第26卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.26, No.1
2006年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0111-10　　**文献标识码**: **A**

二次系统 (Ⅲ)$_{n=0}$ 的极限环问题

陆炳新，　罗定军
(南京师范大学数学与计算机科学学院，江苏　南京 210097)
(E-mail: lubingxin@njnu.edu.cn)

摘　要: 本文研究了二次系统 (Ⅲ)$_{n=0}$ 的极限环问题，利用 Hopf 分支理论，先考察其产生极限环的参数区域，对此外的参数区域，则运用定性分析的方法，分别给出了无环性的证明，并结合文 [2] 中的一个重要猜测进行讨论，完善了谢文 [5] 的结论.

关键词: 二次系统； Hopf 分支；极限环.
MSC(2000): 34C05, 34C23, 58F21
中图分类: O175.12

本文研究叶分类的Ⅲ类二次系统在 $n=0$ 的情况，即考察系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+dx+lx^2+mxy,\\ \dot{y}&=x(1+ax+by).\end{aligned}\tag{1}$$

文中系统地分析了 (1) 的极限环的存在性问题. 首先从细焦点分支出发考察它可能在 O 外产生极限环的参数区域. 对此外的参数区域, 则运用各种定性方法证明系统 (1) 不存在极限环. 此文包含两节，第一节讨论 $d=0$ 时的情况，在文 [1] 中我们得出了该类系统最多有两个极限环的条件，本文则给出了尽可能完整的不存在极限环的区域. 第二节则对 $d\neq 0$ 的系统 (1) 给出相应的不存在极限环的定理，同时对 d,V_3,V_5,V_7 同号时 III 类系统无极限环的这一重要猜测 [2] 结合我们的结果进行讨论.

1　系统 (1) 中 $d=0$ 的极限环问题

(i). 预备引理

在系统 (1) 中, 设 $d=0$, 考虑 $l,m\neq 0$ 的一般情形, 为简单起见，可通过尺度变换使 $m=1$. 又在本文中，固定 $l>0$, 因当 $l<0$ 时可将 y,t 同时改号化为 $l>0$ 的情况，即考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+dx+lx^2+xy,\\ \dot{y}&=x(1+ax+by).\end{aligned}\qquad l>0\tag{2}$$

这时原点 O 为系统 (2) 的细焦点，其焦点量依次为 [3]

$$\begin{aligned}V_3&=l-a(b+2l),\\ V_5&=a(5a-1)[bl^2-a^2(b+2l)],\\ V_7&=2a^4[bl^2-a^2(b+2l)].\end{aligned}\tag{3}$$

收稿日期: 2004-02-20
基金项目: 国家自然科学基金 (19871041)

易知系统 (2) 在 O 外的极限环保持在 $1+ax+by>0$ 的部分 [2]. 把 (1) 右端分别记为 P, Q, 由于

$$P\frac{\partial Q}{\partial d}-Q\frac{\partial P}{\partial d}=-x^2(1+ax+by),$$

它在极限环存在的区域内小于等于零，故在本文第二节可关于 d 运用广义旋转向量场理论.

下面先给出如下结论：

引理 1 系统 (2) 围绕 O 的极限环若存在，必定保持在区域 $x<1$ 内.

证明 对系统 (2), 我们有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{x=1}=y(x-1)+lx^2|_{x=1}=l>0$, 故 $x=1$ 为无切直线，所以围绕 O 的极限环不能与 $x=1$ 相交，从而保持在区域 $x<1$ 内.

定理 1 系统 (2) 当 $a(b+2l)\le 0$ 时，不存在极限环.

