

加速器非心对称束流相空间传输的 σ 矩阵法

陈银宝 谢 羲

(中国原子能科学研究院, 北京)

本文提出非心对称六维椭球束流相空间传输的 σ 矩阵法, 并举实例以示理论之具体应用。

关键词 非心对称束流相空间, σ 矩阵法。

一、非心对称六维椭球束流相空间

加速器束流传输系统的六维相空间矢量为

$$X_6 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

六维束流相空间为一椭球:

$$X_6^T \sigma_6^{-1} X_6 = 1 \quad (1)$$

其中 σ_6 为描写该束流相空间的对称矩阵。

方程(1)为相对六维坐标原点的心对称椭球, 兹将椭球心自原点移到 $[h_1, \dots, h_6]$ 点, 则得非心对称六维束流相空间椭球:

$$(X_6 - H_6)^T \sigma_6^{-1} (X_6 - H_6) = 1 \quad (2)$$

式中

$$H_6 = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_6 \end{bmatrix}$$

非心对称六维椭球与心对称六维椭球的体积均为 $\varepsilon = \pi^3 |\sigma| / 6$ 。

以传输矩阵^[1]

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{16} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{61} & \cdots & r_{66} \end{bmatrix}$$

描写束流通过场区的传输, 即

$$X_6(Z) = R(Z) X_{60} \quad (3)$$

式中 $X_{60} = X_6(Z_0)$

令初始束流相空间为 $(X_{60} - H_{60})^T \sigma_{60}^{-1} (X_{60} - H_{60}) = 1$, $\sigma_{60}^{-1} = \sigma_6^{-1}(Z_0)$, 即椭球心

位于 $H_{60} = \begin{bmatrix} h_{10} \\ \vdots \\ h_{60} \end{bmatrix}$ 点的六维椭球, 进行简单运算后, 即可得

$$(X_6(Z) - H_6(Z))^T \sigma_6^{-1}(Z) (X_6(Z) - H_6(Z)) = 1 \quad (4)$$

即椭球心位于

$$H_6(Z) = R(Z) \begin{bmatrix} h_{10} \\ \vdots \\ h_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum r_{1i} h_{i0} \\ \vdots \\ \sum r_{6i} h_{i0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_6 \end{bmatrix}$$

的非心对称椭球, 其数学描写为对称矩阵:

$$\sigma_6(Z) = R(Z) \sigma_6(Z_0) R(Z)^T$$

设初始束流相空间为椭球心位于原点 $H_{60} = 0$ 的心对称六维椭球, 则经场区传输后的束流相空间亦为椭球心位于原点 $H_6(Z) = R(Z) H_{60} = 0$ 的心对称六维椭球。

根据文献[1],

$$|\sigma_6(Z)| = |\sigma_6(Z_0)| \exp \left[2 \int_{Z_0}^Z Tr A dZ \right] \quad (5)$$

其中 $Tr A$ 为粒子运动微分方程的矩阵迹。

设 (5) 式中的指数积分为 0, 则束流相空间体积守恒。

二、非心对称六维椭球束流相空间对 · 各子空间的投影

椭球心位于 H_6 , 以 σ_6 描写的非心对称六维椭球束流相空间

$$(X_6 - H_6)^T \sigma_6^{-1} (X_6 - H_6) = 1$$

对各子空间的投影, 可根据文献[2]的方法, 作类似的推导而得到: 非心对称六维椭球束流相空间对其 k 维子空间的投影为:

$$(X_k - H_k)^T \sigma_k^{-1} (X_k - H_k) = 1, \quad k=1, 2, 3, 4, 5 \quad (6)$$

三、非心对称六维椭球束流相空间的束流包络

根据 (6) 式, 非心对称六维椭球束流相空间对其一维子空间的投影的两个边界点为:

$$X_1 = h_1 \pm (\sigma_{11})^{1/2}$$

该两个边界点的绝对值最大者, 即代表束流在该一维子空间的包络 $(\epsilon \beta_{x1})^{1/2}$, 如图 1 所示。

$$\begin{aligned} (\epsilon \beta_{x1})^{1/2} &= h_1 + (\sigma_{11})^{1/2}, & (h_1 > 0), \\ (\epsilon \beta_{x1})^{1/2} &= -h_1 + (\sigma_{11})^{1/2}. & (h_1 < 0). \end{aligned}$$

