第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0591-07 **文献标识码**: **A**

广义 k 次 Gauss 和及其四次均值

刘华宁
(西北大学数学系，陕西 西安 710069)
(E-mail: hnliu@nwu.edu.cn)

摘 要: 本文研究了广义 k 次 Gauss 和的四次均值，给出了两个计算公式.

关键词: 广义 Gauss 和；四次均值；计算公式.
MSC(2000): 11L05
中图分类: O156.4

1 引 言

设整数 $q \geq 3$. 对于任意整数 n 和自然数 k, 广义 k 次 Gauss 和 $G(n,k,\chi;q)$ 定义如下：

$$G(n,k,\chi;q)=\sum_{b=1}^{q}\chi(b)\mathrm{e}(\frac{nb^k}{q}).$$

当 $k=1$ 时，即为经典的 Gauss 和 $G(n,\chi)$.

关于广义 k 次 Gauss 和，人们知之甚少. 当 χ 变化时， $|G(n,k,\chi;q)|$ 的值也很不规则，甚至只能得到一些上界估计. 例如对与 q 互素的整数 n, 由 Cochrane 与郑志勇 [1] 的一般结果可以得出

$$|G(n,2,\chi;q)| \leq 2^{\omega(q)}q^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\omega(q)$ 表示 q 的不同素因数的个数. Weil[2] 证明了 q 为素数时的情形.

令人惊奇的是， $G(n,k,\chi;q)$ 在一些加权问题中表现出良好的分布性质. 当 $k=2$ 时，张文鹏 [3,4] 研究了 Dirichlet L- 函数与广义二次 Gauss 和的混合均值，并给出了下面几个有趣的渐近公式：

命题 1 对于任意与 p 互素的正整数 n, 有

$$\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi \bmod p}}|G(n,2,\chi;p)|^2\cdot|L(1,\chi)|=C\cdot p^2+O(p^{\frac{3}{2}}\ln^2 p)$$

和

$$\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi \bmod p}}|G(n,2,\chi;p)|^4\cdot|L(1,\chi)|=3\cdot C\cdot p^3+O(p^{\frac{5}{2}}\ln^2 p),$$

收稿日期: 2004-06-03
基金项目: 陕西省自然科学基金 (2002A11)

其中

$$C=\prod_p[1+\frac{\binom{2}{1}^2}{4^2\cdot p^2}+\frac{\binom{4}{2}^2}{4^4\cdot p^4}+\cdots+\frac{\binom{2m}{m}^2}{4^{2m}\cdot p^{2m}}+\cdots]$$

是一个常数, $\prod_p$ 表示对所有素数求积, $\binom{2m}{m}=(2m)!/(m!)^2$.

命题 2 设素数 $p\equiv 3 \bmod 4$, 则对于任意与 p 互素的正整数 n, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi \bmod p}}|G(n,2,\chi;p)|^6\cdot|L(1,\chi)|=10\cdot C\cdot p^4+O(p^{\frac{7}{2}}\ln^2 p).$$

设整数 n 与 p 互素. 张文鹏 [3] 还得到了下面两个恒等式:

$$\sum_{\chi \bmod p}|G(n,2,\chi;p)|^4=\begin{cases}(p-1)[3p^2-6p-1+4\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}], & \text{如果 } p\equiv 1 \bmod 4;\\ (p-1)(3p^2-6p-1), & \text{如果 } p\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

和

$$\sum_{\chi \bmod p}|G(n,2,\chi;p)|^6=(p-1)(10p^3-25p^2-4p-1),\ \text{如果 } p\equiv 3 \bmod 4,$$

其中 $(\frac{n}{p})$ 为 Legendre 符号.

很自然地, 人们会考虑

$$\sum_{\chi \bmod q}|G(n,k,\chi;q)|^{2m}$$

的计算问题, 并试图求出一些公式. 当 $m=1$ 时, 容易得到

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod q}|G(n,k,\chi;q)|^2&=\sum_{\chi \bmod q}\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\mathrm{e}(\frac{na^k}{q})\sum_{b=1}^{q}\overline{\chi}(b)\mathrm{e}(-\frac{nb^k}{q})\\ &=\varphi(q){\sum_{a=1}^{q}}'\mathrm{e}(\frac{na^k}{q}-\frac{na^k}{q})=\varphi^2(q).\end{aligned}$$

当 $m>1$ 时, 计算的难度显著增大, 但是把这方面的工作继续下去是很有意义的. 本文的目的之一就是研究广义 4 次 Gauss 和的均值, 并证明下面的定理.

