Communications in Mathematical Analysis
Volume 3, Number 2, pp. 69–82, 2007
Procceedings of the 15th Symposium of
The Tunisian Mathematical Society
held in Sousse, March 19-22, 2007 *www.commun-math-anal.org*
ISSN 1938-9787

CONSTRUCTION DES TOURNOIS LOCALEMENT TRANSITIFS - SYMÉTRIES ET PÉRIODICITÉ

ABDELKADER BELKILANI *
Universit du 7-Nov. à Carthage, IPEST, la Marsa ; Tunisia

RYM OUANNAS †
Faculté des Sciences-Math., Le campus-1060, Tunis, Tunisia

(Communicated by Said Zarati)

Résumé

On présente un procédé de construction des tournois localement transitifs et on exprime ses symétries en termes de périodicité de son vecteur score. On construit les tournois localement transitifs à groupe de symétrie fixé et on donne une nouvelle interprétation de la formule énumérative de A.E. Brouwer.

AMS Subject Classification : 62G05 ; 62G20.

Keywords : Hazard rate, life time data, right censorship model, wavelets method.

1 Introduction

Un tournoi sur un ensemble S i.e un graphe orienté complet peut être défini par une application antisymétrique

$$f : S\times S \longrightarrow \{-1,1\}, \quad \text{par } x\to y \Longleftrightarrow f(x,y)=1.$$

La relation $x\to y$ est une relation antisymétrique et totale.
Nous convenons de noter $\mathcal{R}$ la relation : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x=y$ ou $x\to y$. et n le cardinal de S. On dira, alors, que $(S,\mathcal{R})$ est un n-tournoi. Un isomorphisme de tournois est une bijection $f:(S,\mathcal{R})\longrightarrow(S',\mathcal{R}')$ telle que $x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x)\mathcal{R}'f(y)$. Deux tournois isomorphes sont dits de mme type. Le tournoi $(S,\mathcal{R})$ est dit transitif si $\mathcal{R}$ est transitive et, dans ce cas, $\mathcal{R}$ est un ordre total. Il est clair qu'il y a un seul type de n-tournoi transitif. La notation

$$x_1\to x_2\to \ldots..\to x_n$$

signifie que $x_i\to x_j$ si et seulement si $i<j$. Pour tout tournoi $(S,\mathcal{R})$ et $x\in S$, on note $x_+=\{y\in S, x\longrightarrow y\}$, $x_-=\{y\in S, y\longrightarrow x\}$.

*E-mail : abdelkader_belkilani@yahoo.fr
†E-mail : rym_ouanes@yahoo.com

Le cardinal de x_+ est appelé score de x et noté $s(x)$. Un n-tournoi $(S,\mathcal{R})$ est dit localement transitif (l.t) si, pour tout $x \in S$, les tournois $(x_+,\mathcal{R})$ et $(x_-,\mathcal{R})$ sont transitifs.

Dans la première partie de ce travail, nous affinons la notion d'isomorphisme en introduisant la notion d'isomorphisme de tournoi-pointés et nous établissons une bijection explicite entre les types de tournoi-pointés et certaines applications croissantes, dite fonctions caractéristiques(Proposition 1). Ce qui abouti un procédé de construction des tournois localement transitifs(Théorème 1).

Dans la deuxième partie, on introduit une indexation convenable du vecteur score d'un tournoi l.t. Cette indexation détermine le tournoi et son groupe de symétrie. En combinant ce résultat avec la notion de fonction caractéristique, nous donnons un procédé de construction de tournoi l.t ayant une symétrie (resp. un groupe de symétrie) donné (théorème 2 et son corollaire).

Nous en déduisons, dans la dernière partie, une interprétation la Burnside de la formule énumérative de A.E. Brouwer et sur ce point nous comparons notre approche avec celle de L.Babai et P.J. Cameron [1].

2 Construction des tournois localement transitifs.

2.1 Fonction caractéristique d'un tournoi l. t pointé.

Rappelons la propriété, dite des intervalles et dûe A.E.Brouwer.

