图象拓扑下的Ky Fan引理解集的本质连通区及其在对策论上的应用*

周永辉
(浙江大学数学系，杭州 310027)
(yonghuizhou@163.com)

向淑文
(贵州大学数学系，贵阳 550025)

摘 要 本文在集值映射的图象拓扑意义下，证明了赋范线性空间中的 Ky Fan 引理的解集的本质连通区的存在性，由此得到一类对策的 Nash 平衡点集的本质连通区的存在性.

关键词 图象拓扑； Ky Fan 引理的解； Nash 平衡； 本质连通区
MR(2000) 主题分类 47H04; 49J40
中图分类 O177

1 引言

1950 年， Fort[1] 为了研究连续映射不动点的稳定性，引入了本质不动点的概念. 但是，并不是所有的连续映射存在本质不动点. 1952 年， Kinoshita[2] 从 "集值解" 的稳定性角度出发，引入了本质连通区的概念，并证明了对于任意 Hilbert 立方体到自身的连续映射，其不动点集合至少存在一个本质连通区. Wu 和 Jiang [3] 在 1962 年， Jiang[4] 在 1963 年，成功地将这些方法应用于有限 n 人非合作对策理论之中，先后提出了基于支付函数在一致度量扰动下的本质 Nash 平衡点和 Nash 平衡点集连通区的概念. 1999 年， Yu 和 Xiang[5] 借助于 Ky Fan 点集的本质连通区的存在性，进一步证明了一般非合作对策 Nash 平衡点集的本质连通区的存在性.

1990 年， Hillas[6] 没有直接考虑有限 n 人非合作对策的支付的变化，而是引入了对策的最优反应集值映射及其 Hausdorff 一致度量，弥补了 Kohlberg 和 Mertens[7] 在 1986 年对 Nash 平衡点稳定集进行公理化研究时的不足. 2001 年， Xiang 和 Yang[8] 指出，引入集值映射的图象拓扑，更有利于研究映射及其定义域或更多的因素都发生变化时的解稳定性问题，因为在集值映射或函数空间的一致度量拓扑下讨论的稳定性，不会考虑定义域的变化. 实际上， [8] 中的例子还意味着，即使定义域不发生变化，集值映射的图象收敛也严格弱于集值映射的一致度量收敛，因此，集值映射的图象拓扑允许比集值映射的一致度量拓扑有更大的扰动类.

本文将在集值映射的图象拓扑意义下，证明 Ky Fan 引理 [9] 的解集的本质连通区

本文 2003年 7 月 3 日收到. 2004 年 4 月 7 日收到修改稿.
* 贵州省自然科学基金，贵州省优秀人才省长专项基金资助项目

的存在性，并由此得到一类对策的 Nash 平衡点集的本质连通区的存在性. 同时指出，由于拓扑结构的不同，这里的结果与 Yu 和 Xiang[5] 的结果互不包含.

2 预备知识

下面引入关于集值映射的连续性概念和本质集的概念，有关内容可参见 [3–5, 10,11].

设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间，2^Y 表示 Y 中所有非空子集. 对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $A\in 2^Y$，记 $U(\varepsilon,A)=\{y\in Y:$ 存在 $u\in A$ 使 $\rho(u,y)<\varepsilon\}$. $F:X\to 2^Y$ 是一个集值映射，$x\in X$.

定义 2.1 (1) 如果对 Y 中的任意开集 G，$G\supset F(x)$，存在 x 在 X 中的开邻域 O，使对任意 $x'\in O$，有 $G\supset F(x')$，则称 F 在 x 是上半连续的；(2) 如果对 Y 中的任意开集 G，$G\cap F(x)\neq\emptyset$，存在 x 在 X 中的开邻域 O，使对任意 $x'\in O$，有 $G\cap F(x')\neq\emptyset$，则称 F 在 x 是下半连续的；(3) 如果 F 在 x 既上半连续又下半连续，则称 F 在 x 是连续的；(4) 如果对任意 $x\in X$，$F(x)$ 是紧集，且 F 在 x 是上半连续的，则称 F 是一个 usco 映射.

