第26卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0121-08 **文献标识码**: **A**

一阶线性时超微分不等式

高剑明， 高国柱
(东华大学应用数学系，上海 200051)
(E-mail: jmgao@dhu.edu.cn)

摘 要: 研究了一阶线性时超微分不等式 $x'(t)-p(t)x(t+\tau)\geq 0$ 正解的不存在性，其中 $p(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty)),\tau\in R^+$.

关键词: 时超；微分不等式；最终正解.
MSC(2000): 34A40
中图分类: O175

1 引 言

关于时滞微分不等式，许多人都曾研究过，参见专著 [1,2] 及文 [3–7]. 特别是文 [7] 给出了一阶线性时滞微分不等式无最终正解的很好的充分条件，改进了一系列时滞微分方程振动性结果. 然而，对时超微分不等式的研究，还不多见.

考虑一阶时超微分不等式

$$x'(t)-p(t)x(t+\tau)\geq 0,\quad t\geq t_0, \tag{1}$$

其中 $p(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty)),\tau>0$. 专著 [1,2] 给出如下的结果：

若

$$\alpha:=\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau}p(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{e},$$

则不等式 (1) 无最终正解.

本文尝试将文 [7] 的想法用到时超不等式 (1), 给出时超不等式 (1) 无最终正解的一些充分条件，这些充分条件将有助于时超微分方程振动性的研究.

2 重要引理

首先，参照文 [8], 定义序列 $\{f_n(\alpha)\},0<\alpha<1$ 如下：

$$f_0(\alpha)=1,\quad f_{n+1}(\alpha)=e^{\alpha f_n(\alpha)},\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$

显然，当 $\alpha>0$ 时， $f_{n+1}(\alpha)>f_n(\alpha),n=1,2,\cdots$. 当 $0<\alpha\leq\frac{1}{e}$ 时，存在函数 $f(\alpha)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\alpha)=f(\alpha),\quad 1\leq f(\alpha)\leq e,$$

收稿日期: 2003-06-24; **接受日期**: 2005-08-13

且

$$f(\alpha) = e^{\alpha f(\alpha)}. \tag{3}$$

而当 $\alpha > \frac{1}{e}$ 时， $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha) = +\infty$.

容易验证 $f(\alpha)$ 在 $[0, \frac{1}{e}]$ 上单调递增，且 $f(0) = 1, f(\frac{1}{e}) = e$.

当 $0 < \alpha < 1$ 时，再定义序列 $\{g_m(\alpha)\}$ 如下 [8]:

$$g_1(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2}, \quad g_{m+1}(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2 + \frac{2}{g_m^2(\alpha)}}, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

易见当 $0 < \alpha < 1$ 时， $g_{m+1}(\alpha) < g_m(\alpha), m = 1, 2, \cdots$.

当 $0 < \alpha \le \frac{1}{e}$ 时，存在函数 $g(\alpha)$ 使得

$$\lim_{m\to\infty} g_m(\alpha) = g(\alpha),$$

且

$$g(\alpha) = \frac{2}{1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}}, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{e}. \tag{5}$$

为证明主要结果，给出如下引理.

引理 1 假设 $0 \le \alpha \le \frac{1}{e}$， $x(t)$ 是不等式 (1) 的最终正解，则

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t+\tau)}{x(t)} \ge f(\alpha), \tag{6}$$

其中 $f(\alpha)$ 是超越方程 (3) 的小根.

证明 设 $x(t)$ 是不等式 (1) 的最终正解. 由 (1), $x(t)$ 最终单调非减. 则 t 充分大时,

$$\frac{x(t+\tau)}{x(t)} \ge 1 = f_0(\alpha).$$

由 (1),

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \ge p(t)\frac{x(t+\tau)}{x(t)}.$$

对上式两边从 t 到 $t+\tau$ 积分，得

$$\ln\frac{x(t+\tau)}{x(t)} \ge \int_t^{t+\tau} p(s)\frac{x(s+\tau)}{x(s)}\mathrm{d}s,$$

两边取下极限，有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t+\tau)}{x(t)} \ge e^{\alpha f_0(\alpha)} = f_1(\alpha).$$

重复以上步骤，且注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha) = f(\alpha)$, 有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t+\tau)}{x(t)} \ge f(\alpha).$$

引理 2　假设 $0 \le \alpha \le \frac{1}{e}$, $x(t)$ 是不等式 (1) 的最终正解，且 t 充分大时，

$$p(t+\tau) \ge p(t). \tag{7}$$

则

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{x(t+\tau)} \ge A(\alpha) := \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}. \tag{8}$$

证明　$\alpha = 0$, 显然成立.