定理 1 设素数 p 满足 $4\mid p-1$, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi \bmod p}|G(1,4,\chi;p)|^4\\ &=\begin{cases}7p^3-29p^2+21p+1+4(p-1)\left(V-\sqrt{p}\right)[\left(V-\sqrt{p}\right)^2-3p-2\sqrt{p}+1]\\ \qquad+\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}[\left(V-\sqrt{p}\right)^2-2p-2\sqrt{p}]^2, & \text{如果 } p\equiv 1 \bmod 8;\\ 7p^3-29p^2+21p+1+\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}[\left(V-\sqrt{p}\right)^2+2p+2\sqrt{p}]^2, & \text{如果 } p\equiv 5 \bmod 8,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $V=\sum_{a=1}^{p}\mathrm{e}(\frac{a^4}{p})$.

设 χ_4 为模 p 的 4 次特征，则有

$$\begin{aligned} V &= \sum_{a=1}^{p} \mathrm{e}(\frac{a^4}{p}) = 1 + \sum_{a=1}^{p-1} \mathrm{e}(\frac{a^4}{p}) \\ &= 1 + \sum_{a=1}^{p-1} (1 + \chi_4(a) + \chi_4^2(a) + \chi_4^3(a)) \mathrm{e}(\frac{a}{p}) \\ &= \tau(\chi_4) + \tau(\chi_4^2) + \tau(\chi_4^3) \ll \sqrt{p}, \end{aligned}$$

由此及定理 1 可得

$$\sum_{\chi \bmod p} |G(1,4,\chi;p)|^4 = 7p^3 + O(p^{\frac{5}{2}}).$$

这就促使人们猜测，是否存在关于 $G(n,k,\chi;p)$ 的四次均值的渐近公式. 本文对此做出了肯定的回答，即就是证明下面的：

定理 2 设 $p \geq 5$ 为素数， k 为正整数，整数 n 与 p 互素，并设 $d_k = (k, p-1) > 1$, 则有

$$\sum_{\chi \bmod p} |G(n,k,\chi;p)|^4 = (2d_k - 1)\, p^3 + O(d_k^3 p^{\frac{5}{2}}).$$

2 几个引理

为了完成定理的证明，需要下面几个引理.

引理 1 设素数 p 满足 $4 \mid p-1$, χ_4 为模 p 的 4 次特征，则有

$$\sum_{a=1}^{p-1} \chi_4(a^4 - 1) = [1 + \chi_4(-1)]\, (\frac{\tau^2(\chi_4)}{\sqrt{p}} - 1); \tag{1}$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} \chi_4^2(a^4 - 1) = -2 + \frac{\chi_4(-1)}{\sqrt{p}} (\tau^2(\chi_4) + \tau^2(\overline{\chi}_4)). \tag{2}$$

证明 由剩余系的性质有

$$\sum_{a=1}^{p-1} \chi_4(a^4 - 1) = \sum_{a=1}^{p-1} [1 + \chi_4(a) + \chi_4^2(a) + + \chi_4^3(a)] \chi_4(a-1).$$

又由于 χ_4^2 为实特征，由 Gauss 的著名公式 (参阅文献 [5] 中的定理 9.16)

$$\sum_{a=1}^{p} \mathrm{e}(\frac{a^2}{p}) = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,(1+i)\,(1 + \mathrm{e}^{\frac{-\pi i p}{2}}) = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{如果}\ \ p \equiv 1 \bmod 4; \\ 0, & \text{如果}\ \ p \equiv 2 \bmod 4; \\ i\sqrt{p}, & \text{如果}\ \ p \equiv 3 \bmod 4; \\ (1+i)\sqrt{p}, & \text{如果}\ \ p \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