注 2.1 如果对任意 $x\in X$，$F(x)$ 是紧集合，由 [12] 中的定理 7.1.11 和 7.1.14，则 (1) F 在 x 上半连续当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $d(x,x')<\delta$ 时，有 $F(x')\subset U(\varepsilon,F(x))$；(2) F 在 x 下半连续当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $d(x,x')<\delta$ 时，有 $F(x)\subset U\big(\varepsilon,F(x')\big)$；(3) F 在 x 连续当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $d(x,x')<\delta$ 时，有 $h\big(F(x),F(x')\big)<\varepsilon$，其中 h 是 Y 上的 Hausdorff 距离.

定义 2.2 (1) 称 $F(x)$ 的非空闭子集 $e(x)$ 是本质的，如果对 Y 中的任意开集 U，$U\supset e(x)$，存在 $\delta>0$，使当 $d(x,x')<\delta$ 时，有 $U\cap F(x')\neq\emptyset$；(2) 如果 $F(x)$ 的本质集合 $m(x)$ 是 $F(x)$ 中的所有本质集合按包含关系为序的极小元，则称 $m(x)$ 是 $F(x)$ 的极小本质集合.

定义 2.3 (1) 对任意 $y\in F(x)$，所有包含 y 的连通子集的并集 (必是连通的) 称为 $F(x)$ 的一个连通区 (分支)；(2) 如果 $F(x)$ 的一个连通区 (分支)C 是本质的，则称 C 为 $F(x)$ 的一个本质连通区 (分支).

引理 2.1[13] 设 X,Y,Z 为度量空间，$F_1:X\to 2^Y$ 是一个集值映射，$F_2:Z\to 2^Y$ 是一个集值映射，存在单值连续映射 $T:Z\to X$，使对任意 $z\in Z$，有 $F_2(z)\supset F_1(T(z))$，则如果对任意 $x\in X$，$F_1(x)$ 存在一个本质连通区，那么对任意 $z\in Z$，$F_2(z)$ 存在一个本质连通区.

注 2.2 在 [13] 中的条件 "$F_1:X\to 2^Y$ 是一个 usco 集值映射" 在证明该结论时是不必要的，因而被删去.

3 主要结果

3.1 Ky Fan 引理解集的本质连通区

Ky Fan **引理**[9] 设 K 为赋范空间 $\big(X,\|\cdot\|\big)$ 的非空紧凸子集，$E\subset K\times K$ 满足：(1) E 是闭集；(2) 对每一个 $x\in K$，$(x,x)\in E$；(3) 对每一个 $y\in K$，$\big\{x\in K:(x,y)\notin E\big\}$ 是凸集或空集，则 $\{y^*\in K:K\times\{y^*\}\subset E\}$ 是非空紧集.

注 3.1 在 [9] 中的空间条件是 Hausdoff 线性拓扑空间，而不是赋范线性空间. 我们这里的目的是便于定义集合间的 Hausdorff 距离 (从而得到一类对策的 Nash 平衡点集本质连通区，见下面的第 3.2 小节).

我们称 y^* 为 Ky Fan 引理中的问题 E 的解，简称 Ky Fan 引理的解. 设 $\mathcal{M}$ 为所有

这些问题 E 的集合，并在 $\mathcal{M}$ 上定义距离

$$\rho(E_1,E_2)=h(E_1,E_2)=\max\Big\{\sup_{x\in E_1}d(x,E_2),\ \sup_{x\in E_2}d(x,E_1)\Big\},\qquad \forall\, E_1,E_2\in M.$$