Lemme 1. *Soit $(S,\mathcal{R})$ un tournoi localement transitif et x,y,z trois éléments de S tels que $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}z$ et $x\mathcal{R}z$ alors pour tout $a \in S$ on a les implications*

$$(a\mathcal{R}x \text{ et } a\mathcal{R}z) \Rightarrow a\mathcal{R}y$$
$$(x\mathcal{R}a \text{ et } z\mathcal{R}a) \Rightarrow y\mathcal{R}a$$

Preuve.Les deux implications de la proposition s'obtiennent de la même manière, nous allons montrer seulement la première. Pour cela, prenons un élément a de S tel que $a\mathcal{R}x$ et $a\mathcal{R}z$. Puisque $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$, les trois éléments a, x et y sont dans z_-, qui est transitif, et ils vérifient $a\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$ donc $a\mathcal{R}y$ par transitivité. ∎

Définition 1. 1. *Soit $(S,\mathcal{R})$ un tournoi et $x \in S$, on appelle tournoi-pointé la donnée de $(S,\mathcal{R},x)$. le point x est le point distingué de $(S,\mathcal{R},x)$.*

2. *Deux tournoi-pointés $(S,\mathcal{R},x)$ et $(S',\mathcal{R}',x')$ sont dits de même type ou isomorphes s'il existe un isomrphisme de tournois $f : (S,\mathcal{R}) \longrightarrow (S',\mathcal{R}')$ tel que $f(x) = x'$.*

Soit $(S,\mathcal{R})$ un tournoi l.t n joueurs, $x \in S$ et s son score. Remarquons tout d'abord que $0 \leq s \leq n-1$ et que les deux cas extrêmes, $s = n-1$ ou $s = 0$, entraînent que $(S,\mathcal{R})$ est le transitif. En effet, si $s = n-1$, alors $x_+ = S \setminus \{x\}$ et comme ce dernier est transitif, $(S,\mathcal{R})$ l'est aussi. Si $s = 0$ alors $x_- = S \setminus \{x\}$ et à nouveau $(S,\mathcal{R})$ est transitif. Supposons, donc, que $0 < s < n-1$. Il existe une unique bijection, appelée indexation canonique du tournoi pointé $(S,\mathcal{R},x)$, $\sigma : \{1,2,...,n\} \longrightarrow S$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x = \sigma(n-s) \\ x_- = \{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n-s-1)\} \\ x_+ = \{\sigma(n-s+1),\sigma(n-s+2),...,\sigma(n)\} \end{cases}.$$

Nous adopterons, dans toute la suite, la notation condensée suivante :

$$S : \sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to [\sigma_{n-s} = x] \to \ldots \to \sigma_n,$$

o on a écrit σ_i au lieu de $\sigma(i)$. Cette notation traduit que le score de x est s et que x_- et x_+ sont transitifs. La relation entre un joueur de x_- et un joueur de x_+ est décrite par la proposition suivante.

Définition-Proposition 1. *Soit $(S, \mathcal{R}, x)$ un tournoi l.t pointé. on appelle fonction caractéristique de $(S, \mathcal{R}, x)$ l'application $\chi : \{1, \ldots, n-s-1\} \longrightarrow \{n-s, \ldots, n\}$ définie par $\chi(i) = \max\{j, \sigma_i \to \sigma_j\}$ le plus grand indice dans les joueurs battus par σ_i.*

1. *La fonction caractéristique χ est une application croissante définie sur l'ensemble des indices des joueurs battant x dans l'ensemble des indices des joueurs restants.*
2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-s-1\}$, $\chi(i) = i + s(\sigma_i)$, o $s(\sigma_i)$ est le score de l'élément σ_i.*

Preuve.

1. On a : $1 \leq i \leq n-s-1 \Leftrightarrow \sigma_i \in x_- \Leftrightarrow \sigma_i \to x = \sigma_{n-s} \Rightarrow$

$$n - s \leq \max\{j/\sigma_i \to \sigma_j\} = \chi(i),$$

ce qui montre que χ est bien définie. La croissance de χ découle de la propriété des intervalles en effet on a

$$i + 1 \leq n - s - 1 \Rightarrow \sigma_i \to \sigma_{i+1} \to x$$

et on a $x \to \sigma_{\chi(i)}, \sigma_i \to \sigma_{\chi(i)}$.
D'après le lemme 1, on a $\sigma_{i+1} \to \sigma_{\chi(i)}$, d'o $\chi(i) \leq \chi(i+1)$.

