第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0762-05 **文献标识码**: **A**

非循环子群共轭类个数小于等于 2 的有限群

李世荣， 赵旭波
(广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁 530004)
(E-mail: shirong@gxu.edu.cn)

摘 要: 本文讨论了非循环子群共轭类个数小于等于 2 的有限群，给出了此类群的完全分类.

关键词: 有限群；循环子群；群的构造.
MSC(2000): 20D10
中图分类: O152.1

1 引 言

令 G 是一个有限群， $r(G)$ 表示 G 中非循环子群的共轭类个数. 我们已知道非循环子群共轭类个数 $r(G)\le 1$ 的有限群 G .

(1) $r(G)=0 \Longleftrightarrow G$ 为循环群.

(2) $r(G)=1 \Longleftrightarrow G$ 为内循环群，而内循环群只有下述三种不同构的类型 [1]:

(I) $G\cong Z_p\times Z_p$;

(II) G 为 8 阶四元数群 Q_8 ;

(III) $G=\langle a,b\rangle$, 有如下关系：

$a^p=1,\ b^{q^m}=1,\ b^{-1}ab=a^r$, 且 $r\not\equiv 1(\bmod\ p),\ r^q\equiv 1(\bmod\ p)$. 其中， p,q 为互异素数，m,r 为正整数.

本文讨论了 $r(G)=2$ 的有限群，得到如下定理：

主要定理 若有限群 G 的非循环子群共轭类个数 $r(G)=2$, 则

(I) 当 G 为 p- 群时 (p 为素数), G 为下述两种情况之一：

i). G 为 (p^2,p) 型交换群， $G=\langle a,b\rangle$ 有定义关系： $a^{p^2}=b^p=1,\ [a,b]=1$;

ii). $p\ne 2,\ G=\langle a,b\rangle$ 有定义关系： $a^{p^2}=b^p=1,\ b^{-1}ab=a^{1+p}$.

(II) 当 G 不是素数幂阶群时， G 为下述七种情况之一：

i). $G\cong Z_p\times Z_p\times Z_q$, p,q 为互异素数;

ii). $G\cong Q_8\times Z_p$, p 为奇素数;

iii). $G\cong\overline{G}=\langle a,b|\ a^{p^2}=b^{q^m}=1,\ b^{-1}ab=a^r\rangle$, 且 $r\not\equiv 1(\bmod\ p^2),\ r^q\equiv 1(\bmod\ p^2)$, p,q 为互异素数，且 $p>q$, m,r 为正整数;

iv). $G\cong H\times Z_r$, 其中， $H=\langle a,b|\ a^p=b^{q^m}=1,\ b^{-1}ab=a^t\rangle$, 且 $t\not\equiv 1(\bmod\ p),\ t^q\equiv 1(\bmod\ p)$, p,q,r 为互异素数， m,t 为正整数;

v). $G\cong[Z_p^2]Z_q$, $[Z_p^2,Z_q]=Z_p^2$, p,q 为互异素数，且 $q|p+1,\ q\nmid p-1$;

vi). $G\cong[Q_8]Z_3$, $[Q_8,Z_3]=Q_8$;

收稿日期: 2005-08-08; **接受日期**: 2006-07-16

vii). $G \cong \overline{G} = \langle a, b |\ a^p = b^{q^{m+1}} = 1,\ b^{-1}ab = a^r\rangle$, 且 $r^q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, $r^{q^2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, p, q 为互异素数， m, r 为正整数.

2 预备引理

引理 2.1　不存在恰有 2 个极大子群的 $p-$群.

证明　反证法.

设 $p-$群 G 恰有两个极大子群 M_1, M_2, 有 $|\ G : M_i\ | = p$, $i = 1, 2$. 则 $|\ G\ | = p\ |\ M_1\ |$, $M_1 \cup M_2 < G$, 故 $\forall x \in G \setminus M_1 \cup M_2$, 有 $\langle x\rangle = G$, 这样 G 只有一个极大子群，矛盾.

