

积分方程法计算超导迴旋加速器磁场

王敬国 李文华

(华北电力学院, 北京) (中国原子能科学研究院, 北京)

本文从电磁场基本理论导出磁化积分方程法计算静磁场的公式, 在此基础上, 以美国密执安州立大学(MSU)的 K 500 超导迴旋加速器磁场^[1]为实例进行了计算, 并与测量值比较, 结果是比较满意的。

关键词 积分方程法, 磁场, 超导迴旋加速器。

一、前言

超导迴旋加速器是七十年代发展起来的新型迴旋加速器。它的特点主要是超导线圈产生很高的磁场(3T以上), 因而具有一系列常温迴旋加速器所不具备的优点:

1. 尺寸小, 重量轻, 节省材料和工时, 造价较低;
2. 耗电少, 运行费用较低;
3. 可加速粒子达到较高的能量, 特别适于加速重离子;
4. 磁场完全饱和, 因而可以精确计算, 设计时不必作模拟实验。

国外超导迴旋加速器磁场的计算大多是采用均匀磁化法^[2,3], 这种方法在超导磁铁完全饱和的情况下, 也可得到较好的结果, 但是不能直接用于三维场计算。对于复杂的三维几何结构, 还须用相当麻烦的简化假定, 从而用二维的方法来进行计算, 因而就有局限性, 精度也稍差一些。积分方程法则可直接计算三维场, 而且精度也较高。但是, 如果离散单元取得过多, 计算将需要较长的时间。

本文用积分方程法计算了 MSU 的 K500 超导迴旋加速器磁场实例, 并与测量值作了比较。

二、积分方程法的基本理论

积分方程法解场问题时, 认为空间任一点场是由电流产生的场和介质磁化产生的场的迭加^[4-6]。

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_s(\vec{r}) + \vec{H}_M(\vec{r}) \quad (1)$$

其中 \vec{H}_s 为电流产生的场, 可由毕沙定律求得。

\vec{H}_M 为介质磁化产生的场, 根据静磁理论, 可以推得用磁化强度 \vec{M} 表示的磁化场的积分形式为:

$$\vec{H}_M = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{V'} \vec{M} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (2)$$

式中带“'”的量表示源点量, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ 。

若 \vec{M} 已知, \vec{H}_M 就可由式(2)求得。具体求解时, 需将磁介质离散为许多小单元, 单元上 \vec{M} 近似认为是均匀分布的, 这样在每个小单元上的积分就化作了与 \vec{M} 无关的量。任一单元内的磁化场为自身磁化产生的场与其它小单元产生的场的迭加:

$$\vec{H}_{Mi} = \sum_{j=1}^n C_{ij} \vec{M}_j, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

式中

$$\vec{H}_{Mi} = [H_{M_{ix}} \quad H_{M_{iy}} \quad H_{M_{iz}}]^T,$$

$$\vec{M}_j = [M_{jx} \quad M_{jy} \quad M_{jz}]^T,$$

T 表示转置, C_{ij} 称为耦合系数, 是一个 3×3 阶的矩阵:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{ixix} & C_{ixiy} & C_{ixiz} \\ C_{iyix} & C_{iyiy} & C_{iyiz} \\ C_{izix} & C_{iziy} & C_{iziz} \end{bmatrix}.$$

将式(2)的矢量运算展开, 写成分量形式, 与式(3)比较, 可得耦合系数 C 的各分量的积分形式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{xx} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(x'-x)^2 - R^2}{R^5} dV', \\ C_{xy} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(x'-x)(y'-y)}{R^5} dV', \\ C_{xz} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(x'-x)(z'-z)}{R^5} dV', \\ C_{yx} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(x'-x)(y'-y)}{R^5} dV', \\ C_{yy} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(y'-y)^2 - R^2}{R^5} dV', \\ C_{yz} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(y'-y)(z'-z)}{R^5} dV', \\ C_{zx} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(x'-x)(z'-z)}{R^5} dV', \\ C_{zy} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(y'-y)(z'-z)}{R^5} dV', \\ C_{zz} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(z'-z)^2 - R^2}{R^5} dV', \end{array} \right. \quad (4)$$

可以证明, 系数间关系为: $C_{yx} = C_{xy}$, $C_{zx} = C_{xz}$, $C_{zy} = C_{yz}$,

$$C_{zz} = \begin{cases} -1 - C_{xx} - C_{yy}, & \text{场点在体积元内。} \\ -C_{xx} - C_{yy}, & \text{场点在体积元外。} \end{cases} \quad (5)$$