设 $0 < \alpha \le \frac{1}{e}$,　$x(t)$ 是不等式 (1) 的最终正解. 由 α 的定义，对任何 $\varepsilon \in (0,\alpha)$ 和充分大的 t, 有

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)\mathrm{d}s > \alpha - \varepsilon.$$

注意到 $F(\lambda) = \int_{t-\tau}^{\lambda} p(s)\mathrm{d}s$ 为连续函数，$F(t-\tau) = 0$ 且 $F(t) > \alpha - \varepsilon$. 这样，存在 $\lambda_t \in (t-\tau, t)$, 使得 $\int_{t-\tau}^{\lambda_t} p(s)\mathrm{d}s = \alpha - \varepsilon$.

从 $t-\tau$ 到 λ_t 积分 (1) 式，得

$$x(\lambda_t) - x(t-\tau) \ge \int_{t-\tau}^{\lambda_t} p(s)x(s+\tau)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

因为 $t-\tau \le s \le \lambda_t < t$, 易见 $t \le s+\tau < t+\tau$. 再从 t 到 $s+\tau$ 积分 (1) 式，有

$$x(s+\tau) - x(t) \ge \int_{t}^{s+\tau} p(u)x(u+\tau)\mathrm{d}u.$$

由 (1),$x(t)$ 是单调非减的. 根据 (7), 得

$$\int_{t}^{s+\tau} p(u)\mathrm{d}u \ge \int_{t-\tau}^{s} p(u)\mathrm{d}u.$$

因而

$$x(s+\tau) \ge x(t) + x(t+\tau)\int_{t-\tau}^{s} p(u)\mathrm{d}u. \tag{10}$$

由 (9) 和 (10), 有

$$\begin{aligned} x(\lambda_t) &\ge x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{\lambda_t} p(s)x(s+\tau)\mathrm{d}s \\ &\ge x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{\lambda_t} p(s)[x(t) + x(t+\tau)\int_{t-\tau}^{s} p(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}s \\ &= x(t-\tau) + x(t)(\alpha-\varepsilon) + \frac{1}{2}x(t+\tau)(\alpha-\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

注意到 $x(\lambda_t) \le x(t)$, 得

$$x(t) \ge x(t-\tau) + (\alpha-\varepsilon)x(t) + \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2 x(t+\tau). \tag{11}$$

因 $x(t-\tau) > 0$, 由上式，得

$$\frac{x(t)}{x(t+\tau)} \ge \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2(1-\alpha+\varepsilon)}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得

$$\frac{x(t)}{x(t+\tau)} \geq \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)} = \frac{1}{g_1(\alpha)}. \tag{12}$$

由 (12),

$$x(t-\tau) \geq \frac{x(t)}{g_1(\alpha)} \geq \frac{x(t+\tau)}{g_1^2(\alpha)}.$$

代入 (11), 得

$$x(t) \geq \frac{x(t+\tau)}{g_1^2(\alpha)} + (\alpha-\varepsilon)x(t) + \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2 x(t+\tau).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 有

$$\frac{x(t)}{x(t+\tau)} \geq \frac{\alpha^2 + \frac{2}{g_1^2(\alpha)}}{2(1-\alpha)} = \frac{1}{g_2(\alpha)}.$$

重复以上步骤，得

$$\frac{x(t)}{x(t+\tau)} \geq \frac{\alpha^2 + \frac{2}{g_{m-1}^2(\alpha)}}{2(1-\alpha)} = \frac{1}{g_m(\alpha)}.$$

令 $m \to \infty$, 且注意到 $\lim_{m\to\infty} g_m(\alpha) = g(\alpha)$, 由 (5)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{x(t+\tau)} \geq A(\alpha) := \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}.$$

3 主要结果

定理 1 如果 $\Lambda := \limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s > 1$, 则不等式 (1) 无最终正解.