这里，h 是定义在 $K\times K$ 上的 Hausdorff 距离，$d(x,E)=\inf_{y\in E}d(x,y)$ 表示点 $x\in X\times X$ 到集合 $E\subset X\times X$ 之间的距离，$d(x,y)=\|x_1-y_1\|+\|x_2-y_2\|$ 表示 $X\times X$ 中两点 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$ 之间的距离，则 $(\mathcal{M},\rho)$ 是一个度量空间．我们称 $(\mathcal{M},\rho)$ 所诱导的拓扑为 Hausdorff 图象拓扑．

注 3.2 (1) 对每一个 $E\in\mathcal{M}$，由于对每一个 $x\in K$，$(x,x)\in E$，所以对每一个 $x\in K$，$E(x)=\{y\in K:(x,y)\in E\}\neq\emptyset$．这样，实际上定义了一个集值映射 $E:K\to 2^K$，而 E 就是该集值映射的图象 — 这正是我们称 $(\mathcal{M},\rho)$ 所诱导的拓扑为图象拓扑的由来．
(2) 由于 E 是紧子集 $K\times K$ 的闭子集，所以对每一个 $x\in K$，$E(x)$ 是 K 中的非空紧子集，因此我们也可以直接在集合 $\mathcal{M}$ 上引入比图象拓扑度量更强的集值映射一致拓扑度量，即 $\rho_u(E_1,E_2)=\sup\limits_{x\in K}h\big(E_1(x),E_2(x)\big)$，参见 [6] 或者 [8]．注意 [8] 中还指出，确实存在图象拓扑收敛而一致拓扑度量不收敛的例子．

对每一个 $E\in\mathcal{M}$，设 $F(E)$ 为 E 的所有解的集合，简称 Ky Fan 引理的解集．这样就定义了一个集值映射 $F:\mathcal{M}\to 2^K$，且 $F(E)$ 是 K 的一个非空紧子集．

引理 3.1 $F:\mathcal{M}\to 2^K$ 是一个 usco 映射．

证 由于 K 是紧的，根据 [10] 中的系 9 (111 页)，我们只须证明 F 是闭的即可．即要证明如果对任意 $\{E^n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$，$E^n\to^{\rho}E\in\mathcal{M}$，对任意 $y^n\in F(E^n)$，$y^n\to^{d}y$，那么 $y\in F(E)$．

任取 $x\in K$，由 $y^n\in F(E^n)$，有 $(x,y^n)\in E^n$．由 [12] 定理 2.5.17，存在 $\{(x,y^n)\}$ 的聚点 $(x',y')\in E$．显然，有 $(x,y^n)\to^{d}(x,y)\in K\times K$．根据极限的唯一性，必有 $(x',y')=(x,y)\in E$．

由 $x\in K$ 的任意性，有 $y\in F(E)$．证毕．

为了得到本质连通区的存在性，再给出下面两个引理．

引理 3.2 对每一个 $E\in\mathcal{M}$，$F(E)$ 至少存在一个极小本质集合．

证 任取 $E\in\mathcal{M}$．由引理 3.1，F 在 E 是上半连续紧值的，所以对任意 X 中的开集 $G\supset F(E)$，存在 E 的一个开邻域 $U\subset X\times X$，使对任意的 $E'\in U$，有 $F(E')\subset G$，显然 $F(E')\cap G\neq\emptyset$，从而 $F(E)$ 是它本身的一个本质集．设 $\mathcal{N}$ 是 $F(E)$ 的所有本质集的集合，则 $\mathcal{N}\neq\emptyset$．在 $\mathcal{N}$ 中以包含关系为序，它是一个半序集合．对 $\mathcal{N}$ 的任意一个递减链 $\mathcal{L}$，由于 $\mathcal{L}$ 的每一个成员是紧集，故 $\mathcal{L}$ 中的所有成员之交非空，因而 $\mathcal{L}$ 有下界．由 Zorn 引理，$\mathcal{N}$ 中必有极小元，且此极小元即为 $F(E)$ 的极小本质集．