证明 假设存在极限环 Γ, 现考察系统 (2) 沿 Γ 的发散量积分

$$\oint_\Gamma(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}t=\oint_\Gamma(2l+b)x\mathrm{d}t+\oint_\Gamma y\mathrm{d}t,$$

由于 Γ 保持在 $1+ax+by>0, 1-x>0$ 的部分，由 (2) 知

$$x\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{1+ax+by},\quad y\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{lx^2}{x-1}\mathrm{d}t,$$

故

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}t&=\oint_\Gamma\frac{b+2l}{1+ax+by}\mathrm{d}y+\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\oint_\Gamma\frac{lx^2}{x-1}\mathrm{d}t\\&=\int\int_D\frac{-a(b+2l)}{(1+ax+by)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_\Gamma\frac{lx^2}{1-x}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中第一个等式的第二项显然为零，对第一项则运用 Green 公式， D 为 Γ 所包围区域，由 $a(b+2l)\le 0, l>0$ 知 $\oint_\Gamma(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}t>0$, 不妨取 Γ 为最接近 O 的极限环，由于 $V_3=l-a(b+2l)>0$, 说明 O 与 Γ 同时为不稳定的，由 Bendixson 理论知这是不可能的，即系统 (2) 不能有极限环.

这一定理说明了对任何 $l>0$, 在 (a,b) 平面的两个对顶角域 $a\le 0, b\ge -2l$ 和 $a\ge 0, b\le -2l$ 均为系统 (2) 的无环区.

在另外两个对角区域内， $l-a(b+2l)=0$ 为双曲线，其两支分别为 l_1, l_2, 见图 1.

对应它上面的点， O 至少为二阶细焦点，参数适当摄动改变其稳定性，即可出现极限环. 因此首先分析一下能分支出极限环的可能参数区域.

由焦点量公式 (3), 当 $V_3=l-a(b+2l)=0$ 时， $V_5=a(5a-1)(bl-a)l, V_7=2a^4l(bl-a)$.

$bl-a=0$ 的曲线记为 l_3, 它与 l_1, l_2 的交点为 $A(-l^2+l\sqrt{l^2+1}, -l+\sqrt{l^2+1}), B(-l^2-l\sqrt{l^2+1}, -l-\sqrt{l^2+1})$. 在 A, B 处显然有 $V_3=V_5=V_7=0$, 故 O 为中心，此外，仅当 $a=\frac{1}{5}, b=3l$ 时， O 为三阶细焦点，其稳定性由 $bl-a$ 的符号决定，它对应于 l_1 上的点 C, 在该点 $bl-a=3l^2-\frac{1}{5}$, 故当 $l>\frac{1}{\sqrt{15}}$ 时， C 点在 l_1 上 A 的左上方；当 $l<\frac{1}{\sqrt{15}}$ 时， C 点在 l_1 上 A 的右下方.

先考察 $l>\frac{1}{\sqrt{15}}$. 由于在 C 点时 $V_3=V_5=0, V_7>0$, 故 O 为不稳定的三阶细焦点，对 l_1 可分为三个弧段来考察分支出极限环的情况.

① 参数从 C 沿 l_1 向左上方变动，则 $a<\frac{1}{5}$, 从而 $V_5<0,O$ 的稳定性改变，其外产生一极限环 L_1, 再向 l_1 左方变动，则 $V_3>0$, 稳定性再次改变，又产生一环 l_2, 出现了一个二环区，最终两环合并为一二重极限环 (M_2LC) 后消失 (如图 1).

图 1

注 1 在文 [1] 中的定理 1 已证明，对 $bl-a>0, 0<a<\frac{1}{5}$, 系统 (2) 最多有两个极限环包含原点．由文 [1] 的结论可知对适当的 b 这时恰好有两个极限环.

同样从 l_1 的 C 上方向 l 的右方变动很小时， L_1 应不消失．故此弧段两侧邻近均为有环区.

② 在 $\widehat{CA}$ 段： $a>\frac{1}{5}, bl>a$, 故 $V_3=0, V_5>0, O$ 为不稳定二阶细焦点，与 C 处的稳定性一致，无环出现．向 l_1 右方一侧变动时， $V_3<0, O$ 的稳定性改变而产生一环.

向 l_1 左方一侧变动时， $V_3>0, O$ 不改变稳定性 (此区域在图 1 中记为Ⅰ).

③ l_1 上 A 下方的弧段， $V_5<0, V_3=0, O$ 为稳定的二阶细焦点.

向 l_1 左下侧变动时， $V_3>0$, 稳定性改变而产生环，向 l_1 右上方变动时， $V_5<0, V_3<0, O$ 不改变稳定性 (图 1 中的区域Ⅱ).

