第26卷第2期 数学研究与评论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0393-06 **文献标识码**: **A**

关于二元三角插值多项式的线性求和问题

张淑婷, 王淑云, 何甲兴

(吉林大学数学科学学院, 吉林 长春 130012)
(E-mail: zst20020101@sina.com)

摘 要: 本文构造了一个新的求和因子, 使得带有该求和因子的二元三角插值多项式对任意的被插值的二元连续周期函数 $f(x,y)\in C(\Omega)$ 都能在全平面上一致收敛, 且达到最佳收敛阶.

关键词: 求和因子; 一致收敛; 最佳收敛阶.
MSC(2000): 41A10
中图分类: O174.41

1 序 言

如果 $f(x,y)\in C(\Omega)$, 其中 $\Omega=[-\pi\leq x\leq\pi,-\pi\leq y\leq\pi]$, 则 $f(x,y)$ 的双重 Fourier 级数部分和为:

$$S_{nm}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}(a_{k,l}\cos kx\cos ly+b_{k,l}\sin kx\cos ly+c_{k,l}\cos kx\sin ly+d_{k,l}\sin kx\sin ly),$$

式中 $a_{k,l},b_{k,l},c_{k,l},d_{k,l}$ 为 $f(x,y)$ 的双重 Fouerier 系数。

取结点组为

$$(x_k,y_l)=(\frac{2k\pi}{2n+1},\frac{2l\pi}{2m+1}),$$

其中 $k=0,1,2,\ldots 2n$, $l=0,1,2,\ldots 2m$, 如果让 $S_{nm}(f;x,y)$ 在这些点处的值与 $f(x,y)$ 的值相同, 则我们获得一个二元三角插值多项式:

$$H_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}f(x_k,y_l)(1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\cos\alpha(x-x_k)+2\sum_{\beta=1}^{m}\cos\beta(y-y_l)+ 4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\cos\alpha(x-x_k)\cos\beta(y-y_l)),$$

其中 $M=2m+1$, $N=2n+1$, 众所周知, $H_{nm}(f;x,y)$ 并非对任意的被插值的二元连续周期函数都能在全平面上一致收敛, 为改进其收敛性, 一种方法为构造求和因子 $\rho_{\alpha,\beta}$, 使其满足以下两个条件:

(1) $\lim_{n,m\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}=1$;

(2) $\iint_\Omega|1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t+2\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{0,\beta}\cos\beta\tau+4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{\alpha,\beta}\cos\alpha t\cos\beta\tau\ |\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\leq A$, 其中 A 为常数.

收稿日期: 2004-04-21

则带有该求和因子的算子可以在全平面上一致地收敛到每个连续的 $f(x,y)\in C(\Omega)$[1,2], 而对于求和因子的构造，一直是一个难点，在本文中，通过构造求和因子 $\rho_{\alpha,\beta}$, 使得带有该求和因子的二元三角插值多项式 $T_{nm}(f;x,y)$ 对任意的被插值的二元连续周期函数都能在全平面上一致收敛.

具体构造如下：

$$\rho_{\alpha,\beta}=1-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}\cos\alpha\delta_{in}-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{j}\cos\beta\delta_{jm}+(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}\cos\alpha\delta_{in}\cos\beta\delta_{jm},$$

其中 $\delta_{in}=(\frac{r_1+1}{2}-i)\mu_n,\delta_{jm}=(\frac{r_2+1}{2}-j)\mu_m$ 并且满足方程：$\cos(n+1)\mu_n=0,\ \cos(m+1)\mu_m=0$, $\mu_n=O(\frac{1}{n})$, $\mu_m=O(\frac{1}{m})$. 则带有该求和因子 $\rho_{\alpha,\beta}$ 的二元三角插值多项式为

$$T_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}f(x_k,y_l)(1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha(x-x_k)+2\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{0,\beta}\cos\beta(y-y_l)+4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{\alpha,\beta}\cos\alpha(x-x_k)\cos\beta(y-y_l)).$$

2 主要结果

引理 2.1 设 $p(x,y)$ 是类 $H_{n,m}^T$ 中与 $f(x,y)$ 具有最佳逼近值三角多项式，即

$$|p(x,y)-f(x,y)|\le E_{nm}^*(f),$$

则

$$T_{nm}(p;x,y)=p(x,y)-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}p(x-\delta_{in},y)-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{j}p(x,y-\delta_{jm})+(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}P(x-\delta_{in},y-\delta_{jm}).$$

证明 仿照文献 [2] 中定理 2 中的证明及 $T_{nm}(p;x,y)$ 的定义容易证明.

