

# 自持磁约束电子云中离子的运动\*

郁庆长 黄佳昌

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

## 摘 要

本文研究自持磁约束电子云中由电子-原子电离碰撞产生的离子的运动, 并指出这一运动的混沌特性。文中还讨论了通过测量离子电流确定电子云中电位分布的方法。

对依靠 Penning 放电维持的磁约束电子云中离子的运动已有一些人作过研究<sup>[1,2]</sup>。在多数论文中都假定电子云内部的径向电场是线性的, 这意味着认为电子云是均匀的。但是实际上, 特别是在磁场较高的情况下, 自持磁约束电子云往往是不均匀的<sup>[3,4]</sup>。

本文将在更广泛的条件下讨论这一问题。我们假定系统是轴对称的。电子云可以是均匀的或不均匀的, 因此电子云中径向电场除线性项外还可包含非线性项。在电子云中除两端外纵向电场都比径向电场小得多。

本文还将指出这种电子云中离子运动所带有的混沌特性, 它和径向电场的非线性无关。

## 一、离子的横向运动

讨论图 1 所示的磁约束装置。A 为阳极, C 为阴极。装置处于均匀纵向磁场和高真空中, Penning 放电产生的电子云被约束在装置内。电子与残余气体原子发生电离碰撞产生离子。

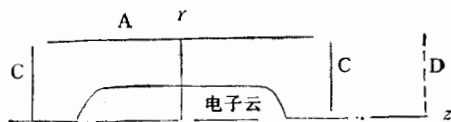


图 1 电子云磁约束装置

先研究离子的横向运动。采用圆柱坐标系  $(r, \varphi, z)$ 。在径向电场与纵向磁场作用下离子的运动遵循能量守恒与角动量守恒原理:

$$\frac{1}{2} M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + qU = \frac{1}{2} Mr_0^2\dot{\varphi}_0^2 + qU_0, \quad (1)$$

$$Mr^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2} qr^2B = Mr_0^2\dot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} qr_0^2B, \quad (2)$$

本文 1991 年 7 月 5 日收到。

\* 国家自然科学基金资助。

此处  $M$  为离子质量,  $q$  为离子电荷,  $U$  为电位,  $B$  为磁感应强度. 字母上的圆点表示对时间的导数  $\frac{d}{dt}$ ,  $r_0$  为径向坐标  $r$  的最大值,  $\dot{\phi}_0, U_0$  为  $r = r_0$  处  $\dot{\phi}, U$  的值. 显然  $r = r_0$  处  $\dot{r} = 0$ . 在不考虑离子热运动时  $\dot{\phi}_0 = 0$ .

式(2)可化为

$$r^2 \dot{\phi} = \frac{Q}{2} (r_0^2 - r^2) + r_0^2 \dot{\phi}_0, \quad (3)$$

此处  $Q = \frac{q}{M} B$  为离子的回旋频率. 代式(3)入式(1)得

$$\dot{r}^2 = \frac{2q}{M} (U_0 - U) - \frac{Q^2}{4r^2} (r_0^2 - r^2) \left[ r_0^2 \left( 1 + \frac{2\dot{\phi}_0}{Q} \right)^2 - r^2 \right]. \quad (4)$$

如果电子云是均匀的,

$$U = \frac{enr^2}{4\epsilon_0}, \quad (5)$$

则有

$$\frac{2q}{M} (U_0 - U) = Q\omega_r (r_0^2 - r^2), \quad (6)$$

此处  $e$  为电子电荷的绝对值,  $n$  为电子密度,  $\epsilon_0$  为真空介电常数,  $\omega_r$  为电子云整体的转动频率

$$\omega_r = \frac{en}{2\epsilon_0 B}. \quad (7)$$

代入式(4), 并考虑  $Q \ll \omega_r$ ,

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{Q}{r^2} \left( \omega_r + \frac{Q}{4} \right) (r_0^2 - r^2) \left[ r^2 - \frac{Qr_0^2}{Q + 4\omega_r} \left( 1 + \frac{2\dot{\phi}_0}{Q} \right)^2 \right] \\ &\approx \frac{Q\omega_r}{r^2} (r_0^2 - r^2) \left[ r^2 - \frac{Qr_0^2}{4\omega_r} \left( 1 + \frac{2\dot{\phi}_0}{Q} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

显然

$$r_{\max} = r_0, r_{\min} = \frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{Q}{\omega_r} \left( 1 + \frac{2\dot{\phi}_0}{Q} \right)}.$$

当电子云不均匀时, 形式上也可定义

$$\omega_r = \frac{2(U_0 - U)}{B(r_0^2 - r^2)}, \quad (9)$$

使式(8)仍适用. 但此时  $\omega_r$  不再等于电子云的转动频率.