引理 3.3 对每一个 $E\in\mathcal{M}$，$F(E)$ 的极小本质集合是连通的．

证 任取 $E\in\mathcal{M}$．由引理 3.2，设 $m(E)$ 是 $F(E)$ 的极小本质集．下面证明 $m(E)$ 是连通的．

反证法 若 $m(E)$ 不连通，则存在 $F(E)$ 的两个非空不交的非本质紧子集 C_1,C_2，使得 $m(E)=C_1\cup C_2$．因 X 是正规空间，故存在两个不交的开集 V_1,V_2 使得：(1) $V_1\supset C_1$，$V_2\supset C_2$; (2) $\inf\big\{d(x,y):x\in G_1,y\in G_2\big\}=\varepsilon>0$，其中 $G_1=K\times V_1,G_2=K\times V_2$ 为 $K\times K$ 中的两个不交的开集．

一方面，因为 $m(E)$ 是本质集，所以对开集 $V_1\cup V_2\supset m(E)$，存在 $\varepsilon^*>0(\varepsilon^*<\varepsilon)$，当 $\rho(E,E')<\varepsilon^*$ 时，$F(E')\cap(V_1\cup V_2)\neq\emptyset$．

另一方面，因为 C_1,C_2 不是本质集，所以对 $\frac{\varepsilon^*}{4}>0$，存在 $E_1,E_2\in\mathcal{M}$，满足 $\rho(E,E_1)<\frac{\varepsilon^*}{4}$，$\rho(E,E_2)<\frac{\varepsilon^*}{4}$，但是 $F(E_1)\cap V_1=\emptyset$，$F(E_2)\cap V_2=\emptyset$．易知 $\rho(E_1,E_2)<\frac{\varepsilon^*}{2}$．

现在构造 $E'=(E_1\setminus G_2)\cup(E_2\setminus G_1)$ 来导致矛盾．

(1) $E' \in \mathcal{M}$. 因为 (i) 显然 E' 是闭集. (ii) 对每一个 $x \in K$, $(x,x) \in E'$ 成立. 否则, 存在 $(x_0,x_0) \notin (E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)$. 由于 $(x_0,x_0) \in E_1 \cap E_2$, 必有 $(x_0,x_0) \in G_1 \cap G_2$, 这与构造中的 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ 矛盾. (iii) 对每一个 $y \in K$, $\{x \in K : (x,y) \notin E'\} = \{x \in K,\ (x,y) \in (E_1^c \cup G_2) \cap (E_2^c \cup G_1)\}$ 是凸集或空集成立. 事实上, 如果 $y \in V_1 \cap K$, 则 $\{x \in K : (x,y) \notin E'\} = \{x \in K,\ (x,y) \in (E_1^c \cup G_2) \cap (E_2^c \cup G_1)\} = \{x \in K : (x,y) \in E_1^c\}$ 是凸集或空集; 如果 $y \in V_2 \cap K$, 则 $\{x \in K : (x,y) \notin E'\} = \{x \in K : (x,y) \in E_2^c\}$ 是凸集或空集; 如果 $y \in V_1^c \cap V_2^c \cap K$, 则 $\{x \in K : (x,y) \notin E'\} = \{x \in K : (x,y) \in E_1^c\} \cap \{x \in K : (x,y) \in E_2^c\}$ 仍是凸集或空集.

(2) $F(E') \cap (V_1 \cup V_2) = \emptyset$. 如若不然, 设有 $y_0 \in K$, 使得 $y_0 \in F(E') \cap (V_1 \cup V_2)$. 于是总有 $y_0 \in V_1 \cup V_2$. 不妨设 $y_0 \in V_1$. 由于 $F(E_1) \cap V_1 = \emptyset$, 则 $y_0 \notin F(E_1)$. 于是存在 $x_0 \in K$, 使得 $(x_0,y_0) \notin E_1$, 从而 $(x_0,y_0) \notin E_1 \setminus G_2$. 因为 $y_0 \in F(E')$, 所以 $(x_0,y_0) \in E_2 \setminus G_1$. 于是 $(x_0,y_0) \notin G_1$, 必有 $y_0 \notin V_1$. 矛盾.