对 l_2, 则依点 B 分为两段来考察：

① 在 B 上方的弧段， $V_5>0, V_3=0, O$ 为不稳定二阶细焦点.

向左下方变动时， $V_3<0$, 改变稳定性而产生环，向右上方变动时， $V_3>0, O$ 的稳定性不改变 (图 1 中的区域Ⅲ).

② 在 B 下方的弧段， $V_5<0, V_3=0, O$ 为稳定二阶细焦点.

向左下方变动时，$V_3<0, O$ 不改变稳定性．(图 1 中的区域Ⅳ)．向右上方变动时，$V_3>0, O$ 改变了稳定性而产生环.

以下利用文 [3] 中的定理 5.4 分别证明对阴影区域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ中的参数， O 外均不存在极限环.

首先将系统 (2) 化为 Liénard 系统.

作变换 $\xi=-y+lx^2+xy, x=x$, 则系统 (2) 变为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\xi,\\&\dot{y}=-(x+(a-1)x^2)+(bl-a)x^3-\frac{-(b+2l)x+(b+l)x^2}{1-x}\xi-\frac{1}{1-x}\xi^2.\end{aligned}$$

进一步作变换 $\bar{u}=\frac{\xi}{1-x}, x=x, \mathrm{d}\bar{t}=(1-x)\mathrm{d}t$, 则得 Liénard 系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\bar{u},\quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}=-g(x)-f(x)\bar{u},$$

其中 $f(x)=\frac{x[(b+l)x-(b+2l)]}{(1-x)^2}, g(x)=\frac{x[(bl-a)x^2+(a-1)x+1]}{(1-x)^2}$, 它等价于系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x). \tag{4}$$

记

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{x[(b+l)x-(b+2l)]}{(1-x)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-x}-(b+l)x-b\ln(1-x),\\G(x)&=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\frac{(bl-a)^2}{2}+(2bl-a-1)+\frac{bl}{1-x}+(3bl-a-1)\ln(1-x).\end{aligned} \tag{5}$$

对系统 (4) 作 Filipov 变换 $z=G(x)(>0)$, 它有两支反函数 $x_1=x_1(z)>0$ 和 $x_2=x_2(z)<0$, 记 $F_i(z)=F(x_i(z))$.

引理 2 经过 Filipov 变换后, 若对一切 $z>0$ 有 $F_1(z)\le F_2(z)$(或 $F_1(z)\ge F_2(z)$), 且对足够小的 $\delta>0$, 在 $(0,\delta)$ 中, $F_1(z)$ 不恒等于 $F_2(z)$, 则系统 (4) 无闭轨线.

如引理 2 的条件不满足, 则在 (z,y) 平面上除原点外, $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 相交, 记 $z>0$ 时的第一个焦点为 z_0 (见图 2). 记 $u=x_1(z_0)>0, v=x_2(z_0)<0$, 由于 $F(u)=F(x_1(z_0))=F_1(z_0)=F_2(z_0)=F(x_2(z_0))=F(v)$, 且 $G(u)=z_0=G(v)$. 故可知 (u,v) 必同时满足

$$\begin{matrix}F(u)=F(v),\\G(u)=G(v),\end{matrix}\quad v<0<u \tag{6}$$

由公式 (5),(6) 可得

$$\left[\frac{l}{(1-u)(1-v)}-(b+l)\right](u-v)=b\ln\frac{1-u}{1-v}, \tag{7}$$

$$\left[\frac{bl-a}{2}(u+v)+(2bl-a-1)+\frac{bl}{(1-u)(1-v)}\right](u-v)=-(3bl-a-1)\ln\frac{1-u}{1-v}. \tag{8}$$

由此消去 $u-v, \ln\frac{1-u}{1-v}$, 可得

$$\frac{b(bl-a)}{2}(u+v)(1-u)(1-v)+l(a+1-b^2-3bl)[uv-(u+v)]=0. \tag{9}$$

又对系统 (4) 而言

$$\begin{aligned}\frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}&=\frac{(b+l)u-(b+2l)}{(bl-a)u^2+(a-1)u+1}-\frac{(b+l)v-(b+2l)}{(bl-a)v^2+(a-1)v+1}\\&=\frac{\{-(b+l)(bl-a)uv+(b+2l)(bl-a)(u+v)+[a(b+2l)-l]\}}{[(bl-a)u^2+(a-1)u+1]\cdot[(bl-a)v^2+(a-1)v+1]}(u-v).\end{aligned} \tag{10}$$