## 二、离子的纵向运动

电子云中还存在着纵向电场, 离子产生时也具有一定的纵向初速度, 因此它将不断从电子云中心向两端逃逸. 选择云中心  $z = 0$ , 假定纵向电场正比于  $z$ ,

$$\ddot{z} = cz, \quad (10)$$

$c$  为常数. 由于  $\dot{z} = z \frac{dz}{dz}$ , 可解出

$$z^2 = z_0^2 + c(z^2 - z_0^2). \quad (11)$$

$z_0$  与  $z_0$  为离子产生处的  $z$  与  $z$  值。不考虑离子热运动时  $z_0 = 0$ 。引入

$$z_1 = |z_0^2 - z_0^2/c|^{1/2}, \quad (12)$$

得

$$z^2 = \begin{cases} c(z^2 + z_1^2), & z_0^2 < z_0^2/c, \\ c(z^2 - z_1^2), & z_0^2 > z_0^2/c. \end{cases} \quad (13)$$

积分可求出离子由产生处运动到  $z$  处所需时间

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcsch} \frac{|z|}{z_1}, & z_0^2 < z_0^2/c, \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcch} \frac{|z|}{z_1}, & z_0^2 > z_0^2/c. \end{cases} \quad (14)$$

对  $z_1$  取导数,

$$\frac{dt}{dz_1} = \begin{cases} -\frac{|z|}{\sqrt{c} z_1 \sqrt{z^2 + z_1^2}}, & z_0^2 < z_0^2/c, \\ -\frac{|z|}{\sqrt{c} z_1 \sqrt{z^2 - z_1^2}}, & z_0^2 > z_0^2/c. \end{cases} \quad (15)$$

当  $z_1 \rightarrow 0$  时下列导数都趋向无穷大:

$$\frac{dt}{dz_1} = -\frac{1}{\sqrt{c} z_1}. \quad (16)$$

$$\frac{dr}{dz_1} = r \frac{dt}{dz_1} = -\frac{r}{\sqrt{c} z_1}. \quad (17)$$

显然,在电子云中心附近,当离子产生时的纵向坐标  $z_0$  和速度  $z_0$  有微小变化时离子运动轨迹将会有很大的变化。这表明了离子运动的混沌特性。但是这一混沌特性并不是由电场的非线性所引起的。

### 三、离子通过阴极孔后的运动

苏联 Рейхрудель 等在研究自持磁约束电子云中离子运动的基础上提出了测定电子云中电位分布的离子运动学方法<sup>[5]</sup>。他们也利用了电位与径向坐标成二次式关系的假定。本文将不依靠这一假定来讨论此问题。

图1中离子通过阴极中心的小孔后射向探测器D,它由一系列相互绝缘的导体环组成。当半径为R的导体环通过电流表接一可调电位  $U_R$ ,其它导体环接阴极电位时,满足

$$\frac{1}{2} M(r^2 + z^2) = q(U_0 - U_R - U_s) < 0 \quad (18)$$

的离子将不能到达该导体环,此处

$$U_s = \frac{MQ^2}{8qR^2} (r_0^2 - R^2)^2. \quad (19)$$

下面导出  $R$  与  $r_0, U_0$  的关系。

通过阴极孔的离子的横向运动遵循

$$r^2 + \frac{Q^2}{4r^2} (r_0^2 - r^2)^2 = Q^2 \rho^2 \approx \frac{2q}{M} (U_0 - U_c), \quad (20)$$

此处  $\rho$  为离子的迴旋半径,  $U_c$  为电子云中心电位, 由此

$$dt = \frac{dr}{Q \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4r^2} (r_0^2 - r^2)^2}}. \quad (21)$$

离子从阴极到达探测器需要时间为  $d/v_L$ ,  $d$  为阴极与探测器间距,  $v_L$  为离子纵向速度,

$$v_L = \sqrt{2qU_c/M}. \quad (22)$$

认为离子在阴极孔处  $r \approx 0$ , 对式(21)积分得

$$R^2 = 2\rho^2 + r_0^2 - 2\rho \sqrt{\rho^2 + r_0^2} \cos\left(\frac{Qd}{v_L}\right). \quad (23)$$

调节  $U_R$ , 当到达该导体环的离子电流逐渐减至 0 时,  $U_0 - U_R$  即等于该环的  $U_s$  值. 由式(19)可从  $U_s$  计算  $r_0$ , 利用式(23)即可确定  $\rho$  与  $r_0$  的关系从而获得  $U_0(r_0)$ . 这样就得到了电子云中径向电位分布.

### 参 考 文 献

- [1] G.E. Sieger et al., *Phys. Fluids*, **27**(1984),291.
- [2] Г.В. Смирницкая и др., *Жур. Тех. Физ.*, **36**(1966),1217.
- [3] W. Schuurman, *Physica*, **36**(1967),136.
- [4] Э.М. Рейхрудель и др., *Жур. Тех. Физ.*, **43**(1973),130.
- [5] Э.М. Рейхрудель и др., *Жур. Тех. Физ.*, **36**(1966),1226.

## On The Motion of Ions in The Self-sustaining Magnetically Confined Electron Cloud

YU QINGCHANG HUANG JIACHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039)

### ABSTRACT

The motion of ions generated from the electron-atom ionization collisions in the self-sustaining magnetically confined electron cloud is studied. It is shown that the motion is chaotic. The method to determine the electric potential distribution in the electron cloud by measurements of the ion current is discussed.