同理, 束流在任意一维子空间 X_i 的包络为

$$\begin{aligned} (\epsilon \beta_{xi})^{1/2} &= h_i + (\sigma_{ii})^{1/2}, & (h_i > 0) \\ (\epsilon \beta_{xi})^{1/2} &= -h_i + (\sigma_{ii})^{1/2} & (h_i < 0) \end{aligned} \quad (7)$$

现在研究非心对称六维椭球束流相空间在场区中的传输。

根据(4)式

$$H_6(Z) = R(Z) \begin{bmatrix} h_{10} \\ \vdots \\ h_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 r_{1i} h_{i0} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^6 r_{6i} h_{i0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_6(Z) = R(Z) \sigma_6(Z_0) (R(Z))^T.$$

因此, 根据传输理论, 可得非心对称六维椭球束流相空间通过场区时, 束流在任意一维子空间 X_k 的包络为 (式中 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(Z_0)$):

$$(\epsilon\beta_{X_k})^{1/2} = \sum_{i=1}^6 r_{ki} h_{i0} + \left(\sum_{i=1}^6 r_{ki} \sum_{j=1}^6 r_{kj} \sigma_{ij} \right)^{1/2}, \quad \left(\sum_{i=1}^6 r_{ki} h_{i0} > 0 \right)$$

$$(\epsilon\beta_{X_k})^{1/2} = - \sum_{i=1}^6 r_{ki} h_{i0} + \left(\sum_{i=1}^6 r_{ki} \sum_{j=1}^6 r_{kj} \sigma_{ij} \right)^{1/2}, \quad \left(\sum_{i=1}^6 r_{ki} h_{i0} < 0 \right)$$
(8)

式中 $k=1, 2, \dots, 6$.

下面讨论无场区的束流传输。令 $X_1=X, X_2=X', X_3=y, X_4=y', X_5=t, X_6=t'$, 其中“'”代表对轴向坐标 Z 的微分。经过漂移距离 Z , 根据 (8) 式, 得束流在一维子空间 X 上的包络为:

$$\begin{cases} (\epsilon\beta_X)^{1/2} = h_{10} + h_{20}Z + (\sigma_{11} + 2\sigma_{12}Z + \sigma_{22}Z^2)^{1/2}, & (h_{10} + h_{20}Z > 0) \\ (\epsilon\beta_X)^{1/2} = -h_{10} - h_{20}Z + (\sigma_{11} + 2\sigma_{12}Z + \sigma_{22}Z^2)^{1/2}. & (h_{10} + h_{20}Z < 0) \end{cases}$$
(9a)
(9b)

令 Z_0 满足 $h_{10} + h_{20}Z_0 = 0$, 则

- 1) 设 $h_{20} > 0$: 当 $Z > Z_0$ 时, $h_{10} + h_{20}Z > 0$, 束流包络 $(\epsilon\beta_X)^{1/2}$ 由 (9a) 式描写; 而当 $Z < Z_0$ 时, $h_{10} + h_{20}Z < 0$, 束流包络 $(\epsilon\beta_X)^{1/2}$ 由 (9b) 式描写。
- 2) 设 $h_{20} < 0$: 当 $Z > Z_0$ 时, $h_{10} + h_{20}Z < 0$, 束流包络 $(\epsilon\beta_X)^{1/2}$ 由 (9b) 式描写; 而当 $Z < Z_0$ 时, $h_{10} + h_{20}Z > 0$, 束流包络 $(\epsilon\beta_X)^{1/2}$ 由 (9a) 式描写。

