应用概率统计　第二十四卷
第一期　2008年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.1 Feb. 2008

强平稳LPQD序列更新过程的渐近正态性 *

杨　洋[1,2]　　　王岳宝[1]

([1]苏州大学数学科学学院, 苏州, 215006;　[2]南京审计学院应用数学系, 南京, 210029)

摘　要

本文讨论了强平稳LPQD随机变量列更新过程的渐近正态性问题.

关 键 词:　强平稳, LPQD序列, NA序列, 渐近正态性.

学 科 分 类 号:　O211.4.

§1.　引言与背景

应用概率中, 许多经典的结果往往将对象视作独立同分布的随机变量, 然而在实际中, 各变量之间的关系往往比较复杂, 有的相互之间受一个共同因素的制约, 呈相互促进的正相关关系, 有的却恰恰相反. 例如, 前段股市下泻都受一个共同因素——国有股减持的影响, 各出逃量就存在某种正相关的关系; 又如在同一个服务系统中, 每位顾客接受服务的时间长短都受该系统自身条件的制约, 也呈现出某种正相关性, 等等. 因而近年来, 相关随机变量的概念越来越受到国内外学者的普遍关注. 这些概念源自于应用概率, 应用统计中的一些相当有用的不等式, 它们在多元统计分析, 可靠性理论, 金融保险的极限理论及大服务系统中有着广泛的应用, 正象限相关性(PQD, Positively Quadrant Dependent)就是其中之一.

Lehmann (1966)引入了一个简单而自然的正相关概念.

定义 1.1　称随机变量序列$\{X_n: n\in\mathbf{N}\}$是两两PQD的, 如果对于$\forall\, r_i, r_j\in\mathbf{R}$, $i\neq j$, 都有

$$\mathsf{P}\{X_i>r_i, X_j>r_j\}\geq\mathsf{P}\{X_i>r_i\}\mathsf{P}\{X_j>r_j\}. \tag{1.1}$$

类似的, 两两NQD序列只要将(1.1)中的"$\geq$"相反即可.

一个更强的正相关概念是由Esary, Proschan和Walkup (1967)提出的.

定义 1.2　称随机变量序列$\{X_n: n\in\mathbf{N}\}$是PA (Positively Associated)的, 如果对于任何有限元$X_{i_1},\cdots,X_{i_n}$及任何两个使得协方差存在的, 且对每个变元都单调不减的函数f和g, 都有

$$\mathsf{Cov}\left(f(X_{i_1},\cdots,X_{i_n}), g(X_{i_1},\cdots,X_{i_n})\right)\geq 0. \tag{1.2}$$

*受国家自然科学基金(No. 10671139), 江苏省高校自然科学指导性项目(06KJD110092), 南京审计学院一般项目(NSK 2007/B01)资助.

本文2005年8月5日收到, 2006年5月25日收到修改稿.

然而与之相对应的NA (Negatively Associated)的概念却有一定的差异, 不是简单的改变符号, 它是由Joag-Dev和Proschan (1983)提出的.

定义 1.3 称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_k$是NA的, 如果对于$\{1, 2, \cdots, k\}$的任何两个不相交的非空子集A和B及任何两个使得协方差存在的, 且对每个变元都单调不减的函数f和g, 都有

$$\mathsf{Cov}\,(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)) \le 0. \tag{1.3}$$

一个随机变量序列$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$称为NA随机变量列, 如果它的任何一个有限元$X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$, $k \ge 2$是NA的.

对于两两PQD的随机变量序列, 人们证明了大数定律(参见Birkel (1989)), 而中心极限定理要求PQD列的线性组合也是PQD列, 因而Newman引入了LPQD (Linearly Positively Quadrant Dependent)序列的概念.

定义 1.4 称随机变量序列$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$是LPQD的, 如果对于任何两个不相交的集合$A$, B以及正数r_i有$\sum\limits_{i \in \mathbf{A}} r_i X_i$和$\sum\limits_{j \in \mathbf{B}} r_j X_j$是PQD的.

