文章编号:1004-5694(2001)04-0084-02

Liénard 系统比较定理

周云华
(重庆邮电学院,重庆 400065)

摘 要:运用 Poincáre-Bendixson 环域定理得到了 Liénard 系统的两个比较定理,运用方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 的闭轨的存在性可以判定方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)h(\dot{x})=0$ 及系统 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\dot{y}=-g(x)$ 的闭轨的存在性。

关键词:Liénard 系统;Poincáre-Bendixson 环域定理;比较定理
中图分类号:O175　　**文献标识码**:A

Comparative Theorem of Liénard System

ZHOU Yun-hua
(*Institute of Computer Science & Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)

Abstract: In this paper the author uses the Poincráe-Bendixson ring domain theorem to get two comparative theorems, using equation: $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$, in the existence of closed orbits for equation: $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)h(\dot{x})=0$ and system $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$ can be determined.

Key words: Liénard system; Poincráe-Bendixson ring domain theorem; comparative theorem

1 引言及定理

Liénard 系统闭轨(周期解)存在性的研究无论在应用上还是在理论上都很重要。广义 Liénard 系统主要有以下一些类型:

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \qquad (H_z)$$

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)h(\dot{x})=0 \qquad (H_y)$$

$$\ddot{x}+h(x,\dot{x})+g(x)=0 \qquad (H_c)$$

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\ \dot{y}=-g(x) \qquad (H_m)$$

对以上系统的闭轨研究有较多结果的是(H_z),而其它类型的闭轨的研究就困难得多,相应结果也就较少,因而建立系统间的比较定理显得十分必要。

施宇鸣在文献[1]中建立了(H_z)与(H_c)的一个比较原理。主要是构造了 Poincáre 环境。笔者用类似的方法建立(H_z)与(H_y)及(H_z)与(H_m)的比较定理。

全文约定:$f(0)<0$,且 $x\neq 0$ 时,$xg(x)>0$. 下面介绍本文的主要结果。

定理 1 若 $f(x),g(x),\varphi(y)$连续,并满足以下条件:

① $y\neq 0$ 时,$y\varphi(y)>0$;

② $\varphi(y)<y\quad(x>0)$; $\varphi(y)>y\quad(x<0)$.

则系统(H_z)存在闭轨时,系统(H_m)亦存在闭轨。

定理 2 若 $f(x),g(x),h(y)$连续,且 $x>0$ 时,

$$(y-F(x))(1-h(y))<0,$$

$$y(1-h(y))-F(x)>0$$

当 $x<0$ 时,

收稿日期:2000-10-08
作者简介:周云华(1978-),男,四川武胜人,助教,主要从事微分方程定性理论的研究。

$$(y - F(x))(1 - h(y)) > 0,$$
$$y(1 - h(y)) - F(x) < 0$$

则系统(H_z)存在闭轨时，系统(H_y)亦存在闭轨。

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

系统(H_z)经 Liénard 变换后可化为：

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x)$$

其中，$F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $\Gamma: \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ 是系统(H_z)的闭轨。由条件易知[1] Γ 顺时针环绕原点。设 $P(x_0, y_0) \in \Gamma$，则 Γ 上 P 点的外切法向量为：

$$\boldsymbol{\alpha} = (g(x_0), y_0 - F(x_0))$$

而系统(H_m)在 P 点的向量场向量(如图 1)为：

$$\boldsymbol{\beta} = (\varphi(y_0) - F(x_0), -g(x_0))$$

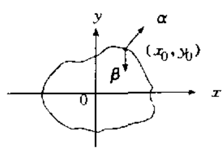

图1 系统(H_m)在P点的向量场

Fig. 1 The vector field of system(H_m) at p

由于 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = g(x_0)(\varphi(y_0) - y_0) < 0$，所以在 Γ 上系统(H_m)的向量场由外向内。故可作为(H_m)的 Poincáre-Bendixson 环域的外围线。令：

$$\lambda(x, y) = G(x) + \Phi(y)$$

其中 $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t$, 则正常数 C 充分小时，闭曲线 $\lambda(x, y) = C$ 环绕原点，且：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = g(x)\dot{x} + \varphi(y)\dot{y} = -g(x)F(x) > 0$$

故可作系统(H_m)的 Poincáre-Bendixson 环境的内围线。

由环域定理知(H_m)必存在闭轨线。

2.2 定理 2 的证明

经 Liénard 变换已后，系统(H_z)及(H_y)分别简化为：

$$\dot{x} = y - F(x); \quad \dot{y} = -g(x) \qquad (H'_z)$$
$$\dot{x} = y - F(x); \quad \dot{y} = -g(x)h(y) \qquad (H'_y)$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

类似于定理 1 的证明过程：系统(H'_z)的闭轨 Γ 在 $P(x_0, y_0)$处的外法向量：

$$\boldsymbol{\alpha} = (g(x_0), y_0 - F(x_0))$$

而系统(H'_y)在此点的向量场向量：

$$\boldsymbol{\beta} = (y_0 - F(x_0), -g(x_0)h(y_0))$$

所以 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} < 0$. 于是可知在 Γ 上的向量场由外向内，故可作环域的外围线。令：

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x),$$

其中，$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，当正常数 C 充分小时，闭曲线 $\lambda(x, y) = C$ 环绕原点，又由于：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} =$$
$$g(x)\{y[1 - h(y)] - F(x)\} > 0$$

故 $\lambda(x, y) = C$ 可作环域的内围线。

于是由 Poincáre-Bendixson 环域定理知系统(H'_y)必存在闭轨，即：系统(H_y)必存在闭轨。

参 考 文 献

[1] 施宇鸣. Liénard 方程的比较原理[J]. 应用数学，1997，10(3)：61-63.

[2] 张芷芬. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985.

[3] G. 桑森. 非线性微分方程[M]. 黄启昌译. 北京：科学出版社，1983.

（编辑：龙能芬）

无线网络新技术标准 802.11g 出台

由 IEEE 制订的新网络标准 802.11g 无线网络行业标准近日出台。新标准允许通过的最大上行速率为 54 Mbit/s，比现行 802.11b 标准最大的上行速率 11 Mbit/s 的许可范围增加了近四倍。

802.11g 无线网络标准也称为 Wi-Fi 标准，和现行的 802.11b 标准完全兼容，两者都应用于 2400 MHz 频段。