第26卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0107-04 **文献标识码**: **A**

关于多元角形区域上的无穷可微函数的广义准解析性

龙品红 [1,2], 邓冠铁 [1]
(1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875; 2. 装甲兵工程学院基础部, 北京 100072)
(E-mail: denggt@bnu.edu.cn)

摘 要: 本文将关于角形闭区域中无穷可微函数类的广义准解析性的结果推广到了多维情形.

关键词: 角形区域; 准解析性.
MSC(2000): 30D60
中图分类: O174.5, O174.52

1 引 言

文献 [1], [2] 中讨论了一元角形闭区域中无穷可微函数类的广义准解析性, 得到了一系列结果. 现在我们把其中一些结论推广到了多维情形.

我们首先假设多元角形闭区域为 $I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_m}=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_m):z\in\mathbf{C},\ell=1,2,\cdots,m\}\subset\mathbf{C}^m$, 其中 $I_{\alpha_\ell}=\{z_\ell=re^{i\theta_\ell}\in\mathbf{C}:\mid\theta_\ell\mid\le\alpha_\ell,r\ge 0\}$, $(0\le\alpha_\ell<\pi,\ell=1,2,\cdots.,m)$. 设 $\{M_n\}$ 为正整数序列. 设 $\Lambda=\Lambda^{(1)}\times\cdots\times\Lambda^{(m)}$, 其中 $\Lambda^{(\ell)}=\{\lambda_n^{(\ell)}\}(n\in\mathbf{N},\ell=1,2,\cdots,m)$ 为 m 个严格增的正整数序列. 令

$$\lambda^{(\ell)}(r)=\begin{cases}2\sum\limits_{\lambda_n^{(\ell)}\le r}\dfrac{1}{\lambda_n^{(\ell)}}, & r\ge\lambda_1^{(\ell)}\\ 0, & r\le\lambda_1^{(\ell)}\end{cases}$$

$$K^{(\ell)}(r)=\lambda^{(\ell)}(r)-\frac{2\alpha_\ell}{\pi}\log r;\tag{1}$$

$$\underline{K}^{(\ell)}(r)=\inf\{K^{(\ell)}(r'):r'>r\};\tag{2}$$

$$\overline{K}^{(\ell)}(r)=\sup\{K^{(\ell)}(r'):0\le r'\le r\};\tag{3}$$

$$S(t)=\sup\{nt-\log M_n:n\ge 0\}.\tag{4}$$

根据上面所设, 可以得到如下定理:

定理 设 $f(z)=f(z_1,z_2,\cdots,z_m)$ 为角形闭区域 $I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_m}$ 中的无穷可微分函数, 满足

$$\mid f^{(n_1,n_2,\cdots,n_m)}(z)\mid\le C^nM_n;\tag{5}$$

$$f(0,0,\cdots,0)=f^{(\lambda_{k_1}^{(1)},\lambda_{k_2}^{(2)},\cdots,\lambda_{k_m}^{(m)})}(0,0,\cdots,0)=0,\tag{6}$$

收稿日期: 2004-01-13

其中 $n=\sum_{\ell=1}^{m}n_\ell(n\in\mathbf{N})$, $\{M_n\}$ 为一个正整数序列, $(\lambda_{k_1}^{(1)},\lambda_{k_2}^{(2)},\cdots,\lambda_{k_m}^{(m)})\in\Lambda,k_\ell\in\mathbf{N},\ell=1,2,\cdots,m$, 且 C 为正常数. 如果对于任意 $b\in\mathbf{R},\ell=1,2,\cdots,m$, 有

$$\int_1^\infty S(\underline{K}^{(\ell)}(r)-b)r^{-2}\mathrm{d}r=\infty, \tag{7}$$

那么在 $I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_m}$ 上 $f(z)\equiv 0$. 反之，如果存在 $\ell\in\{1,2,\cdots,m\}$ 和某一实常数 b_ℓ, 满足

$$\int_1^\infty S(\overline{K}^{(\ell)}(r)-b_\ell)r^{-2}\mathrm{d}r<\infty, \tag{8}$$

那么在 $I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_m}$ 上存在着不恒等于零的无穷可微分函数 $f(z)$, 满足式 (5) 和 (6). 其中 $S(t)$ 如前面 (4) 所设，而 $K^{(\ell)}(r),\overline{K}^{(\ell)}(r),\underline{K}^{(\ell)}(r)(\ell=1,2,\cdots,m)$ 如前面 (1)–(3) 所设.

