第27卷第1期 数学研究与评论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0130-05 **文献标识码**: A

广义 Bott-Duffin 逆及加权 Drazin 逆的若干性质

曹丽琼, 陈果良
(华东师范大学数学系, 上海 200062)
(E-mail: ggkey@163.com)

摘　要: 本文给出了 L- 零矩阵的广义 Bott-Duffin 逆及矩阵的加权 Drazin 逆的若干性质及表达形式.

关键词: L- 零矩阵; 广义 Bott-Duffin 逆; 加权 Drazin 逆.
MSC(2000): 15A24
中图分类: O151.21; O241.6

1 引 言

广义 Bott-Duffin 逆和 Drazin 逆常被应用于求解约束方程及微分方程, 在广义逆矩阵理论和实际应用中起着重要作用.

设矩阵 $A \in C^{n\times n}$, L 是 C^n 的子空间. 若 $AP_L + P_{L^\perp}$ 是非奇异矩阵, 则 A 的 Bott-Duffin 逆 $A_{(L)}^{(-1)}$ 存在, 且具有性质

$$A_{(L)}^{(-1)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1} = (P_LAP_L)^\dagger. \tag{1}$$

若 $AP_L + P_{L^\perp}$ 是奇异矩阵, 可定义 A 的广义 Bott-Duffin 逆为 $A_{(L)}^{(\dagger)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^\dagger$. 我们知道

$$A_{(L)}^{(\dagger)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^\dagger = (P_LAP_L)^\dagger \tag{2}$$

不一定成立. 为此, 陈永林在文献 [5] 中定义了 L- 非负定矩阵, 并证明 L- 非负定矩阵的广义 Bott-Duffin 逆必有 (2) 式成立, 其定义如下

定义 1.1[5]　设 $A \in C^{n\times n}$, 且 $A^* = A$. 若 A 满足条件: $x^*Ax \ \geq\ 0, \forall x \in L$, 若 $x^*Ax = 0$, $x \in L$ 则 $Ax = 0$. 则称 A 为 L- 非负定矩阵 (记为 L-p.s.d. 矩阵).

陈果良等在文献 [7], [8] 中对广义 Bott-Duffin 逆的性质加以深入研究并给出了有关表示特征、扰动分析和计算方法. 同时说明了 L- 零矩阵集真包含 L- 非负定矩阵集. 其定义如下.

定义 1.2[9]　设 $A \in C^{n\times n}$, L 是 C^n 的子空间, 若满足 $AL \cap L^\perp = \{0\}$, 则称 A 为 L- 零矩阵 (记为 L-zero 矩阵).

文献 [9] 还进一步讨论了 L- 零矩阵及其广义 Bott-Duffin 逆所具有的若干性质.

引理 1.1[9]　设 $A \in C^{n\times n}$, L 是 C^n 上的子空间, 则以下命题等价:

(1) A 是 L- 零矩阵;

(2) A 的广义 Bott-Duffin 逆 $A_{(L)}^{(\dagger)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^\dagger = (P_LAP_L)^\dagger$;

收稿日期: 2004-12-10; **修订日期**: 2005-04-15; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10371044; 400001041); 上海市基础研究重点项目 (04JC14031); 上海市重点学科建设资助.

(3) $N(P_LAP_L) = N(AP_L)$.

在上述结果的基础上，我们将给出 L- 零矩阵的广义 Bott-Duffin 逆和矩阵加权 Drazin 逆的若干新性质及表示式.

本文中需注释的符号有：“$*$” 共轭转置运算；“$\bigoplus$” 子空间的直和；“$\overset{\perp}{\oplus}$” 子空间的正交直和；“rank(A)” 矩阵 A 的秩；“dim$L$” 空间 L 的维数；“Ind(A)” 矩阵 A 的指数；“$R(A)$” 矩阵 A 的值域；“$N(A)$” 矩阵 A 的零空间；“$A_{d,W}$” 矩阵 A 的加 W 权 Drazin 逆；“$L^{\perp}$” 子空间 L 的正交补空间；“$P_{T,S}$” 子空间 T 到子空间 S 的投影矩阵，若 $S = T^{\perp}$, 也可简记为 “P_T”.

2 L- 零矩阵及其广义 Bott-Duffin 逆的若干性质

陈永林在文献 [2] 中给出了矩阵 Moore-Penrose 逆的表示式.

引理 2.1[2] 设 $A \in C_r^{m\times m}$, $B \in C_{m-r}^{m\times(m-r)}$, $C \in C_{m-r}^{(m-r)\times m}$, 满足

$$N(C) = R(A^*), \quad R(B) = N(A^*).$$

令 $M = A + BC$, 则 M 非奇异，且 $A^{\dagger} = M^{-1} - C^{\dagger}B^{\dagger} = M^{-1} - C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$.