这样, 九个系数中只有五个是独立的。

积分方程法解场的关键是选取适当的离散单元, 计算出磁化场在每个小单元上的积分, 即计算出耦合系数, 从而可计算出磁场。

三、超导迴旋加速器磁场计算

超导迴旋加速器的磁铁结构是很复杂的,图1是K500超导迴旋加速器磁铁系统的结构示意图。图2是磁极上扇形叶片的平面示意图。叶片中心线满足螺旋线方程:

$$\theta = -\gamma R + \theta_0.$$

其中 θ 为方位角, γ 为螺旋常数,而 θ_0 为起始方位角。

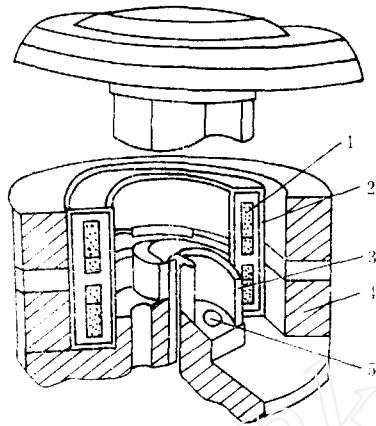


图1 超导迴旋加速器示意图

1—超导线圈; 2—低温恒温器; 3—磁场扇形叶片; 4—磁屏蔽层; 5—孔。

我们用积分方程法计算了这一磁场,选取的离散单元为截面是任意 n 边形的正棱柱,如图3所示。在此情况下,可求得式(5)所表示的耦合系数在单元上的积分结果如下:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 (-1)^i [-\sin\phi_j \cos\phi_j (L_{i,j} - L_{i,j+1}) + \sin^2\phi_j (T_{i,j,j} - T_{i,j+1,j})], \\ C_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 (-1)^i [\cos^2\phi_j (T_{i,j,j} - T_{i,j+1,j}) + \sin\phi_j \cos\phi_j (L_{i,j} - L_{i,j+1})], \\ C_{xy} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 (-1)^i [\cos^2\phi_j (L_{i,j} - L_{i,j+1}) - \sin\phi_j \cos\phi_j (T_{i,j,j} - T_{i,j+1,j})], \\ C_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 (-1)^i \sin\phi_j (V_{i,j+1,j} - V_{i,j,j}), \\ C_{yz} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 (-1)^i \cos\phi_j (V_{i,j,j} - V_{i,j+1,j}), \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi_j &= \text{tg}^{-1} \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}, \\ T_{i,j,m} &= \text{tg}^{-1} \frac{-(x_j - x_0) \sin\phi_m + (y_j - y_0) \cos\phi_m}{(x_j - x_0) \cos\phi_m + (y_j - y_0) \sin\phi_m} \cdot \frac{R_{ij}}{z_i - z_0}, \\ L_{i,j} &= \ln(R_{ij} + z_i - z_0), \\ V_{i,j,m} &= \ln[(x_j - x_0) \cos\phi_m + (y_j - y_0) \sin\phi_m + R_{ij}]. \end{aligned}$$

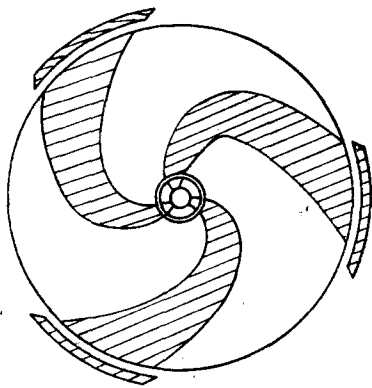


图 2 磁场扇形叶片

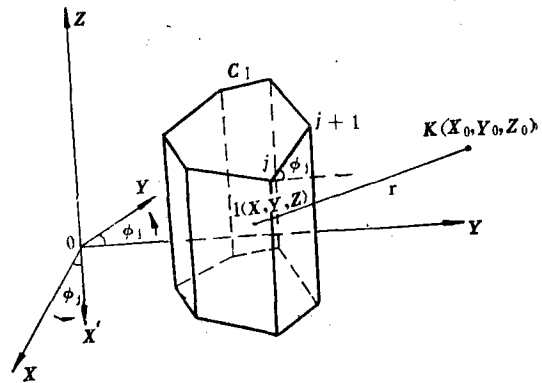


图 3 离散单元示意图

(x_0, y_0, z_0) 为场点坐标。

由于超导线圈使磁铁处于深饱和状态，磁铁各处的磁化强度均为常数 M_0 ，因此，式(1)的磁化场 \bar{H}_M 和电流场 \bar{H}_c 简单线性迭加：

$$\bar{H} = \bar{H}_c + \sum C \bar{M}_0, \quad (7)$$

其中耦合系数 C 可由式(6)计算出来。

电流场 \bar{H}_c 由截面呈矩形的环状线圈产生，求得在这种结构下的毕沙定律的积分结果为：

$$H_{sr} = \frac{2J}{r_0} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{z^2 + r_0^2 + r^2}{\sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2}} \mathbf{E} \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4rr_0}{z^2 + (r_0 + r)^2}} \right) - \sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2} \right. \\ \left. \mathbf{E} \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4rr_0}{z^2 + (r_0 + r)^2}} \right) \right]_{z_1}^{z_2} dr \\ H_{sz} = 2J \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2}} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \mathbf{\Pi} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{-4rr_0}{(r_0 + r)^2} \sqrt{\frac{4rr_0}{z^2 + (r_0 + r)^2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{F} \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4rr_0}{z^2 + (r_0 + r)^2}} \right) \right\} \right]_{z_1}^{z_2} dr \quad (8)$$