(3) $\rho(E,E') < \varepsilon^*$. 只须证明 $\rho(E_1,E') < \frac{\varepsilon^*}{2}$ 即可, 因为 $\rho(E,E') \le \rho(E,E_1) + \rho(E_1,\ E') < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{2} < \varepsilon^*$. 事实上, (i) $\sup\{d(x,E_1) : x \in (E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\} < \frac{\varepsilon^*}{2}$ 成立. 因为如果 $x \in E_1 \setminus G_2$, 则 $d(x,E_1) = 0$; 如果 $x \in E_2 \setminus G_1$, 则 $d(x,E_1) \le \rho(E_2,E_1) < \frac{\varepsilon^*}{2}$. (ii) $\sup\{d\big(x,(E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\big) : x \in E_1\} < \frac{\varepsilon^*}{2}$ 成立. 因为如果 $x \in E_1 \setminus G_2$, $d\big(x,(E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\big) = 0$; 如果 $x \in E_1 \cap G_2$, 则 $x \notin G_1$, 由假定, 对每一个 $z \in G_1$, $d(x,z) \ge \varepsilon > \frac{\varepsilon^*}{2}$, 注意到 $d(x,E_2) \le \rho(E_1,E_2) < \frac{\varepsilon^*}{2}$, 所以 $d(x,E_2 \setminus G_1) = \inf\{d(x,z) : z \in E_2 \setminus G_1\} = \inf\{d(x,z) : z \in E_2\} = d(x,E_2)$, 从而 $d\big(x,(E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\big) \le d(x,E_2 \setminus G_1) = d(x,E_2) \le \rho(E_1,E_2) < \frac{\varepsilon^*}{2}$. 由 (i), (ii), 有 $\rho(E_1,E') = \max\{\sup\{d(x,E_1) : x \in (E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\},\ \sup\{d\big(x,(E_1 \setminus G_2) \cup (E_2 \setminus G_1)\big) : x \in E_1\}\} < \frac{\varepsilon^*}{2}$.

综合 (1)–(3), 与 $m(E)$ 是本质的假设相矛盾. 这表明极小本质集 $m(E)$ 是连通的. 证毕.

定理 3.1 对每一个 $E \in (\mathcal{M},\rho)$, 存在 Ky Fan 引理解集 $F(E)$ 的一个本质连通区.

证 任取 $E \in \mathcal{M}$, 根据 [14] 中的 356 页, 非空紧集 $F(E)$ 可以分解为两两不交的紧的连通区 $C_\alpha(\alpha \in \Lambda, \Lambda$ 为指标集合) 的和集, 记为 $F(E) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$. 由引理 3.2 和引理 3.3, $F(E)$ 中存在一个连通的极小本质集合 $m(E)$, 则 $m(E)$ 必包含于 $F(E)$ 的某一连通区 C_α 中. 按定义即可验证 C_α 就是 $F(E)$ 的一个本质连通区. 证毕.

我们知道, $(\mathcal{M},\rho_u)$ 的拓扑强于 $(\mathcal{M},\rho)$ 的拓扑 (见注 3.2), 根据引理 2.1, 令 $X = Z = \mathcal{M}$, $Y = K$, $F_1 = F_2 = F$, $T = I : (\mathcal{M},\rho_u) \to (\mathcal{M},\rho)$ 为单位映射 (连续), 有如下推论.

推论 3.1 对每一个 $E \in (\mathcal{M},\rho_u)$, 存在 Ky Fan 点集 $F(E)$ 的一个本质连通区.