引理 2.2[1]　设 $|G| = p^n$ (p 为素数), G 有 p^{n-1} 阶循环子群 $\langle a\rangle$, 则 G 只有下述七种类型：

(I) p^n 阶循环群： $G = \langle a\rangle$, $a^{p^n} = 1$, $n \geq 1$;

(II) (p^{n-1}, p) 型交换群： $G = \langle a, b\rangle$, $a^{p^{n-1}} = b^p = 1$, $[a, b] = 1$, $n \geq 2$;

(III) $p \neq 2$, $n \geq 3$, $G = \langle a, b\rangle$, 有定义关系：

$$a^{p^{n-1}} = 1,\ b^p = 1,\ b^{-1}ab = a^{1+p^{n-2}};$$

(IV) 广义四元数群： $p = 2$, $n \geq 3$, $G = \langle a, b\rangle$, 有定义关系：

$$a^{2^{n-1}} = 1,\ b^2 = a^{2^{n-2}},\ b^{-1}ab = a^{-1};$$

(V) 二面体群： $p = 2$, $n \geq 3$, $G = \langle a, b\rangle$, 有定义关系：

$$a^{2^{n-1}} = 1,\ b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1};$$

(VI) $p = 2$, $n \geq 4$, $G = \langle a, b\rangle$, 有定义关系：

$$a^{2^{n-1}} = 1,\ b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{1+2^{n-2}};$$

(VII) $p = 2$, $n \geq 4$, $G = \langle a, b\rangle$, 有定义关系：

$$a^{2^{n-1}} = 1,\ b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}}.$$

引理 2.3　非循环子群共轭类个数 $r(G) \leq 2$ 的有限群 G 可解.

证明　若 $r(G) < 2$, 显然 G 可解. 故可设 $r(G) = 2$. 由 $r(G) = 2$, 若 G 的极大子群都循环，推出 G 的真子群都循环，得到 $r(G) \leq 1$, 矛盾. 故 G 中至少有一个极大子群非循环且非循环极大子群皆共轭. 若有限群 G 的任二极大子群都在 G 中共轭，则 G 为循环群，矛盾. 故 G 中至少有一个极大子群 M 循环. 若 $M \trianglelefteq G$, 则 G/M 为素数阶群，于是 G/M, M 均可解，故 G 可解. 若 $M \ntrianglelefteq G$, 则 $M_G = \cap M^g < M$, $g \in G$. 如果 $M_G \neq 1$, 则 G/M_G 也满足定理条件，即 $r(G/M_G) \leq 2$, 由极小阶反例法知， G/M_G 可解，而 M_G 循环，推出 G 可解. 故可设 $M_G = 1$. 我们可证 M 为 G 的 Hall 子群. 因为，$\forall p \Big|\, |\ M\ |$, $M_p \in Syl_p(M)$, $\exists P \in Syl_p(G)$, 使得 $M_p \leq P$, 若 $M_p < P$ 则 $N_P(M_p) > M_p$, 而 $N_P(M_p) \leq N_G(M_p) = M$, 得 $N_P(M_p) \in Syl_p(M)$, 矛盾，故只能 $M_p = P$, 即 M 为 G 的 Hall 子群. 这样，由 M 的极大性得 $N_G(M_p) = M = C_G(M_p)$, 由

Burnside 定理 [1, p74, 定理 5.4], 得 G 为 $p-$幂零，即 $G=[H]M_p$, 且 $[H,M_p]=H$, H 为正规 $p-$补，而 H 为循环或内循环，所以 H 可解. 又 $G/H\cong M_p$ 可解，推出 G 可解.

3 主要定理的证明

定理 3.1 若有限 $p-$群 G (p 为素数) 的非循环子群共轭类个数 $r(G)=2$, 则 G 为下述两种情况之一：

i). G 为 (p^2,p) 型交换群， $G=\langle a,b\rangle$ 有定义关系： $a^{p^2}=b^p=1,\ [a,b]=1$;

ii). $p\neq 2,\ G=\langle a,b\rangle$ 有定义关系： $a^{p^2}=b^p=1,\ b^{-1}ab=a^{1+p}$.

证明 设 G 为 $p-$群， $r(G)=2$. 由于 $p-$群的极大子群皆正规，不同的极大子群做成不同的共轭类, 故 G 中非循环极大子群只有一个, 若 G 中只有一个循环极大子群, 则 G 恰有两个极大子群，但由引理 2.1 知，此种情况不可能出现．这样 G 至少有两个循环极大子群．设 M_1,M_2 为 G 的任意两个循环极大子群，其阶均为 p^{n-1}, 则有 $M_1\bigcap M_2=Z(G)$, 得 $|\ Z(G)\ |=p^{n-2}$, $|\ G/Z(G)\ |=p^2$, 且 $G/Z(G)$ 为 (p,p) 型交换群．推出 $c(G)\leq 2$. 而引理 2.2 决定了具有循环极大子群的有限 $p-$群，由以上分析知，满足 $r(G)=2$ 的有限 $p-$群 G 只能在引理 2.2 中取得.