周知, 更新计数过程不仅是更新理论的重要对象之一, 而且在很多领域, 特别在金融保险, 服务系统中有着广泛的应用. 假定某大服务系统逐个不停的为每位顾客提供服务, $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$是非负LPQD随机变量序列, 表示第$n$个人接受该系统的服务时间, $S_0 = 0$, 则$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$表示前$n$个人的总服务时间. 更新计数过程定义为

$$N(t) = \sup\{n : S_n \le t\}, \tag{1.4}$$

表示到时刻t为止, 已经接受完服务人员的个数.

例 1 设(X_1, X_2)具有二元FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern)分布, 其联合密度为

$$f(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}[1 + \alpha(2e^{-\lambda x_1} - 1)(2e^{-\lambda x_2} - 1)], \qquad x_1, x_2 \ge 0, \quad -1 \le \alpha \le 1.$$

容易计算$\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = \alpha/4$, 当$\alpha > 0$时, X_1, X_2为PQD的. 事实上, 此时$\mathrm{Corr}(-X_1, X_2) < 0$, $(-X_1, X_2)$为NA的, 由Joag-Dev和Proschan (1983)的Property P_1知$(-X_1, X_2)$是NQD的, 故(X_1, X_2)是PQD的.

设$\{Y_k, k \ge 1\} = \{X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, n \ge 1\}$, 其中$(X_1^{(n)}, X_2^{(n)})$是$(X_1, X_2)$的独立复制, 则$\{Y_k, k \ge 1\}$是非负LPQD序列. 事实上, $\forall\, i \ne j$, $\mathsf{Cov}\,(Y_i, Y_j) \ge 0$, 因此对于任何两个不相交的集合$A$, B以及正数r_i有

$$\mathsf{Cov}\left(\sum_{i \in \mathbf{A}} r_i Y_i, \sum_{j \in \mathbf{B}} r_j Y_j\right) = \sum_{i \in \mathbf{A}, \mathbf{j} \in \mathbf{B}} r_i r_j \mathsf{Cov}\,(Y_i, Y_j) \ge 0,$$

故$\sum\limits_{i \in \mathbf{A}} r_i Y_i$, $\sum\limits_{j \in \mathbf{B}} r_j Y_j$是PQD的, 所以$\{Y_k, k \ge 1\}$是非负LPQD序列.

可以认为, 例1中的服务系统每服务两个顾客重新调整设备, 未调整时两个顾客接受服务的时间分布类似于指数元件的寿命分布, 存在着PQD的正相关关系, 调整后是相互独立同分布的.

本文将讨论一个服务系统的服务时间为强平稳LPQD序列的更新计数过程的渐近正态性问题, 将在第二节给出本文的主要定理及其证明.

§2. 主要定理及证明

若无特别说明, 以下均假设Z表示标准正态随机变量. 下面给出本文的主要定理.

定理 2.1 设服务时间$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$是强平稳LPQD随机变量序列, $N(t)$是由其产生的更新计数过程. 若$\mathsf{E}X_1 = \mu$, $0 < DX_1 < \infty$, 并且假定

$$0 < \sigma^2 = DX_1 + 2\sum_{i=2}^{\infty} \mathsf{Cov}\,(X_1, X_i) < \infty, \tag{2.1}$$

则有

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

在给出该定理的证明之前, 首先给出若干引理.

命题 2.1 (Newman (1980)) 设$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$是强平稳LPQD随机变量序列, 若$\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$, 并且(2.1)成立, 则$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$服从中心极限定理, 即$\sigma_n^{-1}S_n \xrightarrow{L} Z$, 其中$\sigma_n^2 = \mathsf{E}S_n^2$.