同理, 束流在一维子空间 X' 的包络为:

$$\begin{cases} (\epsilon\beta_{X'})^{1/2} = h_{20} + (\sigma_{22})^{1/2}, & (h_{20} > 0) \\ (\epsilon\beta_{X'})^{1/2} = -h_{20} + (\sigma_{22})^{1/2}. & (h_{20} < 0) \end{cases}$$
(10)

束流在一维子空间 Y 的包络为:

$$\begin{cases} (\epsilon\beta_Y)^{1/2} = h_{30} + h_{40}Z + (\sigma_{33} + 2\sigma_{34}Z + \sigma_{44}Z^2)^{1/2}, & (h_{30} + h_{40}Z > 0) \\ (\epsilon\beta_Y)^{1/2} = -h_{30} - h_{40}Z + (\sigma_{33} + 2\sigma_{34}Z + \sigma_{44}Z^2)^{1/2}. & (h_{30} + h_{40}Z < 0) \end{cases}$$
(11)

束流在一维子空间 Y' 的包络为:

$$\begin{cases} (\epsilon\beta_{Y'})^{1/2} = h_{40} + (\sigma_{44})^{1/2}, & (h_{40} > 0) \\ (\epsilon\beta_{Y'})^{1/2} = -h_{40} + (\sigma_{44})^{1/2}. & (h_{40} < 0) \end{cases}$$
(12)

束流在一维子空间 t 的包络为:

$$\begin{cases} (\epsilon\beta_t)^{1/2} = h_{50} + h_{60}Z + (\sigma_{55} + 2\sigma_{56}Z + \sigma_{66}Z^2)^{1/2} & (h_{50} + h_{60} > 0) \\ (\epsilon\beta_t)^{1/2} = -h_{50} - h_{60}Z + (\sigma_{55} + 2\sigma_{56}Z + \sigma_{66}Z^2)^{1/2} & (h_{50} + h_{60} < 0) \end{cases}$$
(13)

束流在一维子空间 t' 的包络为:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\beta_{t'})^{1/2} &= h_{60} + (\sigma_{66})^{1/2}, & (h_{60} > 0) \\ (\varepsilon\beta_{t'})^{1/2} &= -h_{60} + (\sigma_{66})^{1/2}. & (h_{60} < 0) \end{aligned} \quad (14)$$

下面来求束流在一维子空间 X 的包络的腰, 即求 $(\varepsilon\beta_x)^{1/2}$ 的极小点, 微分 (9a) 和 (9b) 两式, 并由此解出腰距为:

$$Z_x = -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \right)^2 + \frac{\sigma_{11}h_{20}^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_{22}(\sigma_{22} - h_{20}^2)} \right]^{1/2} \quad (15)$$

如果 Z_x 为非实数, 则(15)式就不能代表腰距, 这时(9a)和(9b)式的分界点 $Z_0 = -h_{10}/h_{20}$ 就表示腰距, 腰宽为:

$$(\varepsilon\beta_x)^{1/2} = \left[\sigma_{11} - 2\sigma_{12} \frac{h_{10}}{h_{20}} + \sigma_{22} \left(\frac{h_{10}}{h_{20}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

兹以文献[3]中所讨论的非心对称椭圆

$$\frac{(X-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(Y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

的束流相空间为实例, 求其束流包络。

图 2(a) 为 $Z=0$ 时, 初始束流相空间

$$(X_{20} - H_{20})^T \sigma_{20}^{-1} (X_{20} - H_{20}) = 1$$

其中初始椭圆心坐标为 $H_{20} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, 初始椭圆的数学描写为:

$$\sigma_{20} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

根根(4)式, 通过漂移距离 Z 后的束流相空间变换成:

$$(X_2(Z) - H_2(Z))^T \sigma_2^{-1}(Z) (X_2(Z) - H_2(Z)) = 1$$

其中, 根根(8)式, 椭圆心变换成 $H_2(Z) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta Z \\ \beta \end{bmatrix}$, 椭圆结构变换成:

$$\sigma_2(Z) = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 Z^2 & b^2 Z \\ b^2 Z & b^2 \end{bmatrix}$$