由 $g(x)=0$ 推知 $x=0$ 或 $[(bl-a)x^2+(a-1)x+1]=0$, 前者对应于奇点 O, 后者的根若存在，记为 x_0, 则 $(x_0,f(x_0))$ 必为 (4) 的鞍点，故 O 外的极限环保持在 $[(bl-a)x^2+(a-1)x+1]>0$ 的区域，从而 $\frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}$ 的符号决定于

$$I=-(b+l)(bl-a)uv+(b+2l)(bl-a)(u+v)+a(b+2l)-l. \tag{11}$$

它又可变形为

$$I=l(bl-a)uv+(b+2l)(bl-a)(u+v-uv)+a(b+2l)-l. \tag{11'}$$

引理 3 若 (6) 有解 (u,v), 即 z_0 存在，当 $z<z_0$ 时， $F_1(z)>F_2(z)$(或 $F_1(z)<F_2(z)$), 它等价于 (以下记为 $\Leftrightarrow$)

$$\frac{f(u)}{g(u)}\leq\frac{f(v)}{g(v)},\left(\frac{f(u)}{g(u)}\geq\frac{f(v)}{g(v)}\right). \tag{12}$$

证明 就括号外的情况 (如图 2) 证之，由 $F_1(z_0)=F_2(z_0), F_1(z)>F_2(z)$, 则 $\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}<\frac{F_2(z)-F_2(z_0)}{z-z_0}$, 取左极限 $z\to z_0^-$ 可得 $F_1'(z_0)\leq F_2'(z_0)$, 又 $F_i'(z)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 故 $\frac{f(u)}{g(u)}\leq\frac{f(v)}{g(v)}$. 证毕，括号内的情况对应于图 2 中 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 对调.

另一方面，在 $x=0$ 点有

引理 4 当 $0<z\ll 1$ 时， $F_1(z)>F_2(z)$ (或 $F_1(z)<F_2(z)$) $\Leftrightarrow (\frac{f(x)}{g(x)})'_{x=0}>0\ (<0)\Leftrightarrow a(b+2l)-l>0\ (<0)$.

证明 就括号外的情况证之.

由于 $F_1(0)=F_2(0)$, 故 $0<z\ll 1$ 时， $F_1(z)>F_2(z)\Leftrightarrow F_1'(z)>F_2'(z)\Leftrightarrow(\frac{f(x)}{g(x)})'_{x=0}>0$ (即 x 由负变正时， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的值由小变大). 因 $(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{1}{g^2(x)}[-(b+l)(bl-a)x^2+2(b+2l)(bl-a)x+a(b+2l)-l]$, 故 $(\frac{f(x)}{g(x)})'_{x=0}>0\Leftrightarrow a(b+2l)-l>0$.

图 2 图 3

(ii). 主要结果

以下在区域 Ⅰ – Ⅳ的参数条件下证明联立方程组 (6) 无解，因此交点 z_0 不存在，从而由引理 2 可得出无极限环的结论.

定理 2 对区域Ⅳ内的参数 $(a,b), l\geq\frac{1}{\sqrt{15}}$, 系统 (2) 不存在极限环.

证明 在区域Ⅳ内 $a<0, b<0, b+2l<0, b+l<0, bl-a<0, l-a(b+2l)<0$, 现证联立方程组 (6) 无解.

当 $0<x<1$ 时,

$$\begin{aligned} g(x)+g(-x) &= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}[(2bl-a-1)x^2+a+1] \\ &= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}[2blx^2+(a+1)(1-x^2)]. \end{aligned}$$

先设 $a+1\le 0$, 则 $g(x)+g(-x)\le 0$, 积分后得 $G(x)<G(-x).y=G(x)$ 的曲线如图 3，故由 $G(u)=G(v)$ 可推知 $u+v>0$. 在区域Ⅳ内，由引理 3,4 知

$$\begin{aligned} a(b+2l)-l>0 &\Leftrightarrow (\frac{f(x)}{g(x)})'_{x=0}>0 \Leftrightarrow F_1(z)>F_2(z), z<z_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}\le 0. \end{aligned} \tag{13}$$

但由于 $u+v>0, uv<0$ 及参数条件，可知 (11) 式中 I 的各项均为正，故 $\frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}>0$, 得出矛盾，说明方程组 (6) 的解 (u,v) 不存在，即 $y=F_1(z)$ 与 $y=F_2(z)$ 无交点，由引理 2 知道不存在极限环.