引理 2.1 若$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$是强平稳LPQD随机变量序列, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{DS_n}{n} = \sigma^2. \tag{2.3}$$

证明: 由$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$的强平稳性知

$$\begin{aligned}
\frac{DS_n}{n} &= DX_1 + \frac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n} \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j) \\
&= DX_1 + \frac{2}{n}\Big[\sum_{i=2}^{n} \mathsf{Cov}\,(X_1, X_i) + \sum_{i=3}^{n} \mathsf{Cov}\,(X_2, X_i) + \cdots + \mathsf{Cov}\,(X_{n-1}, X_n)\Big] \\
&= DX_1 + \frac{2}{n}\Big[\sum_{i=2}^{n} \mathsf{Cov}\,(X_1, X_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \mathsf{Cov}\,(X_1, X_i) + \cdots + \mathsf{Cov}\,(X_1, X_2)\Big] \\
&= DX_1 + 2\Big[\frac{n-1}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1, X_2) + \frac{n-2}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1, X_3) + \cdots + \frac{1}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1, X_n)\Big].
\end{aligned}$$

由$\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$为LPQD列知, X_1与X_j是两两PQD的, 于是$-X_1$与X_j是两两NQD的, $j = 2, 3, \cdots, n$. 再由Joag-Dev和Proschan (1983)的Property P_1知两个随机变量的NQD性

等价于NA性, 故$-X_1$与X_j是两两NA的, $j=2,\cdots,n$. 于是$\mathsf{Cov}\,(X_1,X_j)=-\mathsf{Cov}\,(-X_1,X_j)\geq 0$, $j=2,\cdots,n$. 则

$$\frac{DS_n}{n}\leq DX_1+2\sum_{i=2}^{n}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_i)\leq DX_1+2\sum_{i=2}^{\infty}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_i)=\sigma^2. \tag{2.4}$$

另一方面, 对$\forall\,1<m<n$有

$$\frac{DS_n}{n}\geq DX_1+2\Big[\frac{n-1}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_2)+\frac{n-2}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_3)+\cdots+\frac{n-m+1}{n}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_m)\Big],$$

固定m, 令$n\to\infty$得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n}\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n}\geq DX_1+2\sum_{i=2}^{m}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_i),$$

再令$m\to\infty$, 可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n}\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n}\geq DX_1+2\sum_{i=2}^{\infty}\mathsf{Cov}\,(X_1,X_i)=\sigma^2. \tag{2.5}$$

结合(2.4)知(2.3)成立. $\square$

最后我们来证明定理2.1.

定理 2.1的证明: 首先令$\widetilde{X}_n=X_n-\mu$, $\widetilde{S}_n=S_n-n\mu$, $n=1,2,\cdots$, 则由$\{X_n:n\in\mathbf{N}\}$为LPQD列知, 对$\forall\,A,B$且$A\cap B=\emptyset$及$\forall\,r_i>0$有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big\{\sum_{i\in A}r_i\widetilde{X}_i>x,\ \sum_{j\in B}r_j\widetilde{X}_j>y\Big\}\\
=\ &\mathsf{P}\Big\{\sum_{i\in A}r_iX_i>x+\mu\sum_{i\in A}r_i,\ \sum_{j\in B}r_jX_j>y+\mu\sum_{j\in B}r_j\Big\}\\
\geq\ &\mathsf{P}\Big\{\sum_{i\in A}r_iX_i>x+\mu\sum_{i\in A}r_i\Big\}\mathsf{P}\Big\{\sum_{j\in B}r_jX_j>y+\mu\sum_{j\in B}r_j\Big\}\\
=\ &\mathsf{P}\Big\{\sum_{i\in A}r_i\widetilde{X}_i>x\Big\}\mathsf{P}\Big\{\sum_{j\in B}r_j\widetilde{X}_j>y\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

于是由命题2.1知$\widetilde{S}_n/\sqrt{D\widetilde{S}_n}$渐近服从标准正态分布, 即

$$\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{D\widetilde{S}_n}}\xrightarrow{L}Z\sim N(0,1). \tag{2.7}$$

结合引理2.1有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{\widetilde{S}_n}{\sigma\sqrt{n}}<y\Big\}&=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{D\widetilde{S}_n}}<y\sqrt{\frac{n\sigma^2}{D\widetilde{S}_n}}\Big\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{D\widetilde{S}_n}}<y\Big\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

