

# 一个可解 Phantom 模型中束缚系统的演化

金兴华

(上海师范大学 天体物理研究中心, 上海 200234)

**摘要:** 研究在 Phantom 场论模型中的束缚系统解体问题. 利用膨胀时空中束缚系统的有效度规和一个可解的场论模型, 导出了解体时刻的表达式, 并讨论了不同束缚系统中模型参数的影响. 利用太阳系、银河系和后发星系团的相关物理量, 计算了在某个特定参数值下的解体时刻.

**关键词:** Phantom; Big Rip; 束缚系统

**中图分类号:** O412.1; P159.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2006)02-0030-05

## 0 引言

新近的宇宙观测表明, 宇宙正处在一个加速膨胀阶段. 为了解释这一观测事实, 天体物理学家认为宇宙应当存在一种新的组分——暗能量. 利用态方程参数可以将暗能量划分成 Quintessence<sup>[1]</sup> 和 Phantom<sup>[2]</sup> 两大类. 在 Phantom 情形, 宇宙可能会产生一个被称为 Big Rip 的奇性态<sup>[3]</sup>. 这个奇性态是指在有限的时间内宇宙标度因子将趋于无限大. Big Rip 的出现, 意味着宇宙中所有可能的束缚系统都将会解体, 计算某个引力束缚系统的解体时刻是一个令人感兴趣的物理问题. 事实上, 随着宇宙加速膨胀, Phantom 能量密度将不断增大, 从而束缚系统必定会在某个时刻分裂. 与此相反 Quintessence 能量密度随宇宙膨胀而减少, 所以引力束缚系统解体的情形不会发生. Caldwell<sup>[3]</sup> 等估算了从束缚态到非束缚态转变的临界时间,  $t_{crit} \cong T \sqrt{2|1+3w|/(6\pi|1+w|)}$ , 其中  $T$  是圆周运动的周期. Nesseris<sup>[4]</sup> 等指出 Caldwell 的研究仅考虑了通常质量产生的吸引势和 Phantom 的排斥势之间的平衡, 而忽略了束缚系统的离心效应所产生的排斥项. 在引入新的排斥项后, 他们重新计算了束缚系统演化过程, 并指出束缚解体时刻将比原来的计算早, 例如, 太阳系的解体大约要早  $10^4$  年.

本文利用一个可解的 Phantom 场论模型<sup>[5]</sup>, 导出引力束缚系统解体时的解析表达式, 并讨论模型参数与各种束缚态系统的关系. 在特定参数值下, 计算了太阳系、银河系和后发星系团的解体时刻.

## 1 一个可解的 Phantom 模型

根据现在的天文学观测, 宇宙的度规是平坦的 Robertson - Walker 度规

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

在此度规下, 空间均匀的 Phantom 场的 Lagrangian 密度为

收稿日期: 2006-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(10473007); 国家自然科学基金(10503002).

作者简介: 金兴华(1976-), 男, 上海师范大学天体物理研究中心博士研究生.

$$L_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi). \quad (2)$$

当考虑存在非相对论性物质、辐射和 Phantom 场时, Einstein 方程和 Phantom 场的运动方程约化为

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\phi). \quad (3)$$

$$H = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho_m + \rho_r + \rho_\phi + p_m + p_r + p_\phi). \quad (4)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'(\phi) = 0, \quad (5)$$

其中  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $H \equiv \dot{a}/a$  是 Hubble 参数, 上点代表对  $t$  求导, 撇代表对  $\phi$  求导. 这里  $\rho_m$  和  $\rho_r$  分别是非相对论性物质和辐射的能量密度, 它们的态方程分别为  $p_m = 0$  和  $p_r = \rho_r/3$ . 并且它们的连续性方程为  $\dot{\rho}_m = -3H\rho_m$  和  $\dot{\rho}_r = -3H(\rho_r + p_r)$ . 此外  $\phi$  场的能量密度和压强为

