) = x(d,1,\varphi_0) = a$, $\widetilde{\varphi}(2d) = x(2d,1,\varphi_0) = a+l$ 知 $x(t,1,\varphi_0) = \widetilde{\varphi}(t)$, $t \in [d,2d]$.

然后利用归纳法易证, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 都有

$$x(t,n,\varphi_0) = \widetilde{\varphi}(t), \qquad t \in [n-1, n].$$

故 $x(t,0,\varphi_0) = \widetilde{\varphi}(t)$, $\forall t \in [-1,+\infty)$. 证毕.

引理 3.2 设 $0 < d < \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4k+3}$ $(n = 2k+1,\ k = 0,1,2,\cdots)$, 则方程 (E_0) 存在 $\frac{4}{2n+1} = \frac{4}{4k+3}$ $(n = 2k+1,\ k = 0,1,2,\cdots)$- 周期解.

证 设 $\frac{1}{2n+1} - d = 2\Delta$, 定义 $\overline{\overline{\varphi}}: \big[-1, -1+\frac{4}{2n+1}\big] \to \mathbb{R}$ 如下:

当 $t \in [-1, -1+\Delta]$ 时规定 $\overline{\overline{\varphi}}(t) \equiv a$, 当 $t \in [-1+\Delta, -1+\Delta+d]$ 时规定 $\overline{\overline{\varphi}}(t) = \widehat{\varphi}_{a+l}(t-\Delta)$; 当 $t \in [-1+\Delta+d, -1+2\Delta+d]$ $\big(2\Delta + d = \frac{1}{2n+1}\big)$ 时规定 $\overline{\overline{\varphi}}(t) \equiv a+l$; 当 $t \in \big[-1+\frac{1}{2n+1}, -1+\frac{2}{2n+1}\big]$ 时规定 $\overline{\overline{\varphi}}(t) = -\overline{\overline{\varphi}}(s)$, $t = -2+\frac{2}{2n+1}-s$, $s \in \big[-1, -1+\frac{1}{2n+1}\big]$; 当 $t \in \big[-1+\frac{2}{2n+1}, -1+\frac{4}{2n+1}\big]$ 时规定 $\overline{\overline{\varphi}}(t) = -\overline{\overline{\varphi}}(s)$, $t = -2+\frac{4}{2n+1}-s$, $s \in \big[-1, -1+\frac{2}{2n+1}\big]$.

将 $\overline{\overline{\varphi}}$ 以 $\frac{4}{2n+1}$ 为周期连续延拓到 $[-1,+\infty)$ 的函数记为 $\check{\varphi}[-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, 又定义

$$\check{\varphi}_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\varphi}(t)\big|_{[-1,0]}. \tag{3.6}$$

注意到 $F(a+kl) = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$ 后, 利用引理 3.1 的证明方法可以证明 $x(t,0,\check{\varphi}_0) = \check{\varphi}(t)$, $\forall t \in [-1,+\infty)$, 即方程 (E_0) 有 $\frac{4}{2n+1} = \frac{4}{4k+3}$ $(n = 2k+1,\ k = 0,1,2,\cdots)$- 周期解 $x(t,0,\check{\varphi}) = \check{\varphi}(t)$, 证毕.

引理 3.3 设 $d = \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4k+1}$ $(n = 2k,\ k = 0,1,2,\cdots)$, 则方程 (E_0) 有 $\frac{4}{2n+1} = \frac{1}{4k+1}$ $(n = 2k,\ k = 0,1,2,\cdots)$- 周期解.

证 定义 $\overline{\varphi} =: [-1, -1+4d] \to \mathbb{R}$ 如下, 当 $t \in [-1, -1+d]$ 时规定 $\overline{\psi}(t) = \widehat{\varphi}_{a+2l}(t)$; 当 $t \in [-1+d, -1+2d]$ 时规定 $\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}(s)$, $t = -2+2d-s$, $s \in [-1, -1+d]$; 当 $t \in [-1+2d, -1+4d]$ 时规定 $\overline{\psi}(t) = -\overline{\psi}(s)$, $t = -2+4d-s$, $s \in [-1, -1+2d]$.

将 $\overline{\psi}(t)$ 以 $4d$ 为周期连续延拓到 $[-1,+\infty)$, 记延拓后的函数为 $\psi: [-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, 定义

$$\psi_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(t)\big|_{[-1,0]}. \tag{3.7}$$

利用引理 3.1 的证明方法可以证明 $x(t,0,\psi_0) = \psi(t)$, $\forall t \in [-1,+\infty)$, 即方程 (E_0) 有 $\frac{4}{2n+1} = \frac{4}{4k+1}$ $(n = 2k,\ k = 0,1,2,\cdots)$- 周期解.

引理 3.4 设 $0 < d < \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4k+1}$ $(n = 2k,\ k = 0,1,2,\cdots)$, 则方程 (E_0) 存在 $\frac{4}{2n+1} = \frac{4}{4k+1}$ $(n = 2k,\ k = 0,1,2,\cdots)$- 周期解.

引理 3.4 的证明方法与引理 3.2 的证明方法类同. 故从略.

综合引理 3.1–3.4, 就证明了方程 (E_0) 具有以 $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, 4$ 为周期的周期解, 又因为 $y = H(x)$ 是方程组 (E) 的一条关联曲线, 故方程组 (E) 的第二个方程也必然存在 $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, 4$- 周期解.