即
$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1). \tag{2.8}$$

令$r_t = t/\mu + y\sigma\sqrt{t/\mu^3}$, 则
$$\mathsf{P}\Big\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\Big\} = \mathsf{P}\{N(t) < r_t\}.$$

注意到$[r_t] \le r_t < [r_t] + 1$, 知
$$\mathsf{P}\{N(t) < [r_t]\} \le \mathsf{P}\{N(t) < r_t\} \le \mathsf{P}\{N(t) < [r_t] + 1\}. \tag{2.9}$$

一方面, 由$N(t) < n \Longleftrightarrow S_n > t$知
$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{N(t) < [r_t]\} &= \mathsf{P}\{S_{[r_t]} > t\} = \mathsf{P}\Big\{\frac{S_{[r_t]} - [r_t]\mu}{\sigma\sqrt{[r_t]}} > \frac{t - [r_t]\mu}{\sigma\sqrt{[r_t]}}\Big\} \\ &\ge \mathsf{P}\Big\{\frac{S_{[r_t]} - [r_t]\mu}{\sigma\sqrt{[r_t]}} > \frac{t - (r_t - 1)\mu}{\sigma\sqrt{r_t - 1}}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

注意到
$$\frac{t - (r_t - 1)\mu}{\sigma\sqrt{r_t - 1}} = -y\sqrt{\frac{t}{t + y\sigma\sqrt{t/\mu} - \mu}} + \frac{\mu}{\sigma}\Big(\frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} - 1\Big) \to -y, \qquad t \to \infty,$$

故由(2.8)知, 当$t \to \infty$时, $[r_t] \to \infty$, 故
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\frac{S_{[r_t]} - [r_t]\mu}{\sigma\sqrt{[r_t]}} > \frac{t - (r_t - 1)\mu}{\sigma\sqrt{r_t - 1}}\Big\} &= \mathsf{P}\{Z > -y\} = \mathsf{P}\{Z < y\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.11}$$

另一方面, 同理可得
$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{N(t) < [r_t] + 1\} &= \mathsf{P}\{S_{[r_t]+1} > t\} \\ &= \mathsf{P}\Big\{\frac{S_{[r_t]+1} - ([r_t] + 1)\mu}{\sigma\sqrt{[r_t] + 1}} > \frac{t - ([r_t] + 1)\mu}{\sigma\sqrt{[r_t] + 1}}\Big\} \\ &\le \mathsf{P}\Big\{\frac{S_{[r_t]+1} - ([r_t] + 1)\mu}{\sigma\sqrt{[r_t] + 1}} > \frac{t - (r_t + 2)\mu}{\sigma\sqrt{r_t + 2}}\Big\} \\ &\longrightarrow \mathsf{P}\{Z > -y\} = \mathsf{P}\{Z < y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.12}$$

故由夹逼定理知
$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{N(t) < r_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

因此(2.2)得证. $\square$

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Lehmann, E.L., Some concepts of dependence, *Ann. Math. Statist.*, **37**(1966), 1137–1153.

[2] Esary, J.D., Proschan, F., Walkup, D.W., Association of random variables with applications, *Ann. Math. Statist.*, **38**(1967), 1466–1474.

[3] Joag-Dev, K. and Proschan, F., Negative association of random variables with applications, *Ann. Statist.*, **11**(1983), 286–295.

[4] Birkel, T., A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.*, **7**(1989), 17–20.

[5] Newman, C.M., Normal fluctuations and the FKG inequalities, *Comm. Math. Phys.*, **74**(1980), 119–128.

The Asymptotical Normality of the Renewal Process Generated by Strictly Stationary LPQD Sequences

Yang Yang[1,2] Wang Yuebao[1]

([1]*Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou, 215006*)

([2]*Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing, 210029*)

This paper discusses the asymptotical normality of the renewal process generated by strictly stationary LPQD random variables.

Keywords: Strictly stationary, LPQD sequences, NA sequences, asymptotical normality.

AMS Subject Classification: 60F05.