证明 反设不等式 (1) 存在最终正解 $x(t)$, 则存在 $t_1 > t_0$ 使得 $x(t-\tau) > 0, t \geq t_1$. 从 $t-\tau$ 到 t 积分 (1) 式，并注意到 $x(t)$ 单调非减，有

$$x(t) - x(t-\tau) \geq \int_{t-\tau}^{t} p(s)x(s+\tau)\mathrm{d}s \geq x(t)\int_{t-\tau}^{t} p(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$x(t)[\int_{t-\tau}^{t} p(s)\mathrm{d}s - 1] + x(t-\tau) \leq 0.$$

由此得 $\int_{t-\tau}^{t} p(s)\mathrm{d}s < 1$ 与假设矛盾. □

定理 2 假设 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{e}, f(\alpha)$ 是方程 (3) 的小根. 如果 (7) 式成立，且

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s > 1 - A(\alpha). \tag{13}$$

则不等式 (1) 无最终正解.

证明 因 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{e}$, 所以由 (13) 知存在 $\theta(0<\theta<1)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}[e^{(\theta-1)f(\alpha)}\int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s + \theta A(\alpha)] > 1. \tag{14}$$

反设不等式 (1) 存在最终正解 $x(t)$, 则存在 $t_1 > t_0$, 使得 $x(t+\tau) \geq x(t) > 0$, 且 $\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s \leq 1$(由定理 1), $t \geq t_1$. 于是由 (1) 得

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \geq p(t)\frac{x(t+\tau)}{x(t)}, \quad t \geq t_1. \tag{15}$$

由引理 1 和 2 知存在 $t_2 > t_1$, 使得 $\frac{x(t+\tau)}{x(t)} \geq \theta f(\alpha), \frac{x(t)}{x(t+\tau)} \geq \theta A(\alpha), t \geq t_2$. 于是对 $t \leq s \leq t+\tau, t \geq t_2$, 由 (15) 得

$$\begin{aligned}\frac{x(s+\tau)}{x(t+\tau)} &\geq \exp(\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\frac{x(\xi+\tau)}{x(\xi)}\mathrm{d}\xi) \\ &\geq \exp(\theta f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi) \\ &\geq e^{(\theta-1)f(\alpha)}\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi). \end{aligned} \tag{16}$$

现从 $t > t_2$ 到 $t+\tau$ 积分 (1) 并利用上式，得

$$\begin{aligned}x(t+\tau) - x(t) &\geq \int_t^{t+\tau} p(s)x(s+\tau)\mathrm{d}s \\ &\geq e^{(\theta-1)f(\alpha)}x(t+\tau)\int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{x(t)}{x(t+\tau)} + e^{(\theta-1)f(\alpha)}\int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s \\ &\geq \theta A(\alpha) + e^{(\theta-1)f(\alpha)}\int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s, \quad t \geq t_2\end{aligned}$$

此与 (14) 矛盾. □

推论 1 假设 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{e}$, (7) 式成立，且

$$\Lambda > \frac{1+\ln f(\alpha)}{f(\alpha)} - \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}. \tag{17}$$

则不等式 (1) 无最终正解.

证明 由 α 的定义，对任意 $\theta(0<\theta<1)$, 存在 $t_\theta > t_0$, 使 $\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s \geq \theta\alpha, t \geq t_\theta$. 于是对任意 $t \geq t_\theta$ 存在 $t^* \in [t, t+\tau]$ 使得 $\int_{t^*}^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s = \theta\alpha$. 下设 $t > t_\theta$, 则