根根(9a)和(9b)式, 该非心对称椭圆束流相空间的束流包络为:

$$\begin{cases} (\varepsilon\beta_x)^{1/2} = \alpha + \beta Z + (a^2 + b^2 Z^2)^{1/2}, & (Z > Z_0 = -\frac{\alpha}{\beta}) \\ (\varepsilon\beta_x)^{1/2} = -\alpha - \beta Z + (a^2 + b^2 Z^2)^{1/2} & (Z < Z_0 = -\frac{\alpha}{\beta}) \end{cases} \quad (17)$$

如图 2(b)所示, 当 $\beta > b$ 时, $Z_0 = -\frac{\alpha}{\beta}$ 处出现一个腰, 其半宽度为 $\frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}$ 。

必须指出, 我们这里用 σ 矩阵法, 求非心对称椭圆束流相空间的束流包络, 所得到的结果, 与文献[3]中用普遍的非心对称光滑凸闭曲线束流相空间的传输理论所得到的结果完全一致。

根据(15)式, 该束流包络的腰距为:

$$Z_{\min} = \pm \frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (18)$$

如图 2 (a) 所示, 本例中 $\beta > b$, 即 Z_{\min} 为虚数, 因此 $Z_0 = -\frac{h_{10}}{h_{20}} = -\frac{\alpha}{\beta}$ 为腰距, 根据 (16) 式, 腰宽为:

$$(\varepsilon\beta_x)^{1/2} = \frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}.$$

为了说明, 当 $\beta > b$, 即 Z_{\min} 为虚数时, $Z_0 = -\alpha/\beta$ 为腰距, 利用文献[3]所提出的包络切线方法较为清晰简明。如图 (2 a) 所示, 构成等值的心对称束流相空间的共切线 $\overline{EF'}$ 在 X 轴与 X' 轴上的截距分别为: $(\frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}, 0)$ 和 $(0, -\frac{1}{\alpha} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2})$ 。所以当

$$Z = \frac{\frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}}{-\frac{1}{\alpha} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

时, 该包络切线 $\overline{EF'}$ 绕不动点 $(\frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}, 0)$ 旋转成与 X 轴垂直, 而得最小包络, 即腰 $\frac{1}{\beta} [(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}$ 。如图 2 (a) 所示, 显然, 如 $Z > -\frac{\alpha}{\beta}$, 则包络切线 $\overline{EF'}$ 由垂直于 X 轴而顺时针旋转, 所以束流包络增大; 如 $Z < -\frac{\alpha}{\beta}$, 则包络切线 $\overline{FE'}$ 由垂直于 X 轴而逆时针旋转, 所以包络亦增大, 故 $Z = -\frac{\alpha}{\beta}$ 时, 束流包络呈现一个腰。

当 $b > \beta > 0$ 时, 根据(18)式得束流包络的腰距为:

$$Z_{\min} = -\frac{\alpha\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}},$$

其中只取负号, 因为当 $Z > 0$ 时, 根据(17)式, 束流包络为 Z 的单调上升函数, 不可能出现腰。

如图 3 所示, 当 $b > \beta > 0$ 时, 椭圆

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

与 X 轴交于两点: $A(\alpha + \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2}, 0)$, $B(\alpha - \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2}, 0)$ 。

根据文献[3], 非心对称椭圆束流相空间的束流包络, 只决定于位于其等值的心对称束流相空间边界上的曲线部分 \overline{EAF} , 而与位于其等值的心对称束流相空间的曲线部分 \overline{FBE} 无关。

作通过 A 点的包络切线, 与 X' 轴交于点 $A'(0, -\frac{(b^2 - \beta^2)^{1/2}}{\alpha\beta} (\alpha + \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2}))$ 。