可得

$$\tau(\chi_4^2) = \sqrt{p}. \tag{3}$$

并注意到

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a-1)=-\chi_4(-1),$$

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4^2(a)\chi_4(a-1)=\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4^2(\overline{a})\chi_4(a-1)=\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(\overline{a})\chi_4(1-\overline{a})=\chi_4(-1)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a)\chi_4(a-1),$$

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4^3(a)\chi_4(a-1)=\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi}_4(a)\chi_4(a-1)=\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(1-\overline{a})=-1,$$

则有

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a^4-1)=[1+\chi_4(-1)]\,(\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a)\chi_4(a-1))-[1+\chi_4(-1)]\,.$$

由此及

$$\begin{aligned}\tau^2(\chi_4)&=\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a)\mathrm{e}(\frac{a}{p})\sum_{b=1}^{p-1}\chi_4(b)\mathrm{e}(\frac{b}{p})=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi_4(a)\chi_4^2(b)\mathrm{e}(\frac{b(a+1)}{p})\\&=\tau(\chi_4^2)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a)\overline{\chi}_4^2(a+1)=\sqrt{p}\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4^2(a)\chi_4(a-1)\\&=\sqrt{p}\chi_4(-1)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a)\chi_4(a-1),\end{aligned}$$

可得

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi_4(a^4-1)=[1+\chi_4(-1)]\,(\frac{\tau^2(\chi_4)}{\sqrt{p}}-1).$$

这就证明了式 (1). 类似的可以得到式 (2).

引理 2 设素数 p 满足 $4\mid p-1$, χ_4 为模 p 的 4 次特征，则有

$$\begin{cases}\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4)=V-\sqrt{p};\\ \tau^2(\chi_4)+\tau^2(\overline{\chi}_4)=\left(V-\sqrt{p}\right)^2-2p\chi_4(-1);\\ \tau^3(\chi_4)+\tau^3(\overline{\chi}_4)=\left(V-\sqrt{p}\right)^3-3p\chi_4(-1)\left(V-\sqrt{p}\right).\end{cases}$$

证明 显然

$$\begin{aligned}V&=\sum_{a=1}^{p}\mathrm{e}(\frac{a^4}{p})=1+\sum_{a=1}^{p-1}\mathrm{e}(\frac{a^4}{p})\\&=1+\sum_{a=1}^{p-1}(1+\chi_4(a)+\chi_4^2(a)+\chi_4^3(a))\mathrm{e}(\frac{a}{p})\\&=\tau(\chi_4)+\tau(\chi_4^2)+\tau(\chi_4^3)=\sqrt{p}+\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4),\end{aligned}$$

由此可得

$$(V-\sqrt{p})^2=(\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4))^2=\tau^2(\chi_4)+\tau^2(\overline{\chi}_4)+2p\chi_4(-1)$$

和

$$(V-\sqrt{p})^3=(\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4))^3=\tau^3(\chi_4)+\tau^3(\overline{\chi}_4)+3p\chi_4(-1)[\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4)],$$

所以有

$$\begin{cases}\tau(\chi_4)+\tau(\overline{\chi}_4)=V-\sqrt{p};\\ \tau^2(\chi_4)+\tau^2(\overline{\chi}_4)=\left(V-\sqrt{p}\right)^2-2p\chi_4(-1);\\ \tau^3(\chi_4)+\tau^3(\overline{\chi}_4)=\left(V-\sqrt{p}\right)^3-3p\chi_4(-1)\left(V-\sqrt{p}\right).\end{cases}$$

引理 3 设 $\chi_1,\cdots,\chi_r$ 为模 p ($p\geq 5$, 为素数) 的非主特征， $f_1(x),\cdots,f_r(x)$ 为模 p 的既约正规多项式，次数分别为 $k_1,\cdots,k_r$. 记 $k=k_1+\cdots+k_r$, 则有

$$|\sum_{x=0}^{p-1}\chi_1\left(f_1(x)\right)\cdots\chi_r\left(f_r(x)\right)|\ll(k-1)p^{1-\theta_k},$$

其中 $\theta_2=\dfrac{1}{2}$, $\theta_3=\frac{1}{4}$, $\theta_k=\frac{3}{2k+8}$ 如果 $k\geq 4$; 且当

$$\chi_1^{k_1}\cdots\chi_r^{k_r}=\chi_0$$

时， θ_k 可由 θ_{k-1} 代替.