在定理的证明过程中, 也给出了求周期解的具体方法.

4 一个实例

例 4.1 考虑微分差分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\sin x(t-1)\big(1-y^2(t-1)\big)^{-\frac{1}{3}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = B\sin x(t)\big(1-y^2(t-1)\big)^{\frac{1}{6}}. \end{cases} \tag{4.0}$$

引理 4.1 当 $B=-A$ 时，由方程

$$y=\cos x \tag{4.1}$$

所决定的曲线 (L) 是方程组 (4.0) 的一条关联曲线.

证　当 $B=-A$ 时，对 (4.1) 式两端关于 t 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{4.2}$$

再将 (4.0) 式的第一个式子代入 (4.2) 式的右端得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A\sin x\cdot\sin x(t-1)\big(1-y^2(t-1)\big)^{-\frac{1}{3}}. \tag{4.3}$$

又因为 $B=-A$, $\sin x(t-1)=\big(1-\cos^2 x(t-1)\big)^{\frac{1}{2}}=\big(1-y^2(t-1)\big)^{\frac{1}{2}}$, 因此便得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = B\sin x(t)\big(1-y^2(t-1)\big)^{\frac{1}{6}}. \tag{4.4}$$

(4.4) 式即为 (4.0) 式的第二个方程，即当 $B=-A$ 时 $y=\cos x$ 所决定的曲线 (L) 是方程组 (4.0) 的一条关联曲线，证毕.

将 $y(t-1)=\cos x(t-1)$ 代入 (4.0) 的第一个方程得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\sin^{\frac{1}{3}} x(t-1). \tag{4.5}$$

引理 4.2 在 $B=-A$ 的条件下，当

$$0<(2n+1)\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big/\Gamma\Big(\frac{5}{6}\Big)\le A<+\infty$$

时，方程 (4.0) 有周期为 $\frac{4}{2n+1},\frac{4}{2n-1},\cdots,\frac{4}{7},\frac{4}{5},\frac{4}{3},4$ 的周期解.

证　设 $F(x)=A\sin^{\frac{1}{3}} x$, 则当 $A>0$ 时，显然有

(i)　$F(0)=0$, $F(x\pm\pi)=-F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

(ii)　显然 $F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上一致连续，且有 $F(x)=F(y)>0$, $y=\pi-x$, $x\in(0,\pi)$;

(iii) 当 $A>0$ 时，由于

$$0<\frac{1}{A}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{\frac{1}{3}}x}=\frac{2}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{3}-1}x\cos^{1-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{A}B\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{A}\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big/\Gamma\Big(\frac{5}{6}\Big).$$

因此当

$$0 < (2n+1)\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big/\Gamma\Big(\frac{5}{6}\Big) \le A < +\infty,$$

便有

$$0 < \frac{1}{A}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{\frac{1}{3}} x} \le \frac{1}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

由上述 (i)-(iii) 知 $F(x)$ 满足定理的一切条件，故由定理知方程 (4.5) 存在周期为 $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, 4$ 的周期解，又因为 $B = -A$ 时，$y = \cos x$ 所决定的曲线 (L) 是方程 (4.0) 的一条关联曲线，从而方程组 (4.0) 存在周期为 $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, 4$ 的周期解．证毕．

参 考 文 献

1 陈兰荪．数学生态学模型与研究方法．北京：科学出版社，1988
(Chen Lansun. The Model of Mathematics Ecodogy and Its Study Means. Beijing: Science Press, 1988)

2 孙纪方．方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t-1))$ 存在周期为 $\frac{4}{3}$ 的周期解的一个条件．数学学报，1990, 33(5): 695–711
(Sun Jifang. A Condition of Existing the Periodic Solution with $\frac{4}{3}$ Period for the Equation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t-1))$. *Acta Math. Sinica*, 1990, 33(5): 695–711)

3 王东达，陈兰荪．二次系统极限环线的 (3,1) 分布．数学学报，1985, 28(3): 407–413
(Wang Dongda, Chen Lansun. (3,1) Contribution of Limit-ring for the Electrical Secondary System. *Acta Math. Sinica*, 1985, 28(3): 407–413)

4 Chen Lansun, Wang Dongda. A Biochemical Oscillation. *Acta Mathematica Scientia*, 1985, 5(3): 261–266

5 陈兰荪，王东达．数学物理学与生态学的结合 — 种群动力学模型．物理，1994, 23: 507–513
(Chen Lansun, Wang Dangda. The Combination Mathematics and Physics with Ecology—the Model of Kind Dynam. *Physics*, 1994, 23: 507–513)

EXISTENCE OF MANYPERIODIC SOLUTIONS TO THE TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS

WANG DONGDA SUN JIFANG
(*Department of Mathematics, Beihua University, Jinlin* 132013)

SHEN JINGQING

(*Department of Mathematics, Teacher's College of Tonghua, Tonghua* 135000)

Abstract In this paper, using for the most pare geometric methods, anthors study centers around mang periodic solutions to the two-dimensional differential difference equations as follows

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\big(x(t-1), y(t-1)\big), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g\big(x, y, x(t-1), y(t-1)\big). \end{cases} \tag{E}$$

Then the equations (E) has $\frac{4}{2n+1}, \frac{4}{2n-1}, \cdots, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}$, 4-periodic solutions.

Key words P-periodic, invariance curve