引理 2.2 中的类型 (I) 为循环群，不符合条件．而由 [2, p145, 定理 5.7] 知类型 (IV), (V), (VII) 为 2^n 阶最大类 2-群，即有 $c(G)=n-1$, 故有 $n-1\leq 2$, 只能 $n=3$. 故 (VII) 不符合条件，因为 (VII) 型中要求 $n\geq 4$. 当 $n=3$ 时，类型 (IV) 中 G 为四元数群 Q_8, 但 Q_8 为内循环群， $r(G)=1$, 不符合条件．当 $n=3$ 时，类型 (V) 中的 G 为二面体群 D_8, 但 D_8 的极大子群有三个共轭类，且只有一个循环极大子群，得 $r(G)=3$, 亦不符合条件.

类型 (II), (III) 和 (VI) 中 G 均有 (p^{n-2},p) 型交换极大子群，由 $r(G)=2$, 得到 $n-2=1$, 故 $n=3$. 这样满足 $r(G)=2$ 的 $p-$群 G (p 为素数) 只能是：

(1) (p^2,p) 型交换群： $G=\langle a,b\rangle,\ a^{p^2}=b^p=1,\ [a,b]=1$;

(2) $p\neq 2,\ G=\langle a,b\rangle$, 有定义关系： $a^{p^2}=1,\ b^p=1,\ b^{-1}ab=a^{1+p}$.

反之，上面的 (1), (2) 型 p- 群 G 恰满足 $r(G)=2$. □

定理 3.2 若有限群 G 的非循环子群共轭类个数 $r(G)=2$, 且 G 不是素数幂阶群，则 G 为下述七种情况之一：

i). $G\cong Z_p\times Z_p\times Z_q$, p,q 为互异素数;

ii). $G\cong Q_8\times Z_p$, p 为奇素数;

iii). $G\cong\overline{G}=\langle a,b|\ a^{p^2}=b^{q^m}=1,\ b^{-1}ab=a^r\rangle$, 且 $r\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2),\ r^p\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$, p,q 为互异素数，且 $p>q$, m,r 为正整数;

iv). $G\cong H\times Z_r$, 其中，$H=\langle a,b|\ a^p=b^{q^m}=1,\ b^{-1}ab=a^t\rangle$. $t\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, $t^q\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, p,q,r 为互异素数;

v). $G\cong[Z_p^2]Z_q$, $[Z_p^2,Z_q]=Z_p^2$, p,q 为互异素数，且 $q\ \Big|\ p+1,\ q\nmid p-1$;

vi). $G\cong[Q_8]Z_3$, $[Q_8,Z_3]=Q_8$;

vii). $G\cong\overline{G}=\langle a,b|\ a^p=b^{q^{m+1}}=1,\ b^{-1}ab=a^r\rangle$, 且 $r^q\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, $r^{q^2}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, p,q 为互异素数， m,r 为正整数.

证明 由 $r(G)=2$ 知， G 的非循环极大子群皆共轭， G 至少有一个循环极大子群，且非循环极大子群皆为内循环群.

由引理 2.3 知， G 可解推出 G 必有一个正规的极大子群.

I. G 有一个循环极大子群 M 是正规的.

设 $M=\langle a\rangle, |M|=m$, 则 $G/M\cong Z_p$, p 为素数. 此时 G 是亚循环群, 为 m 阶循环群 $M=\langle a\rangle$ 被 p 阶循环群的扩张. 存在一个 $p-$元 b 使得 $G=M\langle b\rangle$, $b^p\in M$. 设 $|M|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}$, p^i 为不同的素数， $i=1,\dots,s$. 取 M 的 Sylow 分解:

$M=\langle a_1\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$, $o(a_i)=p_i^{n_i}$, 且有 $\langle a_i\rangle\trianglelefteq G$, $i=1,\dots,s$.

情形 1. 对每个 i, $[a_i,b]=1$, $i=1,\dots,s$. 则 G 交换， G 可写成 Sylow 子群的直积. 如果， $(p,p_i)=1$, $i=1,\cdots,s$, 则 G 为循环群，矛盾于 $r(G)=2$. 故不妨设 $p=p_1$, 则 $G=\langle a_1,b\rangle\times\cdots\times\langle a_i\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$, 由 $r(G)=2$ 知， $H:=\langle a_1,b\rangle$ 为 G 的非循环交换极大子群，且为内循环群，由内循环群结构， $H:=\langle a_1,b\rangle\cong Z_p\times Z_p$, 这样， $G\cong Z_p\times Z_p\times Z_{p_2}$. 得到结论 i).