当 Z 自 0 往后退到达 $Z = -\frac{\alpha\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}} = Z_{\min}$ 时, 包络切线 $\overline{AA'}$ 绕不动点 A 逆时针旋转而与 X 轴垂直。因此, 当 $Z = Z_{\min}$ 时, 切点 A 代表束流包络, 如图 3 所示, 显然当 Z 自 Z_{\min} 往前走或往后退时, 束流包络均增加。所以当 $Z = Z_{\min}$ 时, 束流包络呈现一个腰, 其

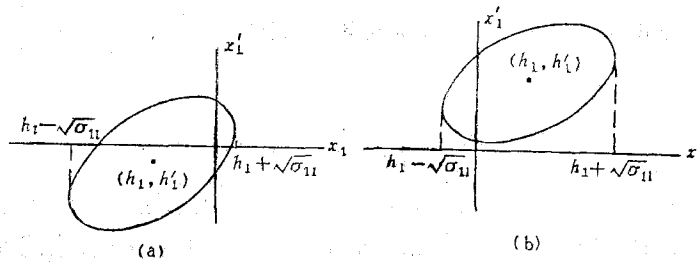


图 1 非心对称椭圆相空间的包络

(a) $h_1 < 0$, $|h_1 - \sqrt{\sigma_{11}}| = -h_1 + \sqrt{\sigma_{11}}$ 为包络值;
 (b) $h_1 > 0$, $h_1 + \sqrt{\sigma_{11}}$ 为包络值.

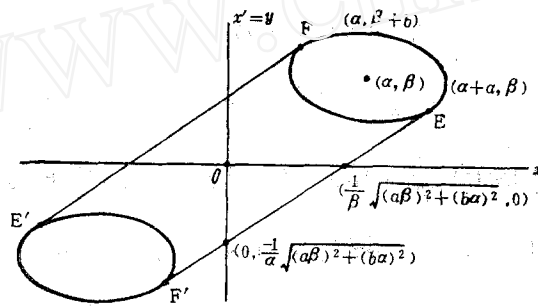


图 2(a) 非心对称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间

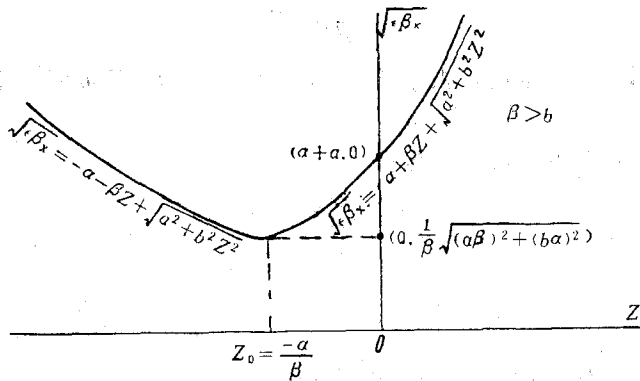


图 2(b) 图 2(a)所示非心对称椭圆束流相空间的束流包络

腰宽为 A 点的 X 坐标, 即 $\alpha + \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2}$.

当 Z 自 Z_{\min} 继续往后退到达 $Z = -a/b$ 时, 包络切线 $\overline{EF'}$ 与 $\overline{FE'}$ 与 X 轴垂直, 因此当 $Z = -a/b$ 时, E 点与 F 点均代表束流包络。但 F 点的 $X'_F > 0$, E 点的 $X'_E < 0$ 。所以当 Z 增长时, 包络切线 $\overline{EF'}$ 与 $\overline{FE'}$ 顺时针旋转而束流包络减小; 当 Z 减小时, 该两包络