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6)$$

$$p_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (7)$$

李新洲和郝建刚<sup>[5]</sup>得到了一个可解的 Phantom 模型, 这个模型的势是

$$V(\phi) = V_0 \exp[\sqrt{3}\kappa A(\phi - \phi_0)], \quad (8)$$

其中  $V_0$  和  $A$  是正的常数. 在 Phantom 能量优势时, 系统的解为

$$\begin{aligned} a &= a_0 \exp\left[\frac{\kappa}{\sqrt{3}A}(\phi - \phi_0)\right], \\ t &= t_0 + \frac{2(2+A^2)^{1/2}}{\sqrt{3}\kappa(2V_0)^{1/2}}A^2\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3A^2/2}\right] \equiv t_0 + \frac{2}{\sqrt{3\rho_0}\kappa A^2}\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3A^2/2}\right], \\ \rho_\phi &= \frac{2V_0}{2+A^2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A^2} \equiv \rho\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A^2}, \\ w_\phi &= -(1+A^2). \end{aligned} \quad (9)$$

可以发现在有限的时间  $t_*$  时标度因子会发散, 从而导致 Big Rip 奇点, 这个时间可以表示为

$$t_* = t_0 + \frac{2}{\sqrt{3\rho_0}\kappa A^2}. \quad (10)$$

另外可以得到  $t$  和  $\phi$  的关系

$$\phi = \phi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}\kappa A} \ln\left(1 - \frac{t - t_0}{t_{\text{remain}}}\right), \quad (11)$$

其中  $t_{\text{remain}} = t_* - t_0 = \frac{2}{\sqrt{3\rho_0}\kappa A^2}$ . 分布取  $w = -1.38, -1.20$  和  $-1.10$ , 输入当前的宇宙学参数可以分别计算出  $t_{\text{remain}} = 28.01, 53.4$  和  $106.9$  Gyr.

为了进一步了解系统的动力学性质, 引入下面几个无量纲量  $x = \frac{\phi}{\phi_0}, y = \frac{\dot{\phi}}{\phi_0^2}$  和  $N = \ln a$ . 于是, 方程(3)~(5)可以变成

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{\phi_0 y}{H} \\ \frac{dy}{dN} &= -3y - \frac{V'(x)}{\phi_0^3 H}, \end{aligned} \quad (12)$$

由动力学方程可得,

$$H^2 = H_i^2 \left[ \frac{\kappa}{3H_i^2} \left( \frac{\phi_0^4 y^2}{2} + V(x) \right) + \Omega_{m,i} e^{-3N} + \Omega_{r,i} e^{-4N} \right], \quad (13)$$

其中  $H_i$  表示哈勃参数的初始值.  $\Omega_{m,i}$  和  $\Omega_{r,i}$  是初始时刻的非相对论性物质和辐射的密度参量. 这里取初始标度因子  $a_i = 1$ . Phantom 场、非相对论物质性和辐射的能量密度参量分别为:  $\Omega_\phi = \frac{\kappa (\phi_0^4 y^2 / 2 + V(x))}{3H_i^2}$ ,  $\Omega_m = \Omega_{m,i} e^{-3N}$  和  $\Omega_r = \Omega_{r,i} e^{-4N}$ . 图1显示了这个模型的数值结果. 由图可以发现, 在宇宙晚时 Phantom 分量将占优势.

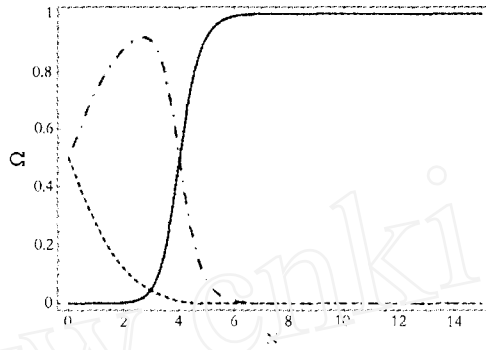


图1 Phantom 场(实线)、非相对论性物质(点划线)和辐射(虚线)的宇宙能量密度参量的演化

## 2 束缚系统解体时刻研究

为了研究束缚系统随场的演化, 先考虑在膨胀宇宙中质量为  $M$  的点源附近测试粒子的运动. 这只要计算在适当度规下测试粒子的测地线方程即可. 这样的度规应该内插于小尺度下的静态 Schwarzschild 度规和大尺度下的 Friedmann 时空之间. 在牛顿极限下(弱场, 低速), 度规可以写成如下形式

$$ds^2 = \left[ 1 - \frac{2GM}{a(t)\bar{\rho}} \right] dt^2 - a^2(t) [d\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (14)$$