情形 2. 至少有一个 i, $i\in\{1,\dots,s\}$, 使得 $[a_i,b]\neq 1$, 不妨假设 $[a_1,b]\neq 1$, 得 $H:=\langle a_1,b\rangle$ 非交换， $[a_i,b]=1$, $i\geq 2$, 且 $\langle a_i,b\rangle$ 为循环群.

如果 $p=p_1$, 则 H 为 Q_8, 这时， $G\cong Q_8\times Z_q$, q 为奇素数. 得到结论 ii).

如果 $(p,p_i)=1, i=1,\dots,s$, 那么有 $H=\langle a_1,b\rangle$, $\langle a_1\rangle\trianglelefteq G$, $\langle b\rangle\ntrianglelefteq G$, 且 $o(a_1)=p_1^{n_1}$, $o(b)=q^m$, $n_1\geq 1$, $m\geq 1$. H 为非 p- 幂零，有 $q<p_1$, 则 b 作为 $\langle a_1\rangle$ 的一个自同构在 $\langle a_1\rangle$ 中无不动点. 设 $B=\langle a_1^{p_1^{n_1-1}},b\rangle\leq H$, 则 $|B|=p_1q^m$, B 非交换，且 $r(B)=1$. 若 $n\geq 2$, 则 $B<H$, 得 $|H:B|=p_1$, 且 B 为 G 的极大子群，只能 $G=H$, $|G|=p_1^2q^m$, 有定义关系:

$G=\langle a_1,b\mid a_1^{p_1^2}=b^{q^m}=1,\ b^{-1}a_1b=a_1^r,\ r\not\equiv 1(\bmod p_1^2),\ r^q\equiv 1(\bmod p_1^2)\rangle$, p_1,q 为互异素数， m,r 为正整数. 得到结论 iii).

若 $n=1$, 则 $B=H<G$, 推出 $G=H\times Z_{p_2}$, 这里, $H=\langle a_1,b|\ a_1^{p_1}=b^{q^m}=1,\ b^{-1}a_1b=a_1^t\rangle$, $t\not\equiv 1(\bmod p_1)$, $t^q\equiv 1(\bmod p_1)$, p_1,p_2,q 为互异素数， m,t 为正整数. 得到结论 iv).

II. G 有一个非循环极大子群是正规的，且循环极大子群皆不正规.

这推出 G 只有一个非循环极大子群 N , N 正规且 N 为内循环群. 由内循环群的结构只需讨论三种情形:

i). $N\cong Z_p\times Z_p$ 时,

G 非 p- 群，我们有 $N<G$, 且 $G\cong NZ_q$, q 为不等于 p 的素数. $Z_q\cong G/N=G/C_G(N)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(N)=\mathrm{Aut}(Z_p^2)$ 的一个子群，而 $|\mathrm{Aut}(Z_p^2)|=(p^2-1)(p^2-p)$ 得到 $q|(p-1)(p+1)$. 如果 $q|p-1$, 则 N 包含一个正规于 G 的 p 阶子群，记为 N_1. 这样 $N=N_1\times N_2$, N_2 也是 p 阶 G -不变子群. $B_1=N_1Z_q$ 与 $B_2=N_2Z_q$ 为 G 的 2 个真子群. 因为 G 中非循环真子群只有一个，则 B_1, B_1 皆循环，推得 $Z_q\leq C_G(N)$, 有 $G=N\times Z_q$, 从而 G 中有循环极大子群 B_1, 矛盾. 故 $q|p+1$ 且 $q\nmid p-1$. 得到结论 v).

ii). $N\cong Q_8$ 时,

$G\cong Q_8Z_q$, q 为奇素数， $Q_8\trianglelefteq G$. 如果 $G=Q_8\times Z_q$, 则 G 中有 $4q$ 阶正规循环极大子群, 矛盾. 故 $G\cong[Q_8]Z_q$ 且 $[Q_8,Z_q]=Q_8$, 又 Z_q 同构于 $\mathrm{Aut}(Q_8)$ 的子群，而 $\mathrm{Aut}(Q_8)\cong S_4$ 阶为 24, 故 $q=3$ 即 $G\cong[Q_8]Z_3$. 得到结论 vi).

iii). $N\cong X=\langle a,b\rangle, X$ 有定义关系: $a^p=1$, $b^{q^m}=1$, $b^{-1}ab=a^r$, 且 $r\not\equiv 1(\bmod p)$, $r^q\equiv 1(\bmod p)$. 其中， p,q 为互异素数， m,r 为正整数.