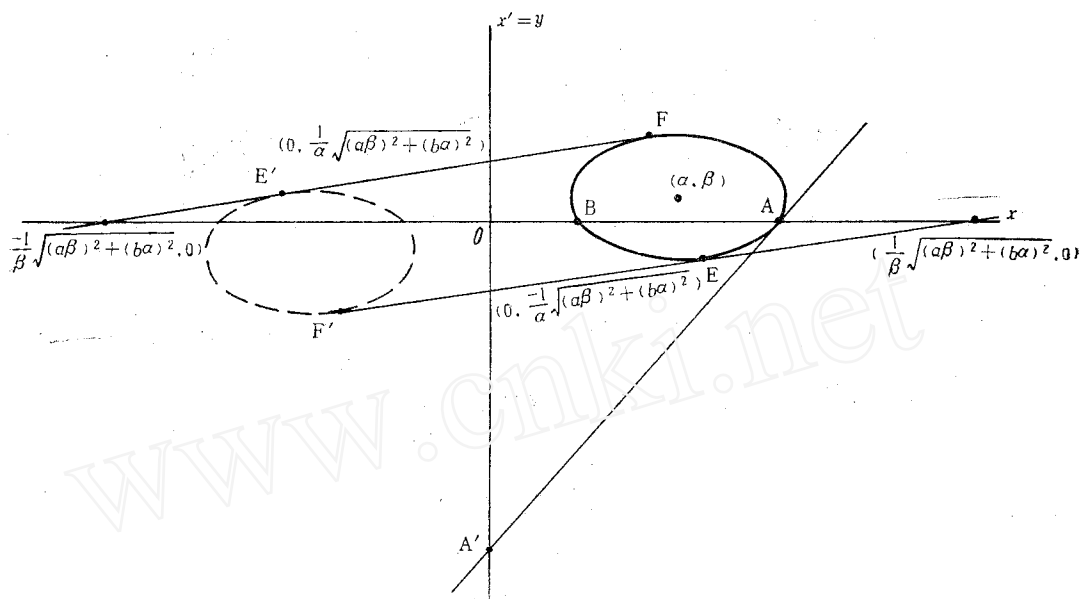


图 3 非心对称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间 ($b > \beta > 0$)

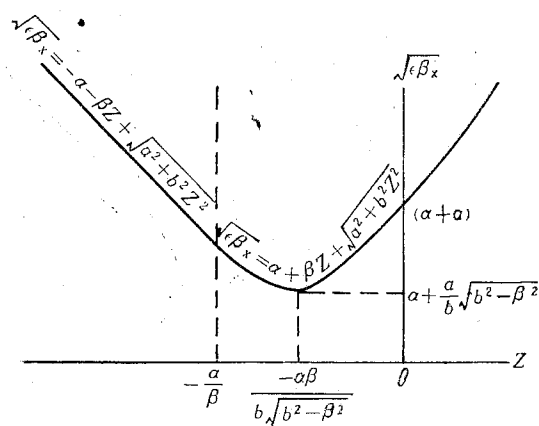


图 4 图 3 所示束流相空间的束流包络

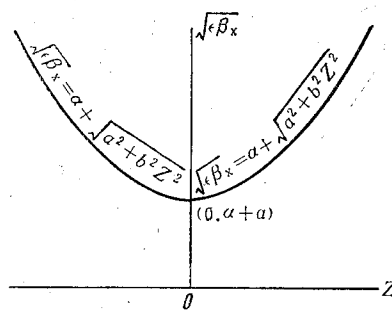


图 5 $\beta=0$ 时非心对称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间的束流包络

切线则逆时针旋转而束流包络增大。因此 $Z = -a/\beta$ 时，束流包络不呈现腰，这与图 2 (a) 与图 2 (b) 的 $\beta > b$ 情况不同。

$b > \beta > 0$ 条件下的非心对称椭圆束流相空间的束流包络，如图 4 所示，仍由(17)式所描写，但腰距为 $-\frac{a\beta}{b(b^2-\beta^2)^{1/2}}$ ，腰宽为 $\alpha + \frac{a}{b}(b^2-\beta^2)^{1/2}$ 。

当 $\beta \rightarrow 0$ 时， $-a/\beta \rightarrow -\infty$ ，图 4 中束流包络的左部 $(\epsilon_x)^{1/2} = -a - \beta Z + (a^2 +$