定理 3 对区域Ⅲ内的参数 a,b 及 $l\ge\frac{1}{\sqrt{15}}$, 系统 (2) 不存在极限环.

证明 考虑曲线 $a+1-b^2-3bl=0$, 它将区域Ⅲ分成（Ⅲ）$_1$ 和（Ⅲ）$_2$ 两部分 (见图 1）. 对参数区域（Ⅲ）$_1$: $bl-a>0, b<0, a+1-b^2-3bl<0, l-a(b+2l)>0$, 类似于上，由引理 3,4 可推知 $\frac{f(u)}{g(u)}\ge\frac{f(v)}{g(v)}$. 若 $u+v>0$, 由于 $uv<0$, 推知 $I<0$ 从而 $\frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}<0$; 若 $u+v<0$, 则由 (9) 可知 $uv-(u+v)$ 应大于零. 这时由 (11) 可推出 $\frac{f(u)}{g(u)}-\frac{f(v)}{g(v)}<0$，均导出矛盾. 故对（Ⅲ）$_1$ 内的参数, 系统 (2) 无环. 对区域（Ⅲ）$_2$,$a+1-b^2-3bl>0, bl-a>0, b<0, l-a(b+2l)>0$, 同上有 $\frac{f(u)}{g(u)}\ge\frac{f(v)}{g(v)}$. 若 $u+v>0$, 由 (11) 可知 $\frac{f(u)}{g(u)}<\frac{f(v)}{g(v)}$. 若 $u+v<0$, 由 (9) 可知 $uv-(u+v)<0$, 这时由 (11') 可知 $\frac{f(u)}{g(u)}<\frac{f(v)}{g(v)}$. 均导致矛盾. 故对（Ⅲ）$_2$ 内的参数也证得系统 (2) 无环. □

定理 4 对区域Ⅱ内的参数 a,b 及 $l\ge\frac{1}{\sqrt{15}}$, 系统 (2) 不存在极限环.

证明 由 $l-a(b+2l)<0$ 可推知 $\frac{f(u)}{g(u)}\le\frac{f(v)}{g(v)}$. 依 $b=0$ 及 $a+1-b^2-3bl=0$ 将区域Ⅱ分成（Ⅱ）$_1$,（Ⅱ）$_2$,（Ⅱ）$_3$ 三部分.

首先考察（Ⅱ）$_1$: $a>0, b>0, l-a(b+2l)<0, bl-a>0, a+1-b^2-3bl<0$, 因 $0<x<1$ 时

$$f(x)+f(-x)=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}[(b+l)(1+x^2)-2(b+2l)]=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}[-2l+(b+l)(x^2-1)]<0. \tag{14}$$

积分可推出 $F(x)<F(-x), y=F(x)$ 的曲线如图 4 所示. 故由 $F(u)=F(v)$ 可知 $u+v<0$, 再由 (9) 式推知，$u+v-uv<0$, 将 (11) 式 I 变形为 $I=(bl-a)[(b+l)(u+v-uv)+l(u+v)]+a(b+2l)-l$ 可知 $I>0$, 即 $\frac{f(u)}{g(u)}>\frac{f(v)}{g(v)}$, 与 $\frac{f(u)}{g(u)}\le\frac{f(v)}{g(v)}$ 矛盾. 从而这样的 (u,v) 不存在, 故对（Ⅱ）$_1$ 内参数系统 (2) 无环.

其次考察（Ⅱ）$_2$:$l-a(b+2l)<0, bl-a<0, a+1-b^2-3bl>0, b<0$.