引理 2.2 下面的估计式成立：

(1) $\lim_{n,m\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}=1$;

(2) $\iint_\Omega|1+2\sum_{\alpha=1}^n\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t+2\sum_{\beta=1}^m\rho_{0,\beta}\cos\beta\tau+4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{\alpha,\beta}\cos\alpha t\cos\beta\tau\ |\le A$, 式中 A 为常数.

证明 定义 $G(t)=1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t$, $H(\tau)=1+2\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{0,\beta}\cos\beta\tau$, 则只须证明

$$(\int_{-\pi}^{\pi}|G(t)|\,\mathrm{d}t)(\int_{-\pi}^{\pi}|H(\tau)|\,\mathrm{d}\tau)=A_1A_2\leq A.$$

首先证明： $A_1=O(1)$. 由于

$$\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t=\cos\alpha t-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}\cos\alpha(t-\delta_{in}).$$

令 $D_n(t)=1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\cos\alpha t$, 则有

$$\begin{aligned}G(t)&=1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t\\&=D_n(t)-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}D_n(t-(\frac{r_1+1}{2}-i)\mu_n).\end{aligned}$$

如果记 $h_{n,1}(t)=\frac{1}{2}(D_n(t-\mu_n)+D_n(t+\mu_n))$.

对于 $r_1=1,3,5,7,\ldots$

$$h_{n,r_1}(t)=h_{n,1}(t)-\frac{1}{2}(h_{n,r_1-2}(t-\mu_n)-2h_{n,r_1-2}(t)+h_{n,r_1-2}(t+\mu_n)),$$

则我们可以用数学归纳法证明

$$h_{h,r_1}(t)=G(t). \tag{2.1}$$

首先当 $r_1=1$ 或者 $r_1=3$ 时， (2.1) 式显然成立.

设 $r_1=l$ 时， (2.1) 式成立，即

$$h_{n,l}(t)=D_n(t)-(-\frac{1}{2})^{\frac{l+1}{2}}\sum_{i=0}^{l_1+1}(-1)^i\binom{l+1}{i}D_n(t-(\frac{l+1}{2}-i)\mu_n).$$

则当 $r_1=l+2$ 时,

$$\begin{aligned}&D_n(t)-(-\frac{1}{2})^{\frac{l+3}{2}}\sum_{i=0}^{l+3}(-1)^i\binom{l+3}{i}D_n(t-(\frac{l+3}{2}-i)\mu_n)\\&=D_n(t)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{\frac{l+1}{2}}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j\binom{l+1}{j}D_n(t-(\frac{l+3}{2}-i-j)\mu_n)\\&=D_n(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}D_n(t-(1-i)\mu_n)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}\\&\quad\{D_n(t-(1-i)\mu_n)-(-\frac{1}{2})^{\frac{l+1}{2}}\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j\binom{l+1}{j}D_n(t-(1-i)\mu_n-(\frac{l+1}{2}-j)\mu_n\}\\&=h_{n,1}(t)-\frac{1}{2}(h_{n,l}(t-\mu_n)-2h_{n,l}(t)+h_{n,l}(t+\mu_n))\\&=h_{n,l+2}(t),\end{aligned}$$

即 $r_1=l+2$ 时， (2.1) 式成立. 故由数学归纳法可知，对任意的 r_1, (2.1) 式成立.