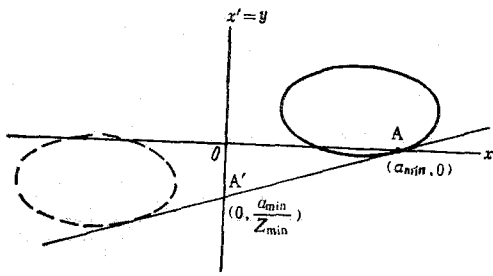


图 6 $Z_{\min} = -\frac{\alpha}{\beta}$ 时非心对称椭圆

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \text{ 束流相空间}$$

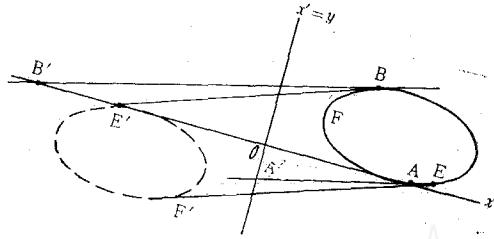


图 7 $Z_{\min} = \frac{-\alpha\beta}{b\sqrt{b^2-\beta^2}} < -\frac{\alpha}{\beta}$ 时非心对

称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间

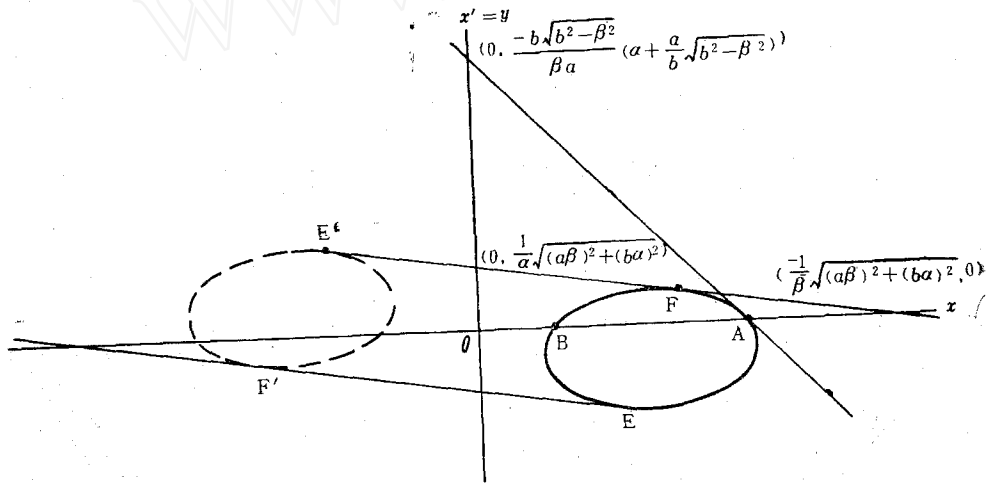


图 8 $\beta < 0$ 时非心对称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间

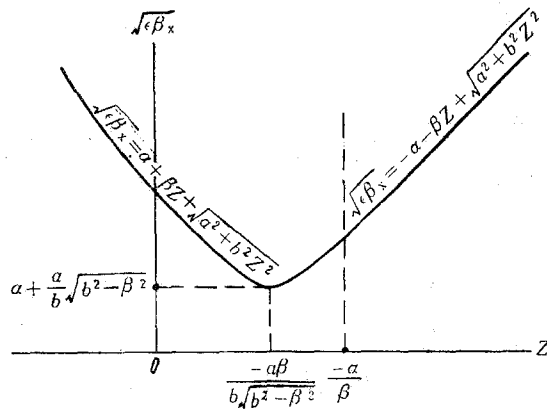


图 9 $\beta < 0$ 时非心对称椭圆 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 束流相空间的束流包络