朱超等在文献 [4] 中给出了对称的 L- 零矩阵的若干性质.

引理 2.2[4] 设 $A \in C^{n\times n}$ 是对称的 L- 零矩阵, 记 $X = P_{L^{\perp}\oplus(L\cap N(A))}$, 令 $M = P_LAP_L + X$, 则以下命题成立：

(1) M 非奇异，且 $M^{-1} \in P_LAP_L\{1, 3, 4\}$;

(2) $M^{-1}P_LAP_LM^{-1} = (P_LAP_L)^{\dagger}$;

(3) $A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - X$.

易知，对称的 L- 零矩阵集包含 L- 非负定矩阵集，从而得到以下推论

推论 2.1 设 $A \in C^{n\times n}$ 是 L- 非负定矩阵. 令 $M = P_LAP_L + X$, 则 M 非奇异，且

$$A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - X.$$

结合引理 1.1 和引理 2.1, 我们可以得到 L- 零矩阵的广义 Bott-Duffin 逆的一个新表示式.

命题 2.1 设 $A \in C^{n\times n}$, L 是 C^n 上的子空间， A 是 L- 零矩阵. 设列满矩阵 B, C^* 满足

$$N(C) = R(P_LA^*P_L), \quad R(B) = N(P_LA^*P_L).$$

令 $M = P_LAP_L + BC$, 则 M 非奇异，且 $A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - C^{\dagger}B^{\dagger}$.

定理 2.1 设 $A \in C^{n\times n}$, L 是 C^n 上的子空间，A 是 L- 零矩阵. 令 $S = L^{\perp} \oplus (L \cap N(A))$, $X = P_S$, 则以下两命题等价：

(i) $M = P_LAP_L + X$ 是非奇异的，且 $A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - X$; (ii) $R(P_LAP_L) = R(P_LA^*)$.

证明 (i)⇒(ii). 由条件 (i) 得

$$P_S = M - P_LAP_L = M^{-1} - A_{(L)}^{(\dagger)}.$$

所以

$$P_S = (M - P_LAP_L)(M^{-1} - A_{(L)}^{(\dagger)}),$$

$$P_S = I - MA_{(L)}^{(\dagger)} - P_LAP_LM^{-1} + P_LAP_LA_{(L)}^{(\dagger)}. \tag{3}$$

又由 $M=P_LAP_L+P_S$, $M^{-1}=A_{(L)}^{(\dagger)}+P_S$. 代入 (3) 式可得

$$P_S=I-P_SA_{(L)}^{(\dagger)}-P_LAP_LA_{(L)}^{(\dagger)}-P_LAP_LP_S.$$

因为

$$S=L^{\perp}\oplus(L\cap N(A))=N(AP_L)=N(P_LAP_L).$$

所以

$$R(A_{(L)}^{(\dagger)})=R(P_LA^*P_L)=N(P_LAP_L)^{\perp}=S^{\perp}.$$

得到

$$P_SA_{(L)}^{(\dagger)}=0,\quad P_LAP_LP_S=0.$$

$$P_S=I-P_{R(P_LAP_L),R(P_LAP_L)^{\perp}}=P_{R(P_LAP_L)^{\perp},R(P_LAP_L)}.$$

从而 $S=R(P_LAP_L)^{\perp}$, 即得 $N(P_LAP_L)=R(P_LAP_L)^{\perp}$. 所以

$$R(P_LAP_L)=N(P_LAP_L)^{\perp}=N(AP_L)^{\perp}=R(P_LA^*).$$

(ii)⇒(i). 因为 A 是 L- 零矩阵, 所以 $N(P_LAP_L)=N(AP_L)$, 从而 $R(P_LA^*)=R(P_LA^*P_L)$, 故

$$N(P_LAP_L)^{\perp}=R(P_LAP_L)=R(P_LA^*)=R(P_LA^*P_L),$$

得到 $R(B)^{\perp}=N(C)$, 即得 $R(B)\overset{\perp}{\oplus}N(C)=C^n$, 这时可取 $C=B^{\dagger}$. 又由

$$R(B)=N(P_LA^*P_L)=N(C)^{\perp}=N(P_LAP_L)=L^{\perp}\oplus(L\cap N(A))=S,$$

所以 $BC=BB^{\dagger}=P_{R(B),N(C)}=P_S$ 是正交投影. 由命题 2.1 可知, $M=P_LAP_L+BC=P_LAP_L+P_S$ 非奇异, 且 $M^{-1}=A_{(L)}^{(\dagger)}+(B^{\dagger})^{\dagger}B^{\dagger}=A_{(L)}^{(\dagger)}+BB^{\dagger}=A_{(L)}^{(\dagger)}+P_S$.