下面证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|G(t)|\mathrm{d}t\le A_1,$$

式中 A_1 为常数. 设 $\mu_n=O(\frac{1}{n})$, 并且满足方程 $\cos(n+1)\mu_n=0$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(D_n(t-\mu_n)+D_n(t+\mu_n))\\&=\frac{1}{2}\{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-\mu_n)}{\sin\frac{1}{2}(t-\mu_n)}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+\mu_n)}{\sin\frac{1}{2}(t+\mu_n)}\}\\&=\frac{\cos(n+1)t\sin(n+1)\mu_n\sin\mu_n}{-2\sin\frac{1}{2}(t-\mu_n)\sin\frac{1}{2}(t+\mu_n)}.\end{aligned}$$

于是利用 $D_n(t)$ 偶性与对称性有

$$\begin{aligned}\int_E|h_{n,1}(t)|\mathrm{d}t&=4\Big(\int_0^{2\mu_n}+\int_{2\mu_n}^{\frac{\pi}{2}-\mu_n}+\int_{\frac{\pi}{2}-2\mu_n}^{\frac{\pi}{2}}\Big)\,|h_{n,1}(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.\end{aligned}$$

对于 α_1,α_3, 有 $\mu_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 而由于 $|D_n(t)|\le n+1$, 有 $|\alpha_1|\le c_1$, $|\alpha_3|\le c_2$, 对于 α_2, 利用上面的证明与不等式

$$\frac{2}{\pi}t\le\sin t\le t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

有

$$|\alpha_2|\le c_3\int_{2\mu_n}^{\frac{\pi}{2}-\mu_n}\frac{\mu_n}{(t-\mu_n)(t+\mu_n)}\mathrm{d}t=\frac{c_3}{2}(\ln\frac{t-\mu_n}{t+\mu_n})|_{2\mu_n}^{\frac{\pi}{2}-\mu_n}\le c_4,$$

在这里 c_i $(i=1,2,3,4)$ 均为常数.

综合 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h_{n,1}(t)|\mathrm{d}t\le c_5,$$

则 $\int_{-\pi}^{\pi}|G(t)|\mathrm{d}t\le A_1$, 同理可证 $\int_{-\pi}^{\pi}|H(\tau)|\mathrm{d}\tau\le A_2$, 这就证明了引理 2.2 成立.

定理 2.1 若 $f(x,y)\in C(\Omega)$, 则 $\lim_{n,m\to\infty}T_{nm}(f;x,y)=f(x,y)$ 在全平面上一致成立.

证明 显然，对于求和因子 $\rho_{\alpha,\beta}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}=&1-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{j}+\\&(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}\\=&1.\end{aligned}$$

而由引理 2.2,

$$\iint\limits_{\Omega}|1+2\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t+2\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{0,\beta}\cos\&\ \beta\tau+4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{\alpha,\beta}\cos\alpha t\cos\beta\tau\,|\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\le A,$$

式中 A 为常数. 由此可以证明，带有此求和因子 $\rho_{\alpha,\beta}$ 的二元三角插值多项式 $T_{nm}(f;x,y)$ 对任意的被插值的二元连续周期函数都能在全平面内是一致收敛，即定理 1 成立.

定理 2.2　若 $f(x,y)\in C^{s,r}(\Omega)$, 则有

$$T_{nm}(f;x,y)-f(x,y)=O\{E^*_{nm}(f)+(\frac{1}{n})^s\omega(f^{(s)}_{x^s};\frac{1}{n},\bullet)+(\frac{1}{m})^r\omega(f^{(r)}_{y^r};\bullet,\frac{1}{m})+ (\frac{1}{n})^s(\frac{1}{r})^r\omega(f^{(s+r)}_{x^sy^r};\frac{1}{n},\frac{1}{m})),$$

其中 $E^*_{nm}(f)$ 是类 $H^*_{nm}(f)$ 中的三角多项式与 $f(x,y)$ 的最佳逼近值.