其中  $\bar{\rho}$  是共动径向坐标. 则测地线方程中 0-分量、1-分量和 3-分量方程分别为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{a\bar{\rho}} \right) \frac{dt}{ds} \right] - \frac{GM}{a^2\bar{\rho}} \frac{da}{ds} \frac{dt}{ds} + a \frac{da}{dt} \left[ \left( \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right)^2 + \bar{\rho}^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] &= 0, \\ -a^2 \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} - 2a \frac{da}{ds} \frac{d\bar{\rho}}{ds} - \frac{GM}{a^2\bar{\rho}} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + a^2\bar{\rho} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0, \\ a^2\bar{\rho}^2 \frac{d\varphi}{ds} &= L, \end{aligned} \quad (15)$$

在牛顿极限下, 利用方程(14), 上式中 1-分量可以简化为

$$-\left( \ddot{\rho} - \rho \frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{GM}{\rho^2} + \frac{L}{\rho^3} = 0, \quad (16)$$

其中  $\rho = a\bar{\rho}$ , 上点表示对  $t$  求导. 我们定义  $\sigma_0^2 = GM/\rho_0^3$ ,  $L = \rho^2\sigma = \rho_0^2\sigma_0$ , 其中  $\rho_0$  是初始时刻的圆周运动轨道半径. 此外, 再定义 3 个无量纲参量  $r \equiv \rho/\rho_0$ ,  $\tau \equiv t/t_0$  和  $\omega_0 = \sigma_0 t_0$ . 则测地线方程可变为如下形式

$$r'' = -\frac{\omega_0^2}{r^2} + \frac{\omega_0^2}{r^3} + \frac{a''}{a} r, \quad (17)$$

其中求导是对  $\tau$  进行的.  $\omega_0$  是无量纲角速度. 例如, 在如下 3 个不同的束缚系统中: 太阳系 ( $\omega_0 = 3.5$

$\times 10^6$ ), 银河系 ( $\omega_0 = 182$ ) 和后发座星系团 ( $\omega_0 = 4.15$ )<sup>[4]</sup>.

根据方程(17), 可以得到 Phantom 场相关的决定束缚系统动力学的有效势为

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\omega_0^2}{r} + \frac{\omega_0^2}{2r^2} - \frac{1}{2}\chi(\phi)r^2, \tag{18}$$

其中  $\chi(\phi) = a''/a$ . 有效势的导数为

$$V'_{\text{eff}} = \frac{\omega_0^2}{r^2} - \frac{\omega_0^2}{r^3} - \chi(\phi)r, \tag{19}$$

其中撇表示对  $r$  的求导. 当  $V'_{\text{eff}} = 0$  时, 可以计算  $r$  的临界值  $r_{\text{min}}$ ,  $r_{\text{min}}$  是有效势最小值消失时的值, 这时束缚系统开始解体.  $r_{\text{min}}$  的方程是

$$\frac{\chi(\phi)}{\omega_0^2}r_{\text{min}}^4 = r_{\text{min}} - 1, \tag{20}$$

可知, 只有在如下条件下方程有解

$$\chi(\phi) \leq \frac{27\omega_0^2}{256}. \tag{21}$$

很清楚, 求解该方程将得到临界的场  $\phi_{\text{crit}}$ , 当场演化到临界场时束缚系统开始解体.