推论 2.2 设 L 是 C^n 上的子空间, A 是 $C^{n\times n}$ 上值域 Hermitian 的 L- 零矩阵, S, M 如定理 2.1 中所示. 则 M 非奇异, 且 $A_{(L)}^{(\dagger)}=M^{-1}-P_S$.

证明 因为 A 是值域 Hermitian 阵, 即 $R(A)=R(A^*)$, $N(A)=N(A^*)$. 所以

$$N(P_LAP_L)=N(AP_L)=L^{\perp}\oplus(L\cap N(A))=L^{\perp}\oplus(L\cap N(A^*))=N(A^*P_L).$$

从而 $R(P_LA^*P_L)=R(P_LA)$. 又 $N(A)=N(A^*)$, 因此 $\dim(AL)=\dim(A^*L)$. 所以

$$\mathrm{rank}(P_LAP_L)=\mathrm{rank}(AP_L)=\mathrm{rank}(A^*P_L)=\mathrm{rank}(P_LA).$$

即 $R(P_LAP_L)=R(P_LA)=R(P_LA^*P_L)=R(P_LA^*)$, 再由定理 2.1 即得.

3 加权 Drazin 逆的若干表示式

本节中, 我们给出加权 Drazin 逆的新表示. 由于加权 Drazin 逆是定义在所有矩阵 (包括方阵和长方阵) 上的, 因此本节的内容可以作为文献 [3] 的推广.

先给出引理:

引理 3.1[3]　设 $A\in C_r^{m\times n}$, L 是 C^n 上的子空间，且 $\dim L=s(\le r)$, K 是 C^m 上的子空间，且 $\dim K=m-s$, $AL\oplus K=C^m$. $B\in C_{m-s}^{m\times(m-s)}$ 是 K 的基，$C^*\in C_{n-s}^{n\times(n-s)}$ 是 $L^\perp$ 的基.

1) 当 $m=n$ 时，令 $T=A+BC-AP_{(A^*K^\perp)^\perp,L}$,

2) 当 $m>n$ 时, 设 $B=(B_1,B_2)$, $B_1\in C_{n-s}^{m\times(n-s)}$, 令 $M=(A+B_1C-AP_{(A^*K^\perp)^\perp,L},B_2)$,

3) 当 $m<n$ 时，设 $C=\binom{C_1}{C_2}$, $C_1\in C_{m-s}^{(m-s)\times n}$, 令 $N=\binom{A+BC_1-P_{K,AL}A}{C_2}$.

则

1) 当 $m=n$ 时，T 非奇异，且 $A_{L,K}^{(2)}=T^{-1}-P_{(A^*K^\perp)^\perp,L}C^\dagger B^\dagger P_{K,AL}$.

2) 当 $m>n$ 时，M 非奇异，记 $M^{-1}=\binom{M_1}{M_2}$, $M_1\in C_n^{n\times m}$. 则 $A_{L,K}^{(2)}=M_1-P_{(A^*K^\perp)^\perp,L}C^\dagger B_1^\dagger(B_1B_1^\dagger+B_2B_2^\dagger)^\dagger P_{K,AL}$.

3) 当 $m<n$ 时，N 非奇异，记 $N^{-1}=(N_1,N_2)$, $N_1\in C_m^{n\times m}$. 则 $A_{L,K}^{(2)}=N_1-P_{(A^*K^\perp)^\perp,L}(C_1^\dagger C_1+C_2^\dagger C_2)^\dagger C_1^\dagger B^\dagger P_{K,AL}$.

在引理 3.1 的基础上，可得有关方阵加权 Drazin 逆的表示式.

定理 3.1　设 $A\in C^{m\times m}$, $W\in C^{m\times m}$, $\mathrm{Ind}(AW)=k_1$, $\mathrm{Ind}(WA)=k_2$, 则

$$A_{d,W}=T^{-1}-P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}}C^\dagger B^\dagger P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}}.$$

其中 $T=WAWP_{R(AW)^{k_1},N(AW)^{k_1}}+BC$, 列满矩阵 B, C^* 分别满足

$$R(B)=N(WA)^{k_2},\quad N(C)=R(AW)^{k_1}.$$

证明　令 $L=R(AW)^{k_1}$, $\dim L=s$; $K=N(WA)^{k_2}$. 则

$$\begin{aligned}\dim K&=\dim N(WA)^{k_2}=m-\dim R(WA)^{k_2}\\&=m-R(AW)^{k_1}=m-s.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}(WAW)L&=WAWR(AW)^{k_1}=WAWR(A_{d,W})\\&=R(WAWA_{d,W})=R(WA)^{k_2},\end{aligned}$$

