随机利率下双币种期权的定价

郭培栋, 张寄洲

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 双币种期权是为在国际贸易和投资中规避各种不同类型的风险而设计的一种期权, 在 Black - Scholes 的框架下, 运用偏微分方程的方法, 比较系统地讨论了在本国或地区利率遵循短期利率模型(Vasicek 模型)下欧式双币种期权的定价模型, 并给出了相应的定价公式.

关键词: 双币种期权; 随机利率; Vasicek 模型; 期权定价

中图分类号: F830.9; O211.6　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(2006)06-0025-05

0 引　言

随着近年来投资全球化的增长, 双币种期权获得了广泛的应用和发展. 双币种期权是这样一种未定权益, 即期权的收益取决于国外或地区货币下金融衍生产品的价格, 而实际的支付是以本国或地区货币来支付的. 双币种期权的收益函数可由国外或地区资产价格和汇率组合而成, 因此我们就可获得许多可选的投资和对冲的机会. 文[1~4]中讨论了常数利率下的标准双币种期权; 文[5]中则考虑了常数利率下欧式双币种期权的定价. 本文作者讨论了本国或地区利率服从短期利率模型(Vasicek 模型)下的欧式双币种期权的定价. 尽管在这里利用了文[4]中的"双币种预洗"法, 即修正风险中性下的漂移率和波动率, 并模仿了文[5]中的结构, 但由于前面的文献均只考虑常数利率下的情况, 因此该研究及其结果是有意义的. 在这里只讨论本国或地区货币的期权定价问题, 国外或地区货币下的情况可类似得出.

1 预备知识

显然, 随机利率下的双币种期权有5个独立变量, 即汇率 F, 国外或地区货币下的资产价格 S, 本国或地区货币下的资产价格 S^*, 本国或地区利率 r 和时间变量 t. 注意 S 和 S^* 有如下关系

$$S^* = SF. \tag{1}$$

因此该期权既可能是变量 S^*, F, r 和 t 的函数, 也可能是 S, F, r 和 t 或 S^*, S, r 和 t 的函数. 在全文中, 假设这几个变量服从如下分布.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{S} &= \mu_S \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}Z_S,\\ \frac{\mathrm{d}F}{F} &= \mu_F \mathrm{d}t + \sigma_F \mathrm{d}Z_F,\\ \frac{\mathrm{d}S^*}{S^*} &= \mu_{S^*} \mathrm{d}t + \sigma_{S^*} \mathrm{d}Z_{S^*},\end{aligned} \tag{2}$$

收稿日期: 2006-09-06

基金项目: 上海市教委高校科学发展基金(05DZ10); 上海市重点学科建设项目(T0401).

作者简介: 郭培栋(1973-), 男, 上海师范大学数理信息学院硕士研究生; 张寄洲(1958-), 男, 上海师范大学数理信息学院教授.

$$dr = a(b-r)\,dt + \sigma_r dZ_r.$$

则有(见[5]):

$$\mu_{S^*} = \mu_S + \mu_F + \rho_{SF}\sigma_S\sigma_F,\ \sigma_{S^*}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_F^2 + 2\rho_{SF}\sigma_S\sigma_F, \tag{3}$$
$$\delta_S^d = r_f - q - \rho_{SF}\sigma_S\sigma_F,\ \delta_{S^*}^d = r - q,\ \delta_S^f = r_f - q.$$

假设 $D(t,r)$ 为 T 时刻到期支付 1 元的本国或地区货币下的无风险债券在 t 时刻的价格,则 $D(t,r)$ 在风险中性世界和以上市场利率模型下所满足的偏微分方程为:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + a(b-r)\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2 D}{\partial r^2} - rD = 0. \tag{4}$$

上述方程的解为:

$$D(t,r) = \exp^{\bar{A}(t)r+\bar{B}(t)},$$

其中

$$\bar{A}(t) = -\frac{1}{a}[1-\exp^{-a(T-t)}],\ \bar{B}(t) = \frac{[-\bar{A}(t)-(T-t)](a^2b-\eta^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma_r^2\bar{A}^2(t)}{4a}.$$

2 主要结果

本文作者是在 Black - Scholes 模型框架下进行讨论.这里根据双币种期权收益函数结构的不同讨论了 3 种情形下的期权定价;即固定汇率下的国外看涨期权,以本国或地区货币命名的国外看涨期权和浮动汇率下的国外看涨期权.