3.2 Nash 平衡点集本质连通区

作为应用, 在这一节中, 我们将证明: 对于一类 n 人非合作对策, 每一个对策至少存在 Nash 平衡点集的本质连通区.

设 $I = \{1,\cdots,n\}$ 为局中人的集合. 对每一个局中人 $i \in I$, X_i 为其策略集合, $f_i : X = \Pi_{i=1}^n X_i \to \mathcal{R}$ 为支付函数. 对每一个 $i \in I$, 记 $X_{\hat{i}} = \Pi_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$. 如果 $x = (x_1,\cdots,x_n) \in X$, 记 $x_{\hat{i}} = (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n) \in X_{\hat{i}}$. $x^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*) \in X$ 称为一个 Nash 平衡点, 如果对每一个 $i \in I$,

$$f_i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \max_{u_i \in X} f_i(u_i, x_{\hat{i}}^*).$$

引理 3.4[15] 设 $\Gamma=(X_1,\cdots,X_n;f_1,\cdots,f_n)$ 为 n 人对策，满足：(1) 对每一个 $i\in I$, X_i 为赋范空间的非空凸紧集;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ 在 X 上是上半连续的;

(3) 对每一个 $i\in I$, f_i 在 X 上是下半连续的;

(4) 对每一个 $i\in I$ 和每一个固定的 $x_{\hat{i}}\in X_{\hat{i}}$, 函数 $u_i\to f_i(u_i,x_{\hat{i}})$ 在 X_i 是凹的.

则 Γ 有一个 Nash 平衡.

注 3.3 这里的引理 3.4 是 [15] 的定理 2.2 的一个推论.

记对策 Γ 的所有 Nash 平衡点集为 $N(\Gamma)$. 实际上, $N(\Gamma)=\bigcap\limits_{x\in X}\big\{y\in X:\sum\limits_{i=1}^{n}\big[f_i(x_i,y_{\hat{i}})-f_i(y_i,y_{\hat{i}})\big]\le 0\big\}$. 由条件 (2) 和 (3), $N(\Gamma)$ 是非空紧集合. 记所有这种对策的集合为 $\mathcal{G}$. 这样就定义了一个从 $\mathcal{G}$ 到 2^X 的集值映射 $N:\mathcal{G}\to 2^X$. 记 $E_\Gamma=\big\{(x,y)\in X\times X:\sum\limits_{i=1}^{n}\big[f_i(x_i,y_{\hat{i}})-f_i(y_i,y_{\hat{i}})\big]\le 0\big\}$.

引理 3.5 对每一个 $\Gamma\in\mathcal{G}$, $E_\Gamma\in\mathcal{M}$.

证　任取 $\Gamma\in\mathcal{G}$.

(i) 显然对任意 $x\in X$, $(x,x)\in E_\Gamma$ 成立.

(ii) 由条件 (4) 的凹性，对任意 $y\in X$, $\{x\in X,\ (x,y)\notin E_\Gamma\}=\big\{x\in X:\sum\limits_{i=1}^{n}\big[f_i(x_i,y_{\hat{i}})-f_i(y_i,y_{\hat{i}})\big]>0\big\}$ 是凸集.

(iii) E_Γ 是闭集成立. 只须证明：如果 $(x,y)\notin E_\Gamma$, 则存在 (x,y) 的一个邻域 $O(x,y)$, 使得 $O(x,y)\cap E_\Gamma=\emptyset$. 事实上，如果 $(x,y)\notin E_\Gamma$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\big[f_i(x_i,y_{\hat{i}})-f_i(y_i,y_{\hat{i}})\big]>0$, 由条件 (2) 和 (3), $\sum\big[f_i(x_i,y_{\hat{i}})-f_i(y_i,y_{\hat{i}})\big]$ 关于 $(x,y)\in X\times X$ 是下半连续的，从而存在 (x,y) 的邻域 $O(x,y)$, 使得对任意 $(x',y')\in O(x,y)$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\big[f_i(x_i',y_{\hat{i}}')-f_i(y_i',y_{\hat{i}}')\big]>0$. 于是 $O(x,y)\cap E_\Gamma=\emptyset$, 从而 E_Γ 是闭的.