式中， r_0 为场点， r_1 、 r_2 、 z_1 、 z_2 分别为线圈截面的顶点坐标， \mathbf{F} 、 \mathbf{E} 、 $\mathbf{\Pi}$ 为椭圆积分。

因积分方程法的网格之间无公共节点的约束，网格自动剖分是比较容易实现的，可以采用分区剖分法。利用对称条件可以减少数据准备量和离散单元数目。本例离散后总单元数为 531。

我们在 VAX-11/780 计算机上进行计算，每周期内计算 60 个场点，约需时间 20 分钟。

计算结果表示在图 4-7 中。图 4 是半径为 0、5、8、15、20inch 时铁的磁化场在一个周期内的平均值。图 5、6、7 为磁化场在这些半径的三次、六次、九次谐波的幅值。

可以看出，除在 $R=15$ inch 处误差较大外，各次谐波的计算值与实验值基本上是一致的。图 4 的平均值在各个半径下的误差均为 400 Gs 左右，相对误差约 2.2%，曲线趋势与实验值是一致的。经过分析，上述误差均由于计算尺寸与实际尺寸的偏差造成的。

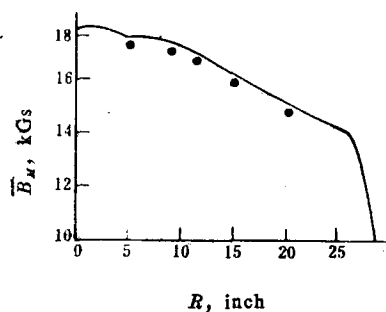


图 4 铁的磁化场平均值
实线为实验值；实圆点为计算值。

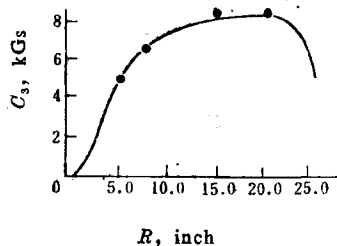


图 5 磁化场三次谐波幅值
实线为实验值；实圆点为计算值。

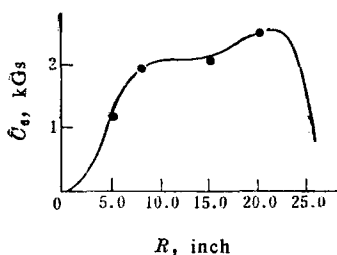


图 6 磁化场六次谐波幅值
实线为实验值；实圆点为计算值。

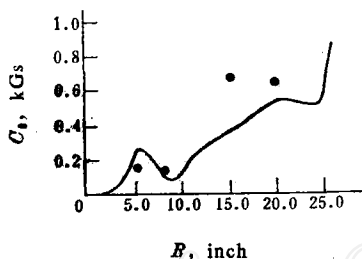


图 7 磁化场九次谐波幅值
实线为实验值；实圆点为计算值。

四、结 语

积分方程法是磁场数值计算的主要方法之一。它的突出优点是适应复杂的磁铁结构，前处理过程简单。本文对超导回旋加速器磁场的计算说明了这一点。这个题目用微分方程法计算几乎是不可能的。此外，积分方程法还具有可求连续函数，适于解开域问题等优点，尤其是对于三维场计算，更显示出它的优越性。

本工作是用积分方程法计算超导回旋加速器磁场的的一个尝试，结果是较为满意的，编制的程序可用于新的超导回旋加速器的设计和方案比较选择。

感谢樊明武同志对本工作的指导和帮助。

参 考 文 献

- [1] Bellomo, G. et al., *Nucl. Instrum. Methods*, 190,255(1981).
- [2] Gordon, M. M. and Johnson, D. A., *Particle Accelerator*, 10,217(1980).
- [3] Mcneilly, G. S., *Computer Physics Communications*,23,199(1981).
- [4] Newman, M. J. et al., *Rutherford Laboratory, Rpp/A 94*(1974).
- [5] Turner, L. R., *Rutherford Laboratory, RL-73-102*(1973).
- [6] Sisattan, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1941.