所以 $(WAW)L\oplus K=C^m$. 由引理 3.1, 即得 $T=WAW+BC-(WAW)P_{[(WAW)^*(N(WA)^{k_2})^\perp]^\perp,R(AW)^{k_1}}$ 非奇异. 又因为

$$\begin{aligned}[(WAW)^*(N(WA)^{k_2})^\perp]^\perp&=[(WAW)^*(N(A_{d,W})^\perp]^\perp=[(WAW)^*R(A_{d,W}^*)]^\perp\\&=[R((WAW)^*A_{d,W}^*)]^\perp=N(A_{d,W}WAW)=N((AW)^{k_1}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T&=WAW+BC-(WAW)P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}}\\&=WAWP_{R(AW)^{k_1},N(AW)^{k_1}}+BC.\end{aligned}$$

又易得 $(WAW)R(AW)^{k_1}=R((WAW)A_{d,W})=R(WA)^{k_2}$, 所以

$$\begin{aligned}A_{d,W}&=(WAW)^{(2)}_{R(AW)^{k_1},N(WA)^{k_2}}\\&=T^{-1}-P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}}C^\dagger B^\dagger P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}}.\end{aligned}$$

特别的，当 $W=I$ 时，由定理 3.1 可得到以下推论.

推论 3.1 设 $A\in C^{m\times m}$, $\mathrm{Ind}(A)=k$, 则 $A_d=T^{-1}-P_{N(A^k),R(A^k)}$, 其中 $T=AP_{R(A^k),N(A^k)}+P_{N(A^k),R(A^k)}$.

当 A 是长方阵时，类似定理 3.1 的证明，可得如下定理：

推论 3.2 设 $A\in C^{m\times n}(m<n)$, $W\in C^{n\times m}$, $\mathrm{Ind}(AW)=k_1$, $\mathrm{Ind}(WA)=k_2$, $\mathrm{rank}(AW)^{k_1}=s$, 则

$$A_{d,W}=M_1-P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}}C^\dagger B_1^\dagger(B_1B_1^\dagger+B_2B_2^\dagger)^\dagger P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}},$$

其中 $M=(WAW+B_1C-WAWP_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}},\ B_2)$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix},\ M_1\in C^{m\times n};\ B=(B_1,\ B_2)\in C_{n-s}^{n\times(n-s)},\ \ B_1\in C_{m-s}^{n\times(m-s)}$$

$C^*\in C_{m-s}^{m\times(m-s)}$ 满足 $R(B)=N(WA)^{k_2}$, $N(C)=R(AW)^{k_1}$.

参考文献：

[1] BUNCH J R, ROSE D J. *Partitioning, tearing and modification of sparse linear systems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1974, **48**: 574–593.

[2] 陈永林. 矩阵的扰动与广义逆 [J]. 应用数学学报， 1986, **9**(3): 319–327.
CHEN Yong-lin. *Perturbations and generalized inverses of matrices* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1986, **9**(3): 319–327. (in Chinese)

[3] JI Jun. *The algebraic perturbation method for generalized inverses* [J]. J. Comput. Math., 1989, **7**(4): 327–333.

[4] 朱超，曹丽琼，陈果良. 几类广义逆矩阵的若干性质 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2006, **3**: 26–31.
ZHU Chao, CAO Li-qiong, CHEN Guo-liang. *Some properties of three kinds of generalized inverses* [J]. J. East China Normal University (Natural Science), 2006, **3**: 26–31. (in Chinese)

[5] CHEN Yong-lin. *The generalized Bott-Duffin inverse and its applications* [J]. Linear Algebra Appl., 1990, **134**: 71–91.

[6] WEI Yi-min. *A characterization for the W-weighted Drazin inverse and a Cramer rule for the W-weighted Drazin inverse solution* [J]. Appl. Math. Comput., 2002, **125**: 303–310.

[7] CHEN Guo-liang, LIU Guo-ming, XUE Yi-feng. *Perturbation theory for the generalized Bott-Duffin inverse and its applications* [J]. Appl. Math. Comput., 2002, **129**: 145–155.

[8] XUE Yi-feng, CHEN Guo-liang. *The expression of the generalized Bott-Duffin inverse and its perturbation theory* [J]. Appl. Math. Comput., 2002, **132**: 437–444.

[9] CHEN Guo-liang, LIU Guo-ming, XUE Yi-feng. *Perturbation analysis of the generalized Bott-Duffin inverse of L-zero matrices* [J]. Linear Multilinear Algebra, 2003, **51**: 11–20.

Properties of Generalized Bott-Duffin Inverse and Weighted Drazin Inverse

CAO Li-qiong, CHEN Guo-liang

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The generalized Bott-Duffin inverse of L-zero matrices and weighted Drazin inverse matrices are discussed in this paper. Some properties are given. Based on these properties, we obtain several new expressions of these matrices.

Key words: L-zero matrices; generalized Bott-Duffin inverse; weighted Drazin inverse.