由定理 1 知, 只要考虑 $b+2l>0$, 由 (14) 可知道：$u+v<0$, 再由 (9) 可推知 $u+v-uv<0$, 利用 (11)' 可同样导出矛盾. 从而证明了对（Ⅱ）$_2$ 内的参数，系统 (2) 无环.

对于 $(\mathrm{II})_3$,I 的三项不能同号，须用到更细致的估计.

图 4

这时 $l-a(b+2l)<0, a+1-b^2-3bl>0, b>0$, 同上有 $u+v<0, u+v-uv>0$, 利用 (7) 可知 $[\frac{1}{(1-u)(1-v)}-(b+l)](u-v)=b\ln\frac{1-u}{1-v}$, 从而可得 $l-(b+l)(1-u)(1-v)=l-(b+l)[1-(u+v-uv)]<0$, 即得估计式:

$$u+v-uv<\frac{b}{b+l}, \tag{15}$$

由 $0<(1-u)(1-v)=1-(u+v-uv)<1$ 及公式 (9) 可得

$$\frac{b(bl-a)}{2}(u+v)>\frac{b(bl-a)}{2}(u+v)(1-u)(1-v)=l(a+1-b^2-3bl)(u+v-uv). \tag{16}$$

故

$$I>[(bl-a)(b+l)+\frac{2l^2(a+1-b^2-3bl)}{b}](u+v-uv)+a(b+2l)-l.$$

如果参数 a,b,l 使 $[(bl-a)(b+l)+\frac{2l^2(a+1-b^2-3bl)}{b}]\geq 0$, 则已证得 $I>0$.

如果 $[(bl-a)(b+l)+\frac{2l^2(a+1-b^2-3bl)}{b}]<0$, 利用 (15) 式可知

$$\begin{aligned}I&>[(bl-a)(b+l)+\frac{2l^2(a+1-b^2-3bl)}{b}]\cdot\frac{b}{b+l}+a(b+3l)-l\\&=l[(b^2+2a-1)(b+l)+2l(a+1-b^2-3bl)].\end{aligned}$$

对区域 $(\mathrm{II})_3$,$a+1-b^2-3bl>0$, 若 $b^2+2a-1\geq 0$, 则得 $I>0$; 若 $b^2+2a-1<0$, 对 $(b^2+2a-1)(b+l)+2l(a+1-b^2-3bl)$ 而言, 第一项为负, 第二项为正, 但 $b^2+2a-1+a+1-b^2-3bl=3(a-bl)>0$, 故只要 $b+l\leq 2l$, 仍可得出 $I>0$. 由 $b^2+2a-1<0$ 可知 $b<b_A=\sqrt{l^2+1}-l$,

故 $b+l<\sqrt{l^2+1}$, 在 $l\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的附加条件下，可推出 $\sqrt{l^2+1}\leq 2l$, 故 $b+l<\sqrt{l^2+1}\leq 2l$, 从而得出 $I>0$.

至此对区域Ⅱ中各种参数，均得出联立方程组 (6) 无解的结论．定理 (4) 证毕.

注 2 对区域 (Ⅱ)$_3$, 附加了技术性条件 $l\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$, 当 $\frac{1}{\sqrt{15}}<l<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时无环性的结论相信也是对的.

定理 5 对区域Ⅰ内的参数，系统 (2) 不存在极限环.

证明 对区域Ⅰ， $bl-a>0, l-a(b+2l)>0, a>\frac{1}{5}, b>0$. 类似于定理 2 的推导可得知 $G(x)>G(-x), 0<x<1$, 从而满足 $G(u)=G(v)$ 的 (u,v) 应成立 $u+v<0$. 当 $a+1-b^2-3bl\geq 0$ 时，由 (9) 可知 $u+v=uv<0$, 从而推出 $I<0$, 与 $a(b+2l)-l<0$ 时的 $\frac{f(u)}{g(u)}\geq\frac{f(v)}{g(v)}$ 相矛盾.

当 $a+1-b^2-3bl<0$ 时这一情况与定理 4 的证明中 $bl-a<0, l-a(b+2l)<0, a+1-b^2-3bl>0$ 的符号均相反，类似于那里的结论，则可推出 $I<0$, 与 $\frac{f(u)}{g(u)}\geq\frac{f(v)}{g(v)}$ 矛盾．定理得证.