证明 参阅文献 [6].

引理 4 设 $p\geq 5$ 为素数，k 为正整数，χ 为模 p 的任意非主特征, 并设 $d_k=(k,p-1)>1$, 则有

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a^k-1)\ll d_kp^{\frac{1}{2}}.$$

证明 设 χ_{d_k} 为模 p 的 d_k 次特征，则由引理 3 容易得到

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a^k-1)=\sum_{a=1}^{p-1}[1+\chi_{d_k}(a)+\cdots+\chi_{d_k}^{d_k-1}(a)]\chi(a-1)\ll d_kp^{\frac{1}{2}}.$$

3 定理的证明

设素数 p 满足 $4\mid p-1$, χ_4 为模 p 的 4 次特征，则有

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\bmod p}|G(1,4,\chi;p)|^4=\sum_{\chi\bmod p}|\sum_{b=1}^{p}\chi(b)\mathrm{e}(\frac{b^4}{p})|^4=(p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}\mathrm{e}(\frac{c^4(b^4-1)}{p})|^2\\&=(p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}[1+\chi_4(c)+\chi_4^2(c)+\chi_4^3(c)]\mathrm{e}(\frac{c(b^4-1)}{p})|^2\\&=(p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}\mathrm{e}(\frac{c(b^4-1)}{p})+\overline{\chi}_4(b^4-1)\tau(\chi_4)+\overline{\chi}_4^2(b^4-1)\tau(\chi_4^2)+\overline{\chi}_4^3(b^4-1)\tau(\chi_4^3)|^2\\&=4(p-1)^3+(p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\overline{\chi}_4(b^4-1)\tau(\chi_4)+\overline{\chi}_4^2(b^4-1)\tau(\chi_4^2)+\overline{\chi}_4^3(b^4-1)\tau(\chi_4^3)-1|^2.\end{aligned}$$

则由式 (3) 和引理 1, 引理 2 可得

$$\sum_{\chi \bmod p} |G(1,4,\chi;p)|^4 = 4(p-1)^3 + (p-1)(3p+1)(p-5) + (p-1)\times$$
$$[(1+\chi_4(-1))(\sqrt{p}\tau(\chi_4) - \tau(\overline{\chi}_4))\sum_{b=1}^{p-1}\chi_4(b^4-1) +$$
$$(1+\chi_4(-1))(\sqrt{p}\tau(\overline{\chi}_4) - \tau(\chi_4))\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}_4(b^4-1) +$$
$$(\chi_4(-1)\tau^2(\chi_4) + \chi_4(-1)\tau^2(\overline{\chi}_4) - 2\sqrt{p})\sum_{b=1}^{p-1}\chi_4^2(b^4-1)]$$
$$= 7p^3 - 29p^2 + 21p + 1 +$$
$$(p-1)(1+\chi_4(-1))^2[(-\sqrt{p} - \chi_4(-1)\sqrt{p} + 1)(\tau(\chi_4) + \tau(\overline{\chi}_4)) + \tau^3(\chi_4) + \tau^3(\overline{\chi}_4)] +$$
$$\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}[\chi_4(-1)\left(\tau^2(\chi_4) + \tau^2(\overline{\chi}_4)\right) - 2\sqrt{p}]^2$$
$$= 7p^3 - 29p^2 + 21p + 1 +$$
$$(p-1)[1+\chi_4(-1)]^2(V-\sqrt{p})[(V-\sqrt{p})^2 - 3p\chi_4(-1) - \sqrt{p} - \chi_4(-1)\sqrt{p} + 1] +$$
$$\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}[\chi_4(-1)(V-\sqrt{p})^2 - 2p - 2\sqrt{p}]^2$$
$$= \begin{cases} 7p^3 - 29p^2 + 21p + 1 + 4(p-1)\left(V-\sqrt{p}\right)\left[\left(V-\sqrt{p}\right)^2 - 3p - 2\sqrt{p} + 1\right] \\ \qquad + \frac{(p-1)}{\sqrt{p}}\left[\left(V-\sqrt{p}\right)^2 - 2p - 2\sqrt{p}\right]^2, & \text{如果 } p \equiv 1 \bmod 8; \\ 7p^3 - 29p^2 + 21p + 1 + \frac{(p-1)}{\sqrt{p}}\left[\left(V-\sqrt{p}\right)^2 + 2p + 2\sqrt{p}\right]^2, & \text{如果 } p \equiv 5 \bmod 8, \end{cases}$$

这就证明了定理 1.