综上所述，$E_\Gamma\in\mathcal{M}$. 证毕.

容易验证，对每一个 $\Gamma\in\mathcal{G}$, x^* 是 Γ 的 Nash 平衡点当且仅当 $X\times\{x^*\}\subset E_\Gamma$. 所以，存在唯一的 $E_\Gamma\in\mathcal{M}$. 这样，定义了一个从对策空间 $\mathcal{G}$ 到空间 $\mathcal{M}$ 的一个单值映射，记为 $T(\Gamma)=E_\Gamma$. 显然对任意 $\Gamma\in\mathcal{G}$, 有 $N(\Gamma)=F(T(\Gamma))$.

我们在对策空间 $\mathcal{G}$ 中引入距离

$$\varrho(\Gamma_1,\Gamma_2)=\rho(E_{\Gamma_1},E_{\Gamma_2}),\qquad \forall\,\Gamma_1,\Gamma_2\in\mathcal{G},$$

称它所诱导的拓扑为对策空间 $\mathcal{G}$ 的集值映射图象拓扑 (见注 3.2).

定理 3.2 对每一个对策 $\Gamma\in(\mathcal{G},\varrho)$, 至少存在 Nash 平衡点集 $N(\Gamma)$ 的一个本质连通区.

证　由于 T 是从对策空间 $(\mathcal{G},\varrho)$ 到空间 $(\mathcal{M},\rho)$ 的一个等距映射，从而连续. 根据引理 2.1 和定理 3.1, 可得定理 3.2.

类似地，如果我们在对策空间引入集值映射一致拓扑度量 (见注 3.2)

$$\varrho_u(\Gamma_1,\Gamma_2)=\rho_u(E_{\Gamma_1},E_{\Gamma_2}),$$

那么，类似推论 3.1, 有下面的结果.

推论 3.2 对每一个对策 $\Gamma\in(\mathcal{G},\varrho_u)$, 至少存在 Nash 平衡点集 $N(\Gamma)$ 的一个本质连通区.

3 评注

这里的定理 3.2 (包括推论 3.2) 与 [3] 中的定理 4.3 是互不包含的. 这里的本质连通区是基于我们所给定对策的集值映射图象拓扑 $(\mathcal{G},\varrho)$ 扰动下的结果; 而 [3] 中的定理 4.3 的本质连通区的存在性是基于对策的支付向量空间的一致度量拓扑 $(C,\boldsymbol{d})$ 的, 其中 $\boldsymbol{d}(\Gamma_1,\Gamma_2)=\sup\limits_{x\in X}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|f_i(x)-g_i(x)\right|$. 下面的例子表明, 对策空间的图象拓扑与支付向量空间的一致度量拓扑之间是没有强弱对比关系的. 另外注意到这里的对策空间 $\mathcal{G}$ 可以允许两个对策间的支付向量的一致距离无界.

例 设有二人对策: 策略空间为 $X=[0,1]\times[0,1]$, $[0,1]$ 上的范数为最大模范数; 对策空间为 $\mathcal{G}=\{\Gamma:\Gamma$ 是满足引理 3.4 的条件而且两对策的支付向量间的一致距离有界 $\}$. 取一个对策 $\Gamma\in\mathcal{G}$, 其支付向量为 $f=(f_1,f_2)=(0,0)$. 按第 3.2 小节的记号, 则 $E_\Gamma=X\times X$.