证明　设 $p(x,y)$ 是类 $\mathrm{H}^T_{n,m}$ 中与 $f(x,y)$ 具有最佳逼近值三角多项式，则有

$$|p(x,y)-f(x,y)|\le E^*_{nm}(f).$$

由引理 2.1 可知 $p(x,y)$ 有如下性质

$$\begin{aligned}T_{nm}(p;x,y)=&p(x,y)-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}p(x-\delta_{in},y)-\\&(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{i}p(x,y-\delta_{jm})+\\&(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}P(x-\delta_{in},y-\delta_{jm}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T_{nm}(f;x,y)-f(x,y)=T_{nm}(f-P;x,y)+(p(x,y)-f(x,y))-\\&\quad(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}(p(x-\delta_{in},y)-f(x-\delta_{in},y))-\\&\quad(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{j}(p(x,y-\delta_{jm})-f(x,y-\delta_{jm}))+\\&\quad(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}(p(x-\delta_{in},y-\delta_{jm})-f(x-\delta_{in},y-\delta_{jm}))-\\&\quad(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}f(x-\delta_{in},y)-(-\frac{1}{2})^{\frac{r_2+1}{2}}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^j\binom{r_2+1}{j}f(x,y-\delta_{jm})+\\&\quad(-\frac{1}{2})^{\frac{r_1+r_2}{2}+1}\sum_{i=0}^{r_1+1}\sum_{j=0}^{r_2+1}(-1)^{i+j}\binom{r_1+1}{i}\binom{r_2+1}{j}f(x-\delta_{in},y-\delta_{jm})=\sum_{i=1}^{8}e_i.\end{aligned}$$

由于对于 $i=2,3,4,5$, 有 $e_i=O(E^*_{nm}(f))$

$$\begin{aligned}|e_1|=&O(E^*_{nm}(f)\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}|\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{\alpha,0}\cos\alpha t+\rho_{0,\beta}\cos\beta\tau+4\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\rho_{\alpha,\beta}\cos\alpha t\cos\beta\tau\ |\\=&O(E^*_{nm}(f)),\end{aligned}$$

若 $f(x,y)\in C^{s,r}(\Omega)$, 则利用导数和差分的关系有

$$
\begin{aligned}
|e_6| &= (\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\sum_{i=0}^{r_1+1}(-1)^i\binom{r_1+1}{i}f(x-(\frac{r_1+1}{2}-i)\mu_n,y)\\
&= (\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\,|\sum_{i=0}^{r_1+1-s}(-1)^i\binom{r_1+1-s}{i}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{k}{j}f(x-(\frac{r_1+1}{2}-i-j)\mu_n,y)\,|\\
&= (\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\mu_n^s|\sum_{i=0}^{r_1+1-s}(-1)^i\binom{r_1+1-s}{i}f_{x^s}^{(s)}(\xi_i,y)|\\
&= (\frac{1}{2})^{\frac{r_1+1}{2}}\mu_n^s|\sum_{i=0}^{r-k_1}(-1)^i\binom{r_1-s}{i}(f_{x^s}^{(s)}(\xi_i,y)-f_{x^s}^{(s)}(\xi_{i+1},y)|=O(\frac{1}{n^s}\omega(f_{x^s}^{(s)};\frac{1}{n},\bullet)).
\end{aligned}
$$

而由于 $|e_7|=O(\frac{1}{m^r}\omega(f_{y^r}^{(r)};\bullet,\frac{1}{m})|$, $|e_8|=O(\frac{1}{n^s}\frac{1}{m^r}\omega(f_{x^sy^r}^{(s+r)};\frac{1}{n},\frac{1}{m})$, 由 e_i 的估计式可得定理 2.2 成立.

参考文献:

[1] LAGINSGI C M. *On convergence and summability of Fourier seies and interpolation processes* [J]. Matem, 1944, **14**(56): 175–268.

[2] HE Jia-xing, ZHANG Yu-lei. *On a linear summation problem in trigonometric interpolation* [J]. J. Math. Study, 1995, **28**(2): 22–27.

[3] HE Jia-xing. *On the liner combination of Grúnwald polynomial operator* [J]. Appl. Math. Comput., 1998, **96**: 117–126.

Linear Summability of Bivariate Trigonometric Interpolation Polynomials

ZHANG Shu-ting, WANG Shu-yun, HE Jia-xing

(School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: We construct a summation factor in this paper, such that the bivariate trigonometric polynomials with the summation factor converge uniformly on the whole plane for any $f(x,y)\in C(\Omega)$, and have the best approximation order.

Key words: summation factor converges uniformly; best approximation order.