注 3 $0<l<\frac{1}{\sqrt{15}}$ 时图 1 中 C 点位于 l_1 上 A 点的右下方，无环区Ⅲ和Ⅳ未发生变化，而在 (a,b) 平面的第一象限，则产生环的区域有变化，无环区Ⅰ变为 l_1 在 $\frac{1}{5}<a<a_A$ 的一段弧的右上方了，而在 l_1 上 $\widehat{CA}$ 段的两侧分别出现一个或两个环的区域，故无环区Ⅱ相应缩小一些，不存在极限环的论证与上述 $l>\frac{1}{\sqrt{15}}$ 的情况类似，故从略.

2 系统 (1) 中 $d\neq 0$ 的极限环问题

上一节已经对系统 (2) 分析了由细焦点 O 改变稳定性而产生极限环的参数区域，并对此外的区域内的参数，我们都证明了系统 (2) 在 O 外不存在极限环，现在进一步讨论 $d\neq 0$ 的系统 (1).

如前所述， O 外的极限环保持在 $1+ax+by>0$ 内，对此区域，系统 (1) 关于 d 构成广义旋转向量场，由此可证明以下的结论.

引理 5 设 $d=0$ 时，系统 (2) 在 O 外不存在极限环，则当 $d\neq 0$ 且 $d[l-a(b+2l)]>0$ 时，系统 (1) 在 O 外也不存在极限环.

证明 不妨设 $l-a(b+2l)>0(<0$ 的情况类似). 则 $d=0$ 时 O 为不稳定，其外无环. 故 $d<0$ 时 O 外产生一极限环 L_1, 由旋转向量场理论， L_1 随 d 的减少而增大，它或者直接扩大为外围分界线环而消失，或者在其外先形成分界线环而后分支出极限环 L_2 缩小再与之重合，包括在这当中跳出半稳定环分裂．这些极限环单调运动遮盖了 O 外可能有极限环的区域，因此 $d>0$ 时系统 (1) 不能有极限环，否则将与 $d<0$ 时的极限环相交，这将与旋转向量场理论的结论相矛盾. □

利用第一节所得的无极限环的一些定理及引理 5 就可得出系统 (1) 在 O 外不存在极限环的下述结论.

定理 6 当参数 a,b,l,d 满足 $d[l-a(b+2l)]>0$ 及下列条件之一时，系统 (1) 在 O 外不存在极限环:

A"q) $a(b+2l)\leq 0$;

A"r) $(a,b)\in$ 区域Ⅲ，Ⅳ;

A"s) $l>\frac{1}{\sqrt{15}}, (a,b)\in$ 区域Ⅰ，Ⅱ;

A"t) $l<\frac{1}{\sqrt{15}}, (a,b)\in$ 相应的区域Ⅰ，Ⅱ.

结合 [2, §9] 的重要猜测 9.2, 即对于一般的Ⅲ类系统，当 d, V_3, V_5, V_7 同号时， O 外不存在极限环，现就 $n=0$ 的系统 (1) 来证实这一结论.

由公式 (3),$V_5V_7 = 2a^5l(5a-1)(bl^2-a^2(b+2l))^2 > 0 \Leftrightarrow a < 0$ 或 $a > \frac{1}{5}$. 这时， V_5, V_7 同号，其符号决定于 $bl^2 - a^2(b+2l)$ 的符号，故考察曲线 $bl^2 - a^2(b+2l) = 0$. 它是 (a, b) 平面上的三次曲线，解出

$$b = -2l + \frac{2l^3}{l^2 - a^2}$$

可知它以 $a = \pm l$ 为渐近线，有三支 l_4, l_5, l_6 分别位于 $a < -l, a \in (-l, l)$ 和 $a > l$ 的部分，且通过 l_1, l_2 和 l_3 的交点 A, B. 见图 5.

图 5

在 l_4, l_5, l_6 之间的区域， $V_5V_7 < 0$. 在 l_4 左下方， l_6 右下方和 l_5 上方的区域， $V_5V_7 > 0$, 它们和 l_1, l_2 在 $a < 0$ 和 $a > \frac{1}{5}$ 的部分界定了使 V_3, V_5, V_7 同号的区域.