设 $p \geq 5$ 为素数, k 为正整数, 整数 n 与 p 互素, 并设 $d_k = (k, p-1) > 1$, χ_{d_k} 为模 p 的 d_k 次特征, 则由引理 4 有

$$\sum_{\chi \bmod p} |G(n,k,\chi;p)|^4 = \sum_{\chi \bmod p} |\sum_{b=1}^{p}\chi(b)\mathrm{e}(\frac{nb^k}{p})|^4$$
$$= (p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}\mathrm{e}(\frac{nc^k(b^k-1)}{p})|^2$$
$$= (p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}[1 + \chi_{d_k}(c) + \cdots + \chi_{d_k}^{d_k-1}(c)]\mathrm{e}(\frac{nc(b^k-1)}{p})|^2$$
$$= (p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\sum_{c=1}^{p-1}\mathrm{e}(\frac{nc(b^k-1)}{p}) + \overline{\chi}_{d_k}(n(b^k-1))\tau(\chi_{d_k}) + \cdots + \overline{\chi}_{d_k}^{d_k-1}(n(b^k-1))\tau(\chi_{d_k}^{d_k-1})|^2$$
$$= d_k(p-1)^3 + (p-1)\sum_{b=1}^{p-1}|\overline{\chi}_{d_k}(n(b^k-1))\tau(\chi_{d_k}) + \cdots + \overline{\chi}_{d_k}^{d_k-1}(n(b^k-1))\tau(\chi_{d_k}^{d_k-1}) - 1|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= d_k(p-1)^3 + (p-1)\left[(d_k-1)\,p+1\right](p-1-d_k) + \\
&\quad (p-1)\sum_{i=1}^{d_k-1}\sum_{j=0}^{i-1}\tau(\chi_{d_k}^{i})\overline{\tau}(\chi_{d_k}^{j})\overline{\chi}_{d_k}^{\,i-j}(n)\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}_{d_k}^{\,i-j}(b^k-1) + \\
&\quad (p-1)\sum_{i=0}^{d_k-2}\sum_{j=i+1}^{d_k-1}\tau(\chi_{d_k}^{i})\overline{\tau}(\chi_{d_k}^{j})\chi_{d_k}^{j-i}(n)\sum_{b=1}^{p-1}\chi_{d_k}^{j-i}(b^k-1) \\
&= (2d_k-1)\,p^3 + O(d_k^3 p^{\frac{5}{2}}).
\end{aligned}
$$

这就完成了定理 2 的证明.

致谢 作者对导师张文鹏教授的悉心指导表示衷心的感谢！

参考文献:

[1] COCHRANE T, ZHENG Zhi-yong. *Pure and mixed exponential sums* [J]. Acta Arith., 1999, **91**: 249–278.
[2] WEIL A. *On some exponential sums* [J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1948, **34**: 204–207.
[3] ZHANG Wen-peng. *Moments of generalized quadratic gauss sums weighted by L-functions*[J]. J. Number Theory, 2002, **92**: 304–314.
[4] ZHANG Wen-peng, DENG Yu-ping. *A hybrid mean value of the inversion of L-functions and general quadratic Gauss sums*[J]. Nagoya Math. J., 2002, **167**: 1–15.
[5] APOSTOL T M. *Introduction to Analytic Number Theory* [M]. Springer-Verlag, New York, 1976.
[6] DAVENPORT H. *On character sums in finite fields* [J]. Acta Math., 1939, **71**: 99-121.

On the General k-th Gauss Sums and Their Fourth Power Mean

LIU Hua-ning
(Dept. of Math., Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: This paper deals with the fourth power mean of the general k-th Gauss sums, and give two calculating formulae.

Key words: general Gauss sums; fourth power mean; calculating formula.