2.1 固定汇率下的国外看涨期权

该期权在到期日的收益为:

$$V_d^1(S_T,r_T,T) = F_0\max(S_T - X_f, 0),$$

其中 F_0 为固定汇率,X_f 为国外或地区货币下的敲定价格.

定理 1 该期权的价值 $V_d^1(S,r,t)$ 满足如下微分方程:

$$\frac{\partial V_d^1}{\partial t} + a(b-r)\frac{\partial V_d^1}{\partial r} + \delta_S^d S\frac{\partial V_d^1}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r^2} + \rho_{rS}\sigma_r\sigma_S S\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r\partial S} - rV_d^1 = 0.$$

证明 在 t 时刻构造投资组合 Π:

$$\Pi = V_d^1 - \Delta_1 SF - \Delta_2 D,$$

使得 Π 在时段 $(t, t+dt)$ 内是无风险的,因此

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV_d^1 - \Delta_1 F dS - \Delta_1 S dF - \Delta_1 FSq\,dt - \Delta_2 dD \\ &= r(V_d^1 - \Delta_1 SF - \Delta_2 D)\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

由 Itô 公式有:

$$\begin{aligned} dD_t &= \frac{\partial D}{\partial t}dt + \frac{\partial D}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial r^2}dr\,dr \\ &= [a(b-r)\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{\partial D}{\partial t}]dt + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 D}{\partial r^2}dt + \sigma_r\frac{\partial D}{\partial r}dZ_r, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} dV_d^1 &= \frac{\partial V_d^1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_d^1}{\partial S}dS + \frac{\partial V_d^1}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S^2}dS\,dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r^2}dr\,dr + \frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S\partial r}dS\,dr \\ &= \frac{\partial V_d^1}{\partial t}dt + r_f S\frac{\partial V_d^1}{\partial S}dt + a(b-r)\frac{\partial V_d^1}{\partial r}dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r^2}dt + \\ &\quad \rho_{rS}\sigma_S\sigma_r S\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S\partial r}dt + \sigma_S S\frac{\partial V_d^1}{\partial S}dZ_S + \sigma_r\frac{\partial V_d^1}{\partial r}dZ_r. \end{aligned} \tag{7}$$

把(6),(7)代入(5)式,消除风险项,取

$$\Delta_1 = \frac{1}{F}\frac{\partial V_d^1}{\partial S},\ \Delta_2 = \frac{\partial V_d^1/\partial r}{\partial D/\partial r}.$$

再把它代入(5)式得 $V_d^1(S,r,t)$ 所满足的 PDE 为:

$$\frac{\partial V_d^1}{\partial t} + a(b-r)\frac{\partial V_d^1}{\partial r} + \delta_S^d S\frac{\partial V_d^1}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r^2} + \rho_{rS}\sigma_r\sigma_S S\frac{\partial^2 V_d^1}{\partial r\partial S} - rV_d^1 = 0. \quad (8)$$

记方程(8)为 $LV_d^1 = 0$,那么定解问题为:

$$\begin{cases} LV_d^1 = 0, \\ V_d^1(S_T,r_T,T) = F_0\max(S_T - X_f,0) \end{cases}. \quad (9)$$

利用偏微分方程的方法求解定解问题(9),可得如下定理.