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+\tau} p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s \\ &\geq \int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s + \int_{t^*}^{t+\tau} p(s)[\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi) - 1]\mathrm{d}s \\ &\geq \int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s + \int_{t^*}^{t+\tau} p(s)[\exp(f(\alpha)\int_t^{s} p(\xi)\mathrm{d}\xi) - 1]\mathrm{d}s \\ &\geq \int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s + e^{\theta\alpha f(\alpha)}\int_{t^*}^{t+\tau} p(s)\exp(-f(\alpha)\int_s^{t+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s - \theta\alpha \\ &= \int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s + \frac{e^{\theta\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)} - \theta\alpha.\end{aligned}$$

于是

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau}p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau}p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s\ge\Lambda+\frac{e^{\theta\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)}-\theta\alpha.$$

在上式中令 $\theta\to 1$, 则有

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau}p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+\tau}^{s+\tau}p(\xi)d\xi)\mathrm{d}s\ge\Lambda+1-\frac{1+\ln f(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

上式连同 (17) 式推出 (13), 由定理 2 知不等式 (1) 无最终正解. □

推论 2 假设 $0\le\alpha\le\frac{1}{e}$, (7) 式成立，且

$$\Lambda>2+\alpha-e^{\alpha}-\frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}. \tag{18}$$

则不等式 (1) 无最终正解.

证明 因

$$\begin{aligned}1+\ln f(\alpha)=1+\alpha f(\alpha)&=e^{\alpha f(\alpha)}-\frac{1}{2!}(\alpha f(\alpha))^2-\frac{1}{3!}(\alpha f(\alpha))^3-\cdots\\&\le f(\alpha)-(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots)f(\alpha)=(2+\alpha-e^{\alpha})f(\alpha).\end{aligned}$$

由推论 1, 得不等式 (1) 无最终正解.

定理 3 假设 $0\le\alpha\le\frac{1}{e},\Lambda<1$, 且 (7) 式成立. 如果

$$\limsup_{t\to\infty}[\int_{t+\tau}^{t+2\tau}p(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+\tau}p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau}p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s/(1-\int_t^{t+\tau}p(s)\mathrm{d}s)]>\frac{1+\ln f(\alpha)}{f(\alpha)}, \tag{19}$$

其中 $f(\alpha)$ 是方程 (3) 的小根. 则不等式 (1) 无最终正解.

证明 反设不等式 (1) 存在最终正解，则存在 $t_1>t_0$, 使得

$$x(t+\tau)\ge x(t)>0,\quad \int_t^{t+\tau}p(s)\mathrm{d}s\le 1,\quad t\ge t_1. \tag{20}$$

由引理 1 及 α 的定义知，对任意 $\theta(0<\theta<1)$, 存在 $t_\theta>t_1$, 使得

$$\frac{x(t+\tau)}{x(t)}\ge\theta f(\alpha),\quad \int_{t+\tau}^{t+2\tau}p(s)\mathrm{d}s\ge\theta\alpha,\quad t\ge t_\theta.$$

类似于定理 2 的证明，有

$$1\ge\frac{x(t+\tau)}{x(t+2\tau)}+e^{(\theta-1)f(\alpha)}\int_{t+\tau}^{t+2\tau}p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+2\tau}^{s+\tau}p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s,\quad t\ge t_\theta. \tag{21}$$

类似于推论 1 的证明，有

$$\int_{t+\tau}^{t+2\tau}p(s)\exp(f(\alpha)\int_{t+2\tau}^{s+\tau}p(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s\ge\int_{t+\tau}^{t+2\tau}p(s)\mathrm{d}s+\frac{e^{\theta\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)}-\theta\alpha,\quad t\ge t_\theta. \tag{22}$$

另一方面，对 $t \geq t_\theta$, 从 t 到 $t+\tau$ 积分 (1) 并利用 $x(t)$ 的单调非减性得

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &\geq x(t) + \int_t^{t+\tau} p(s)x(s+\tau)\mathrm{d}s \\ &\geq x(t) + \int_t^{t+\tau} p(s)[x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)x(\xi+\tau)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}s \\ &\geq x(t+\tau)\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s + x(t+2\tau)\int_t^{t+\tau} p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x(t+\tau)}{x(t+2\tau)} \geq \int_t^{t+\tau} p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s/(1-\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s), \quad t \geq t_\theta. \tag{23}$$