因为 N 中有 p 阶正规子群 $A=\langle a\rangle$, $A\ \mathrm{char} N\trianglelefteq G$, 则 $A\trianglelefteq G$, 可得 $C_G(A)\trianglelefteq G$, 对 A 用 N-C 定理，得 $G/C_G(A)$ 同构于 Aut $A\cong Z_{p-1}$ 的一个子群. 由 N 非交换，有 $C_G(A)\neq G$, 若 $|\ G/C_G(A)\ |$ 至少含 2 个不同的素数，那么有素数 $s(\neq q)$, $s|\ |G/C_G(A)|$, 取一个 s- 元

$c \neq 1$, $c \in G$ 但 $c \notin C_G(A)$, 得到 $\langle a, c\rangle$ 不交换，且不与 N 共轭，矛盾于 $r(G) = 2$. 故 $G/C_G(A)$ 是一个循环 q- 群.

由 $r(G) = 2$ 可知 $C_G(A)$ 为循环，否则， $C_G(A)$ 与 N 共轭，矛盾于 $N \not\subseteq C_G(A)$.

因为 $G/C_G(A)$ 是一个循环 q- 群, 阶整除 $p-1$, 由假设, 循环极大子群皆不正规, 而 $C_G(A)$ 循环且正规, 故 $C_G(A)$ 不是极大, 故有 $|\ G/C_G(A)\ | = q^t$, $t \geq 2$. 因为 $[b^q, a] = 1$, 则 $b^q \in C_G(A)$, 而 $o(b^q) = q^{m-1}$, 故 $q^{m-1} \mid |\ C_G(A)\ |$, 推得 $|\ G\ |$ 只能为 pq^{m+1}, 且 $|\ G/C_G(A)\ | = q^2$.

因为 $G/C_G(A)$ 是 q^2 阶循环群, 令 $G/C_G(A) = \langle yC_G(A)\rangle$ 则 $y^{q^2} \in C_G(A)$. 设 $A = \langle a\rangle = \langle x\rangle$ 为 p 阶正规子群. $\langle x\rangle \trianglelefteq G$, 有 $y^{-1}xy = x^w$, w 为正整数. 因为 $[y^{q^2}, x] = 1$, 所以 $w^{q^2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, 又 $y^q \notin C_G(A)$, 所以 $w^q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 故 G 有如下定义关系：

$G = \langle x, y | x^p = 1 = y^{q^{m+1}},\ y^{-1}xy = x^w,\ w^{q^2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p),\ w^q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)\rangle$, p, q 为互异素数， m, w 为正整数. 得到结论 vii). □

主要定理的证明 由定理 3.1 及定理 3.2 立得.

参考文献:

[1] 徐明曜. 有限群导引 (上) [M]. 北京：科学出版社， 2001.
XU Ming-yao. *Introduction of Finite Groups (upper part)* [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)

[2] 徐明曜. 有限群导引 (下) [M]. 北京：科学出版社， 2001.
XU Ming-yao. *Introduction of Finite Groups (next part)* [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)

[3] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京：科学出版社， 1982.
ZHANG Yuan-da. *Construction of Finite Groups* [M]. Beijing: Science Press, 1982.

[4] MILLER G A, MORENO H C. *Non-abelian groups in which every subgroup is abelian* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1903, **4**(4): 398–404.

[5] BASMAJI B G. *On the ismorphisms of two metacyclic groups* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**: 175–182.

[6] 陈重穆. 内外 -$\sum$- 群与极小非 $\sum$- 群 [M]. 重庆：西南师范大学出版社， 1988.
CHEN Chong-mu. *Inside and Outside-$\sum$ Groups and Minimal non-$\sum$-Groups* [M]. Chongqing: Southwest Normal University Press, 1988. (in Chinese)

Finite Groups with the Number of Conjugate Classes of Non-Cyclic Subgroups Less Than or Equal to 2

LI Shi-rong, ZHAO Xu-bo
(Department of Mathatics, Guangxi University, Guangxi 530004, China)

Abstract: This paper discusses the finite groups with the number of conjugate classes of acyclic subgoups less than or equal to 2, and gives the complete classification of the groups.

Key words: finite group; cyclic subgroup; structure of group.