注 1 在文献 [3] 和 [4] 中已经解决了半直线上的广义准解析函数的存在性和唯一性问题，即定理中 $\alpha_\ell=0(\ell=1,2,\cdots,m)$ 时的情况.

注 2 当 $m=1$ 时，文献 [1] 和 [2] 把文献 [3] 和 [4] 的结果推广了到角形闭区域上，该结论就是定理中 $\alpha_m>0(m=1)$ 时的特例.

2 定理的证明

定理前半部分的证明 设 $f(z)$ 为满足题设条件的函数，且式 (7) 成立. 下面证明 $f(z)\equiv 0$, 首先就 $m=2$ 时的情况予以证明.

1) 对于任意取定的 $\lambda_{k_2}^{(2)}\in\Lambda^{(2)}$, 在 $I(\alpha_1)$ 内定义一元函数

$$F_1(z_1)=f^{(0,\lambda_{k_2}^{(2)})}(z_1,0).$$

由假设知道，当 $n_1\in\mathbf{N}$ 时，有

$$|\ F^{(n_1)}(z_1)\ |=|\ f^{(n_1,\lambda_{k_2}^{(2)})}(z_1,0)\ |\le C^nM_n\ (n=n_1+\lambda_{k_2}^{(2)});$$

$$F_1(0)=F_1^{(\lambda_{k_1}^{(1)})}(0)=f^{(\lambda_{k_1}^{(1)},\lambda_{k_2}^{(2)})}(z_1,0)=0\ (k_1\in\mathbf{N}).$$

令

$$S_1(\underline{K}^{(1)}(r)-b)=\sup_k\{k(\underline{K}^{(1)}(r)-b)-\log M_n\}\ (n=k+\lambda_{k_2}^{(2)}),$$

其中 b 为一个实常数，则有

$$\begin{aligned}S_1(\underline{K}^{(1)}(r)-b)&=\sup_k\{(k+\lambda_{k_2}^{(2)})(\underline{K}^{(1)}(r)-b)-\log M_n\}-\lambda_{k_2}^{(2)}(\underline{K}^{(1)}(r)-b)\\&=S(\underline{K}^{(1)}(r)-b)-\lambda_{k_2}^{(2)}(\underline{K}^{(1)}(r)-b).\end{aligned}$$

因此对于任何实常数 b, 当 $r\ge 1$ 时，存在常数 $A>0$, 满足

$$\lambda_{k_2}^{(2)}(\underline{K}^{(1)}(r)-b)\le\lambda_{k_2}^{(2)}(A\log r+A),$$

则

$$S_1(\underline{K}^{(1)}(r)-b)\le S(\underline{K}^{(1)}(r)-b)\le S_1(\underline{K}^{(1)}(r)-b)+A\lambda_{k_2}^{(2)}(\log r+1).$$

由式 (7) 知

$$\int_1^\infty S_1(\underline{K}^{(1)}(r)-b)r^{-2}\mathrm{d}r=\infty,$$

则由注 2 知道，在 I_{α_1} 上 $F_1(z_1)=f^{(0,\lambda_{k_2}^{(2)})}(z_1,0)\equiv 0(z_2\in I_{\alpha_2})$.