将 (22) 和 (23) 式代入 (21) 得

$$\begin{aligned} & e^{(\theta-1)f(\alpha)}\int_{t+\tau}^{t+2\tau} p(s)\mathrm{d}s + \int_t^{t+\tau} p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s/(1-\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s) \\ & \leq 1 + e^{(\theta-1)f(\alpha)}[\theta\alpha - \frac{e^{\theta\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)}], \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & \limsup_{t\to\infty}[\int_{t+\tau}^{t+2\tau} p(s)\mathrm{d}s + e^{(1-\theta)f(\alpha)}\int_t^{t+\tau} p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s/(1-\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s)] \\ & \leq e^{(1-\theta)f(\alpha)} + \theta\alpha - \frac{e^{\theta\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)}. \end{aligned}$$

在上式中令 $\theta \to 1$, 则有

$$\begin{aligned} & \limsup_{t\to\infty}[\int_{t+\tau}^{t+2\tau} p(s)\mathrm{d}s + \int_t^{t+\tau} p(s)\int_{t+\tau}^{s+\tau} p(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s/(1-\int_t^{t+\tau} p(s)\mathrm{d}s)] \\ & \leq 1 + \alpha - \frac{e^{\alpha f(\alpha)}-1}{f(\alpha)} = \frac{1+\ln f(\alpha)}{f(\alpha)}. \end{aligned}$$

此与 (19) 式矛盾. □

例 考虑一阶时超微分不等式

$$x'(t) - (\cos t + |\cos t|)x(t+\frac{\pi}{2}) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{24}$$

易见 $p(t) = \cos t + |\cos t|, \quad \tau = \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\frac{\pi}{2}} p(s)\mathrm{d}s = \liminf_{t\to\infty}\int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi-\frac{\pi}{2}}(\cos s - \cos s)\mathrm{d}s = 0,$$

$$\Lambda = \limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\frac{\pi}{2}} p(s)\mathrm{d}s = \limsup_{t\to\infty}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} 2\cos s\mathrm{d}s = 2\sqrt{2} > 1.$$

由定理 1, 知不等式 (24) 无最终正解.

参考文献:

[1] AGARWAL R P, GRACE S R, O'REGAN D. *Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations* [M]. Kluwer Academic Publishers, 2000.
[2] ERBE L H, KONG Qing-kai, ZHANG B G. *Oscillation Theory for Functional Differential Equation* [M]. New York: Marcel Dekker, 1995.
[3] ERBE L H, ZHANG B G. *Oscillation for first order linear differential equations with deviating arguments* [J]. Differential Integral Equations, 1989, **1**: 305–314.
[4] 简超. 关于线性偏差变元微分方程的振动性 [J]. 数学的实践与认识, 1991, **1**: 32–41.
JIAN Chao. *On the oscillation of linear differential equations with deviating arguments* [J]. Math. Practice Theory, 1991, **1**: 32–41. (in Chinese)
[5] YU Jian-She, WANG Zhi-cheng. *Some further results on oscillation of neutral differential equations* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1992, **46**: 149–157.
[6] KWONG M K. *Oscillation of first order delay equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **156**: 274–286.
[7] 唐先华, 庾建设. 一阶线性时滞微分不等式 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2000, **20**(2): 269–273.
TANG Xian-hua, YU Jian-she. *First order linear differential inequlities* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2000 , **20**(2): 269-273. (in Chinese)
[8] ZHANG B G, ZHOU Y. *The distribution of zeros of solutions of differential equations with a variable delay* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **256**: 216–228.

First Order Linear Advanced Differential Inequalities

GAO Jian-ming, GAO Guo-zhu
(Dept. of Appl. Math., Dong Hua University, Shanghai 200051, China)

Abstract: In this paper, the nonexistence of eventually positive solutions of the first order linear advanced differential inequality $x'(t)-p(t)x(t+\tau)\geq 0$ is investigated, where $p(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty)), \tau\in R^+$.

Key words: advanced; differential inequality; eventually positive solution.