(1) 一致拓扑收敛但图象拓扑不收敛. 对于 $n=1,2,\cdots$, 取对策 Γ^n 的支付向量为 $f^n=\left(\frac{1}{n}x_1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}x_1-\frac{1}{n}\right)$, 则 $E_{\Gamma^n}=\left\{\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right):(y_1,y_2)\in[x_1,1]\times[0,1],\ (x_1,x_2)\in X\times X\right\}$. 容易验证 $\boldsymbol{d}(\Gamma_n,\Gamma)=\frac{2}{n}\to 0$, 但是 $\varrho(\Gamma_n,\Gamma)=1$.

(2) 一致拓扑不收敛但图象拓扑收敛. 对于 $n=1,2,\cdots$, 取对策 Γ^n 的支付向量为 $f^n=(1,1)$, 则 $E_{\Gamma^n}=X\times X$. 容易验证 $\boldsymbol{d}(\Gamma_n,\Gamma)=2$, 但是 $\varrho(\Gamma_n,\Gamma)=0$.

致谢 作者感谢贵州省科技厅俞建教授和贵州大学杨辉博士.

参 考 文 献

[1] Fort M K. Essential and Nonessential Fixed Points. *Amer. J. Math.*, 1950, 72: 315–322

[2] Kinoshita S. On Essential Components of the Set of Fixed Points. *Osaka J. Math.*, 1952, 4: 19–22

[3] Wu Wen-tsun, Jiang Jia-he. Essential Equilibrium Points of n-person Non-cooperative Games. *Sci. Sinica*, 1962, 11: 1307–1322

[4] Jiang jia-he. Essential Component of the Set of Fixed Points of the Multivalued Mappings and Its Application to the Theory of Games (Ⅱ). *Sci. Sinica*, 1963, 12: 951–964

[5] Yu J, Xiang S W. On Essential Component of the Set of Nash Equilibrium Points. *Nonliear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1999, 38: 259–264

[6] Hillas J. On the Definition of the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica*, 1990, 58: 1365–1391

[7] Kohlberg E, Mertens J F. On the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica*, 1986, 54: 1003–1037

[8] 向淑文, 杨辉. 集合映象的图象拓扑与不动点的通有稳定性. 应用数学学报, 2001, 24: 221–226 (Xiang S W, Yang H. The Graph Topology of Set-valued Mappings and the Generic Stability of Fixed Points. *ACTA Mathematicae Applicatae Sinica*, 2001, 24(2): 221–226)

[9] Fan K. A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Therom. *Math. Ann.*, 1961, 142: 305–310

[10] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1984

[11] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991 (Zhang S S. Variational Inequality and Complementarity Problem Theory with Applications. Shanghai: Shanghai science and technology Leterature Press, 1991)

[12] Klein E, Thompson A C. Theory of Correspondences. New York: John Wiley & Sons, 1984

[13] Yang H, Yu J. On Essential Components of the Set of Weakly Pareto-Nash Equilibrium Points. *Applied Math. Letters*, 2002, 15: 553–560

[14] Engelking R. General Topology. Warsaw: Polish Scientific, 1977

[15] Tan K K, Yu J, Yuan X Z. Existence Theorems of Nash Equilibria for Non-cooperative Games. *Intern. J. Game Theory*, 1995, 24: 217–222

THE EXISTENCE OF ESSENTIAL COMPONENTS OF THE SET OF SOLUTIONS OF KY FAN'S LEMMA AND ITS APPLICATIONS TO GAME THEORY

ZHOU YONGHUI

(*Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
(*E-mail: yonghuizhou@163.com*)

XIANG SHUWEN

(*Department of Mathmatics, Guizhou University, Guiyang* 550025)

Abstract We prove that for all problems of Ky Fan's Lemma in normed vector space there exists at least one essential component of the set of solutions of Ky Fan's Lemma. As a consequence, we deduce that for any general n-person game with some convexity and continuity conditions, there exists at least one essential component of the set of Nash equilibrium points.

Key words graph topology; Nash equilibrium; Ky Fan's Lemma, essential component

MR(2000) Subject Classification 47H04; 49J40
Chinese Library Classification O177