图 5 中阴影区域①，②，③，④使 V_3, V_5, V_7 均为正，在阴影区域⑤，⑥， V_3, V_5, V_7 均为负.

对照我们所得的无环区的图 1 可以看出，它们基本上包含在定理 1∼ 定理 5 所证得的无环区之内，只有第一象限中区域②在 l_3 下方的一小块以及区域⑤在 l_3 上方的一块角域尚未证实. 然后对系统 (1) 附以 d 与各 V_i 同号的条件并由定理 6, 可以说就 $n=0$ 的情况，这一猜测已基本得到证实.

关于系统 (1) 和 (2) 的无环性问题，文 [5] 也用不同的方法证明了一些结论，关于 O 外无环的结论是该文中的定理 1 和定理 4, 其中定理 1 的条件是 $[l - a(b+2l)](bl - a) > 0$ 且 $b < 3l$. 它在图 5 中界定为 l_1 与 l_2 之间且在 l_3 左上方， $b = 3l$ 下方的区域，除了 $0 < a < \frac{1}{5}$ 之间的一小部分，其它均包含在我们所得出的无环区之内，但对于 l_3(即 $lb - a = 0$) 右下方部分及 $a < 0, b \geq 3l$ 部分的无环区均未涉及. 该文定理 4 也是加上 dx 项 (该文用 kx) 使 O 不改变稳定性时也无环，显然本文的结论更全面，我们这里在 $bl - a < 0$ 部分及 $b \geq 3l, a < 0$ 部分的无环区均可作为其补充.

最后说明一点，对于系统 (1) 在一个奇点外围的极限环问题，我们限于讨论奇点 O 外的情况并不失一般性. 因为若在 $-y + dx + lx^2 + xy = 0$ 不通过 O 的另一支上有另一指标 $+1$ 的奇点 (x_0, y_0), 讨论它外围的极限环问题时可通过坐标平移 $\bar{x} = x - x_0, \bar{y} = y - y_0$ 而将它化为 $(\bar{x}, \bar{y})$ 坐标下的原点 O, 易见变换后的系统仍具有 (1) 的形式.

限于篇幅，关于系统 (1) 的极限环的惟一性问题，将另文加以研究。

参考文献：

[1] LU Bing-xin, LUO Ding-jun. *Limit cycle problem of guadratic differential system* $\dot{x} = -y + lx^2 + mxy, \dot{y} = x(1 + ax + by)$ [J]. J. Southeast Univ. (English Ed.), 2004, **20**(4): 517–520.
[2] 叶彦谦．多项式系统定性理论．上海：上海科技出版社， 1995.
YE Yan-qian. *Qualitative Theory of Polynomial Differential System* [M]. Shanghai: Shanghai Sci. and Tech. Publ., 1995. (in Chinese)
[3] 叶彦谦，等．极限环论．上海科技出版社， 1984.
YE Yan-qian. et al. *Theory of Limit Cycle* [M]. Shanghai: Shanghai Sci. and Tech. Publ., 1984. (in Chinese)
[4] ELAMIN A, SAEED M. LUO Ding-jun. *Limit cycle problem of quadratic system of type* $(\mathrm{III})_{m=0}$ *(II)* [J]. J. Nanjing Norm. Univ. Nat. Sci. Ed., 2004, **27**: 15–18.
[5] XIE Xiang-dong. *On the nonexistence of LCs of quadratic system of type* $(\mathrm{III})_{n=0}$ [J]. Ann. Differential Equations, 1992, **8**(1): 98–103.

Limit Cycle Problem of Quadratic System $(\mathrm{III})_{n=0}$

LU Bing-xin, LUO Ding-jun
(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Jiangsu 210097, China)

Abstract: The limit cycle problem of quadratic system $(\mathrm{III})_{n=0}$ is studied in this paper. By using Hopf bifurcation, the parameter regions for which limit cycles exist are obtained, and for the rest regions of parameters, the nonexistance of limit cycles is proved by using qualitative methods. A positive answer for an important conjecture in [2, §9] is also given and it is shown that our results are more complete than that obtained in paper [5].

Key words: quadratic system; Hopf bifurcation; limit cycle.