2） 证明对于任何 $z_1'\in I_{\alpha_1}, f(z_1',z_2)\equiv 0(z_2\in I_{\alpha_2})$. 令 $F_2(z_2)=f(z_1',z_2)$, 则

$$|\ F_2^{(n_2)}(z_2)\ |=|\ f^{(0,n_2)}(z_1',z_2)\ |\le C^{n_2}M_{n_2};$$

$$F_2(0)=F_2^{(\lambda_{k_2}^{(2)})}(0)=f^{(0,\lambda_{k_2}^{(2)})}(z_1',0)=0,$$

其中 $\lambda_{k_2}^{(2)}\in\Lambda^{(2)}, k_2\in\mathbf{N}$. 又令

$$\begin{aligned}S_2(\underline{K}^{(2)}(r)-b)&=\sup_{n_2}\{n_2(\underline{K}^{(2)}(r)-b)-\log M_{n_2}\}\\&=S(\underline{K}^{(2)}(r)-b),\end{aligned}$$

其中 b 为一个正实常数. 则由式 (7), 有

$$\int_1^\infty S_2(\underline{K}^{(2)}(r)-b)r^{-2}\mathrm{d}r=\infty.$$

于是由注 2 知道，在 I_{α_2} 上 $F_2(z_2)=f(z_1',z_2)\equiv 0$. 又由 z_1' 的任意性知，在 $I_{\alpha_1}\times I_{\alpha_2}$ 上 $F_2(z_2)=f(z_1',z_2)\equiv 0$. 于是定理的前半部分在 $m=2$ 时成立.

其次，假定定理的前半部分在 $m=s$ 时成立，仿照上述方法可以证明定理的前半部分在 $m=s+1$ 时成立，于是定理的前半部分得证.

定理后半部分的证明　如果存在 $\ell\in\{1,2,\cdots,m\}$, 对于某一个常数 $b_\ell\in\mathbf{R}$, 满足下列不等式

$$\int_1^\infty S(\overline{K}^{(\ell)}(r)-b_\ell)r^{-2}\mathrm{d}r<\infty,$$

则根据注 2 的结论，可在 I_{α_ℓ} 上作一个不恒等于零的无穷可微函数 $f_\ell(z_\ell)$, 满足

$$f_\ell(0)=f_\ell^{(\lambda_{k_\ell}^{(\ell)})}(0)=0;$$

$$|\ f_\ell^{(n_\ell)}(z_\ell)\ |\le C_\ell^{n_\ell}M_{n_\ell}^c,$$

其中 $\lambda_{k_\ell}^{(\ell)}\in\Lambda^{(\ell)}, n_\ell, k_\ell\in\mathbf{N}$, C_ℓ 为正常数.

令 $f(z)=f_\ell(z_\ell), n=\sum_{\ell=1}^m n_\ell$, 其中 $z\in I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_m}$, 则得到

$$f^{(n_1,n_2,\cdots n_m)}(z)=\begin{cases}0, & n-n_\ell>0\\ f_\ell^{(n_\ell)}(z_\ell), & n-n_\ell=0\end{cases}$$

从而

$$|\ f^{(n_1,n_2,\cdots,n_m)}(z)\ |\le C_\ell^n M_n^c\le C_\ell^n M_n\ (n=\sum_{\ell=1}^m n_\ell),$$

从而在 $I_{\alpha_1} \times \cdots \times I_{\alpha_m}$ 上有不恒为零的解析函数 $f(z)$ 满足式 (5) 和 (6), 则定理后半部分的得到证明. 综上所述, 则定理得到证明.

参考文献:

[1] DENG Guan-tie. *Representation formulas for analytic function non-exponential in a half plane* [J]. Northeast. Math. J., 1995, **11**(1): 108–112.
[2] DENG Guan-tie. *Generalized qusi-analyticity in an angular domain* [J]. Applied Functional Analysis, 1993, **1**: 27–32.
[3] YU Jia-rong. *Uniqueness of analytic functions of several complex variables and its application* [J]. Acta Math. Sinica, 1976, **19**: 219–238.
[4] YU Jia-rong. *Dirichlet Series and Random Dirichlet Series* [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)

Generalized Quasi-analyticity of Infinitely Differentiable Functions with Several Complex Variables on Closed Angular Domain

LONG Pin-hong[1,2], *DENG Guan-tie*[1]
(1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;
2. The Academy of Armored Forces Engineering, Beijing 100072, China)

Abstract: In this paper, we extend the theorem on generalized quasi-analyticity of the infinitely differentiable functions in the closed angular domain to the functions of several complex variables.

Key words: angular domain; quasi-analyticity.