定理2 若满足假设条件(1)-(4),则定解问题(9)有如下解析解

$$V_d^1(S,r,t) = DF_0e^{\beta(T-t)}[Se^{\frac{(1-\alpha)2\xi}{2}}N(d_1) - X_fe^{\frac{\alpha 2\xi}{2}}N(d_2)],$$

其中 $N(x)$ 表示标准正态分布函数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega$, $\xi = \int_0^T\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s - \int_0^t\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X_f} + \xi(1+\hat{\mu}/\hat{\sigma}^2)}{\sqrt{\xi}},\ d_2 = d_1 - \sqrt{\xi}.$$

证明 作变换 $U(Z,t) = \frac{V_d^1}{D}, Z = \frac{S}{D}$,则定解问题(9)变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)Z^2\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + (\delta_S^d - r)Z\frac{\partial U}{\partial Z} = 0 & (10) \\ U(Z,T) = F_0\max(DZ_T - X_f) & (11) \end{cases},$$

其中:

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{D^2}\left(\frac{\partial D}{\partial r}\right)^2\sigma_r^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{rS}\sigma_S\sigma_r\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial r} = \bar{A}^2\sigma_r^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{rS}\sigma_S\sigma_r\bar{A}.$$

再作变换 $x = \ln(DZ)$,则(10),(11)变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \hat{\mu}(t)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 & (12) \\ U(x,T) = F_0\max(e^x - X_f) & (13) \end{cases},$$

其中 $\hat{\mu}(t) = \delta_S^d - r - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)$. 令 $U(x,t) = e^{\alpha x+\beta(T-t)}W(x,t)$,其中:

$$\alpha = -\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2},\ \beta = -\frac{1}{2}\frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2},$$

则(12),(13)变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ W(x,T) = F_0e^{-\alpha x}\max(e^x - x_f,0) \end{cases}.$$

再作变换 $\tau = \int_0^t\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$, $T^* = \int_0^T\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$, $\xi = T^* - \tau$,则上述问题变为

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ W(x,0) = \varphi(x) = F_0e^{-\alpha x}\max(e^x - x_f,0) \end{cases}.$$

由 Poisson 公式可得:

$$W(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{2\xi}}\psi(s)\,\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\int_{\ln x_f}^{+\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{2\xi}}\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

将上面的计算结果回代可得定解问题(9)的解的表达式为:

$$V_d^1(S,r,t)=DF_0e^{\beta(T-t)}[Se^{\frac{(1-\alpha)2\xi}{2}}N(d_1)-X_fe^{\frac{\alpha2\xi}{2}}N(d_2)].$$

2.2 以本国或地区货币命名的国外或地区看涨期权

该期权在到期日的收益为;

$$V_d^2(S_T,F_T,r_T,T)=\max(F_TS_T-x_d,0)=\max(S_T^*-x_d,0),$$

其中 x_d 为本国或地区货币下的敲定价格.

显然 $V_d^2(S,F,r,t)=V_d^2(S^*,r,t)$. 由文[5]可知只要确定 δ_S^d,δ_F^d, 那么类似定理 1 就完全可以得到 $V_d^2(S,F,r,t)$ 满足的偏微分方程.

定理 3 $V_d^2(S,F,r,t)$ 满足如下微分方程:

$$\frac{\partial V_d^2}{\partial t}+a(b-r)\frac{\partial V_d^2}{\partial r}+\delta_S^dS\frac{\partial V_d^2}{\partial S}+\delta_F^dF\frac{\partial V_d^2}{\partial F}+\frac{1}{2}\Big[\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2V_d^2}{\partial S^2}+\sigma_F^2F^2\frac{\partial^2V_d^2}{\partial F^2}+\sigma_r^2\frac{\partial^2V_d^2}{\partial r^2}\Big]$$
$$+\rho_{rS}\sigma_r\sigma_SS\frac{\partial^2V_d^2}{\partial r\partial S}+\rho_{rF}\sigma_r\sigma_FF\frac{\partial^2V_d^2}{\partial r\partial F}+\rho_{FS}\sigma_F\sigma_SFS\frac{\partial^2V_d^2}{\partial F\partial S}-rV_d^2=0.$$

由定理 2 直接可得 $V_d^2(S^*,r,t)$ 满足的解析式,因此我们有下面的定理.