$b^2 Z^2)^{1/2}$ 消失于 $-\infty$ 。腰距 $Z_{\min} = -\frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}} = 0$, 腰宽为 $\alpha + \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2} = \alpha + a$, 整个束流包络由方程 $(\varepsilon\beta)^{1/2} = \alpha + (a^2 + b^2 Z^2)^{1/2}$ 所描写, 如图 5 所示。

现在看图 3 和图 4 为 $Z_{\min} = -\frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}} > -\alpha/\beta$ 的特殊情况。当 $Z_{\min} = -\alpha/\beta$ 的特殊情况下, 图 3 中 A 点与 E 点相重合, 图 4 中 Z_{\min} 与 $-\alpha/\beta$ 相重合。这种特殊情况下的非心对称椭圆束流相空间如图 6 所示。

当 Z 自 0 往后退至 $Z_{\min} = -\alpha/\beta$, 包络切线 $\overline{AA'}$ 逆时针旋转而与 X 轴垂直。这时 A 点代表束流包络。因为 A 点在 X 轴上, Z 自 Z_{\min} 增大或减小, 则包络切线 $\overline{AA'}$ 顺时针或逆时针旋转而束流包络均增大, 所以, 其腰宽为 $a_{\min} = \frac{1}{\beta}[(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}$ 。

当 $Z_{\min} = -\frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}} < -\alpha/\beta$ 的特殊情况下, 非心对称椭圆束流相空间如图 7 所示。

在这种特殊情况下, 椭圆与 X 轴的交点 A 在其等值的心对称相空间内, 所以通过 A 点的切线 $\overline{AA'}$ 并非包络切点。作与 $\overline{AA'}$ 平行的包络切线 $\overline{BB'}$, 当 $Z = Z_{\min}$ 时, 切线 $\overline{AA'}$ 及包络切线 $\overline{BB'}$ 均与 X 轴垂直, 显然, B' 点的 X 坐标绝对值 $|X_{B'}|$ 大于 A 点的 X 坐标值 X_A , 所以当 $Z = Z_{\min}$ 时, A 点不代表束流包络, 而 B 点代表束流包络, 其值为 $(\varepsilon\beta)^{1/2} = |X_{B'}| = -\alpha - \beta Z_{\min} + (a^2 + b^2 Z_{\min}^2)^{1/2}$, 束流包络的腰距仍为 $Z = -\alpha/\beta$, 腰宽仍为 $\frac{1}{\beta}[(a\beta)^2 + (b\alpha)^2]^{1/2}$ 如图 2 (b) 所示。

当 $\beta < 0$ 时, 非心对称椭圆束流相空间如图 8 所示。

根据(9 a)和(9 b)两式, 该非心对称椭圆束流相空间的束流包络为:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\beta_x)^{1/2} &= -\alpha - \beta Z + (a^2 + b^2 Z^2)^{1/2}, \quad (Z > Z_0 = -\alpha/\beta) \\ (\varepsilon\beta_x)^{1/2} &= \alpha + \beta Z + (a^2 + b^2 Z^2)^{1/2}, \quad (Z < Z_0 = -\alpha/\beta) \end{aligned} \quad (19)$$

根据(18)式, 得束流包络的腰距为:

$$Z_{\min} = -\frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}}$$

其中只取负号, 因为当 $Z < 0$ 时, 根据(19)式, 束流包络为 Z 的单调下降函数, 不可能出现腰。

$\beta < 0$ 条件下的非心对称椭圆束流相空间的束流包络如图 9 所示。束流包络的腰距为:

$$Z_{\min} = -\frac{a\beta}{b(b^2 - \beta^2)^{1/2}}, \quad \text{腰宽为 } \alpha + \frac{a}{b}(b^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

参 考 文 献

- [1] 陈银宝等, 原子核物理, 2(4), 369 (1980).
- [2] 陈银宝等, 原子核物理, 3(1), 73 (1981).
- [3] 陈银宝等, 原子核物理, 5(3), 279 (1983).
- [4] 陈银宝等, 原子核物理, 5(4), 328 (1983).

(编辑部收到日期: 1983 年 5 月 31 日)