利用(9)式, 可得

$$\chi(\phi) = \frac{a''}{a} = \frac{4 + 6A^2}{9A^2} \frac{1}{\tau_{\text{remain}}^2} \left(\frac{\dot{\alpha}_0}{a}\right)^{-3A^2} = \frac{4 + 6A^2}{9A^2} \frac{1}{\tau_{\text{remain}}^2} \exp[\sqrt{3\kappa A}(\phi - \phi_0)], \tag{22}$$

其中  $\tau_{\text{remain}} = \dot{\alpha}_{\text{remain}} / t_0$ . 由方程(21), 得到

$$\phi = \phi_0 + \frac{2}{\sqrt{3\kappa A}} \ln \left( \frac{243A^2}{1024 + 1536A^2\omega_0^2\tau_{\text{remain}}^2} \right). \tag{23}$$

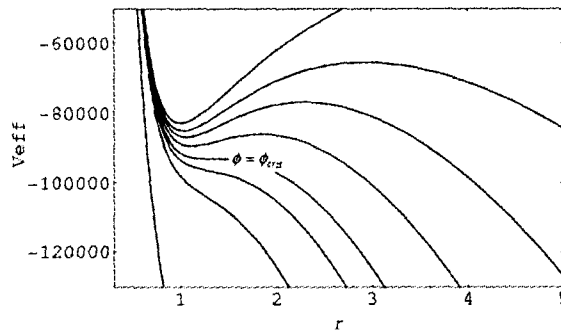


图 2 银河系束缚系统中, 无量纲形式的有效势随场的演化情况.

图 2 显示了银河系束缚系统有效势最小值在  $\phi_{\text{crit}}$  周围的消失情况. 图中, 考虑了  $A = 0.632$  (或  $w = -1.4$ ) 的情况. 该图显示了  $\phi_{\text{crit}}$  附近有效势最小值从存在到消失的过程. 此外, 根据方程(9), 临界场  $\phi_{\text{crit}}$  对应了临界时间  $t_{\text{crit}}$ . 这样有

$$\tau_* - \tau_{\text{crit}} = \frac{16\sqrt{3}}{9\omega_0} \sqrt{\frac{4 + 6A^2}{9A^4}}, \tag{24}$$

其中  $\tau_* = t_* / t_0, \tau_{\text{crit}} = t_{\text{crit}} / t_0$ . 这里  $t_0$  为 Phantom 能量开始占优势的时刻, 根据今天的宇宙学参量可得  $t_0 = 2.54 \times 10^{17} \text{ s}$ <sup>[4]</sup>. 这就说明了, 在讨论束缚系统解体时间时, 场依赖情形与时间依赖情形的结果是一致的. 如取  $A = 0.632$ , 则太阳系中  $t_* - t_{\text{crit}} \approx 14910.3$  年 银河系中  $t_* - t_{\text{crit}} \approx 2.87 \times 10^8$  年后发星系团中  $t_* - t_{\text{crit}} 1.26 \times 10^{10}$  年.

## 参考文献:

- [1] PEEBLES P J E, RATRA B. The Cosmological Constant and Dark Energy[J]. *Rev Mod Phys*, 2003, 75:559; LI X Z, HAO J G, LIU D J. Quintessence with  $O(N)$  Symmetry[J]. *Class Quant Grav*, 2003, 19:6049.
- [2] CALDWELL R R. Spintessence! New Models for Dark Matter and Dark Energy[J]. *Phys Lett B*, 2002, 23:545; HAO J G, LI X Z. Attractor Solution in Phantom Field[J]. *Phys Rev D*, 2003, 67:107303.
- [3] CALDWELL R R, KAMINONKOWSHI M, WEINBERG N N. Phantom Energy and Cosmic Doomsday[J]. *Phys Rev Lett* 2003, 91:071301.
- [4] NESSERIS S, PERIVOLAROPOULOS L. The Fate of Bound Systems in Phantom and Quintessence Cosmologies[J]. *Phys Rev D* 2004, 70:123529.
- [5] HAO J G, LI X Z. Li Phantom Cosmic Dynamics: Tracking Attractor and Cosmic Doomsday[J]. *Phys Rev D*, 2004, 70: 043529.

## The evolution of bound system in a solvable phantom model

JIN Xing-hua

(Shanghai United Center for Astrophysics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

**Abstract:** In this paper, the dissociation of a bound system in a phantom field model is studied. Using the effective metric of a bound system in an expanding universe and a solvable phantom model, the expression when the system becomes unbound is derived, and the effect of the parameter of the model in variant bound systems is discussed. Making use of the corresponding physical quantities of the solar system, the Milky Way galaxy and the Coma Cluster, the dissociating time with a special parameter is calculated.

**Key words:** phantom; big rip; bound system