定理 4 该期权的价值 $V_d^2(S,F,r,t)$ 为

$$V_d^2(S,F,r,t)=V_d^2(S^*,r,t)=De^{\beta(T-t)}[S^*e^{\frac{(1-\alpha)2\xi}{2}}N(d_1)-X_de^{\frac{\alpha2\xi}{2}}N(d_2)],$$

其中 $N(x)$ 表示标准正态分布函数 $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega$, $\xi=\int_0^T\hat{\sigma}^2(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^t\hat{\sigma}^2(s)\,\mathrm{d}s$,

$$d_1=\frac{\ln\frac{S^*}{X_d}+\xi(1+\tilde{\mu}/\hat{\sigma}^2)}{\sqrt{\xi}},\ d_2=d_1-\sqrt{\xi},\ \alpha=-\frac{\tilde{\mu}}{\hat{\sigma}^2},\ \beta=-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2},$$

$$\hat{\sigma}^2(t)=\bar{A}^2\sigma_r^2+\sigma_S^2-2\rho_{rS}\sigma_S\sigma_r\bar{A},\ \tilde{\mu}(t)=\delta_{S^*}^d-r-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t).$$

2.3 浮动汇率下的国外或地区看涨期权

若该期权在到期日的收益为

$$V_d^3(S_T,F_T,r_T,T)=F_T\max(S_T-X_f,0),$$

则 $V_d^3(S_T,F_T,r_T,T)/F_T=V_f^3(S_T,r_T,T)=\max(S_T-X_f,0)$, 显然 $V_d^3(S,F,r,t)/F=V_f^3(S,r,t)$. 同理可知, $V_d^3(S,F,r,t)$ 有与 $V_d^2(S,F,r,t)$ 完全相同的微分方程,只是此时终值条件发生了改变. 又由定理 2 直接可得 $V_f^3(S,r,t)$ 满足的解析式,(注意,此时漂移项 δ_S^d 变为 δ_S^f)因此有如下结果.

定理 5 该期权的价值 $V_d^3(S,F,r,t)$ 满足

$$V_d^3(S,F,r,t)/F=V_f^3(S,r,t)=De^{\beta(T-t)}[Se^{\frac{(1-\alpha)2\xi}{2}}N(d_1)-X_fe^{\frac{\alpha2\xi}{2}}N(d_2)],$$

其中 $N(x)$ 表示标准正态分布函数 $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega$, $\xi=\int_0^T\hat{\sigma}^2(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^t\hat{\sigma}^2(s)\,\mathrm{d}s$,

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{X_f}+\xi(1+\tilde{\mu}/\hat{\sigma}^2)}{\sqrt{\xi}},\ d_2=d_1-\sqrt{\xi},\ \alpha=-\frac{\tilde{\mu}}{\hat{\sigma}^2},\ \beta=-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2},$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \bar{A}^2\sigma_r^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{rS}\sigma_S\sigma_r\bar{A},\ \tilde{\mu}(t) = \delta_S^f - r - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t).$$

参考文献：

[1] DRAVID A, RICHARDSON M, SUN T. Pricing foreign index contingent claims: An application to Nikkei Index Warrants[J]. J Derivatives, 1993, (1), 33 - 51.

[2] REINER E. Quanto mechanics[J]. Risk, 1992, 5(3): 59 - 63.

[3] SMITHSON C. Multifactor options[J]. Risk, 1997, 10(5): 43 - 45.

[4] TOFT K B, REINER E S. Currency - translated foreign equity options: The American case[J]. Advances in Futures and Options Research, 1997, 9: 233 - 264.

[5] KWOK Y K, WONG H Y. Currency - translated foreign equity options with path dependent features and their multi-asset extensions[J]. Int J Theoretical and Appl Finance, 2000, 3(2): 257 - 278.

Quanto options pricing under stochastic interest rate

GUO Pei-dong, ZHANG Ji-zhou

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Quanto options are designed for investors who would like to avoid different types of risk in the international trade and investment. In this paper, using the method of PDE in the Black - Scholes world, we discuss the pricing model of the vanilla European style quanto options on the assumption that the domestic interest rate follows the Visicek short-run interest rate model. And we derive some corresponding pricing formulas.

Key words: quanto options; stochastic interest rate; Vasicek model; pricing options

（责任编辑：冯珍珍）