2. La propriété des intervalles implique que σ_i bat tous les joueurs σ_j ; $i < j \leq \chi(i)$, donc le score de σ_i est $\chi(i) - i$.

■

Proposition 1. *Deux tournois l.t pointés sont isomorphes si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique χ.*

Preuve.Soit (S, R, x) et $S', R', x')$ deux tournois L.t pointés ayant la même fonction caractéristique alors S et S' ont le même cardinal,et x et x' ont le même score. Utilisons les indexations canoniques

$$S : \sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to [\sigma_{n-s} = x] \to \sigma_{n-s+1} \to \ldots \to \sigma_n$$
$$S' : \sigma'_1 \to \sigma'_2 \to \ldots \to [\sigma'_{n-s} = x'] \to \sigma'_{n-s+1} \to \ldots \to \sigma'_n.$$

On vérifie facilement que la bijection $f : S \to S'$ $f(\sigma_i) = \sigma'_i$ est un isomorphisme de tournois, c'est dire vérifie

$$(\sigma_i \to \sigma_j) \Leftrightarrow \left(\sigma'_i \to \sigma'_j\right).$$

Cela découle du fait que f commute aux indexations canoniques tout en conservant le score.
■

L'équivalence :

$$(i < k \leq \chi(i)) \Longleftrightarrow (\sigma_i \to \sigma_k)$$

permet de reconstruire le tournoi partir deχ. On verra au paragraphe suivant que la croissance de χ est suffisante.

2.2 Construction

Soit $n \geq 3, s \in \{1,...,n-2\}$ et une application croissante

$$\varphi : \{1,...,n-s-1\} \to \{n-s,...,n\}.$$

Nous associons à φ le tournoi pointé suivant, appelé tournoi pointé canonique attaché à φ

• On prend $S = \{1,2,...,n\}$.

• La relation antisymétrique totale sur S est définie

(α) si $\{i,j\} \subset \{1,...,n-s\}$ et $i < j$ alors $i \to j$.

(β) si $\{i,j\} \subset \{n-s,...,n\}$ et $i < j$ alors $i \to j$.

(γ) si $i \in \{1,...,n-s-1\}, j \in \{n-s+1,...,n\}$ alors $i \to j$ si et seulement si $j \leq \varphi(i)$.

• Le point distingué est $x = n-s$.

Théorème 1. *1. Le tournoi pointé canonique attaché à φ est localement transitif et le score de $x = n-s$ est égal à s*

2. φ est la fonction caractéristique du tournoi-pointé canonique qui lui est attaché.

Preuve.Nous utilisons le lemme suivant. ∎

Lemme 2. *Soit E un ensemble, R une relation anti-symétrique sur E, A et B deux parties de E. Si $R_{|A}$ et $R_{|B}$ sont transitives et pour tout $(a,b) \in A \times B$, aRb, alors $R_{|A\cup B}$ est transitive.*

Preuve.Soit $\{a,b,c\} \subset E$ tel que aRb et bRc. Montrons que aRc

1er Cas $a \in B$. Alors on aura $b \in B$ puis $c \in B$ d'où le résultat par transitivité de $R_{|B}$

2eme Cas $a \in A$. Alors si $c \in B$ on aura aRc par hypothèse et si $c \in A$ alors nécessairement $b \in A$ et on aura le résultat par transitivité de $R_{|A}$. ∎ Passons la Démonstration du théorème.

1. Les conditions α) et β) impliquent que, pour $x = n-s$, x_+ et x_- sont transitifs et que le score de x est s. Il nous reste à vérifier la locale transitivité en un point $y \neq n-s$.

   1er Cas $y \in \{1,...,n-s-1\}$

   Notons $A = y_+ \cap \{1,...,n-s-1\}, B = y_+ \cap \{n-s,...,n\}$

   on a A est vide ou $A = \{y+1, y+2,...,n-s-1\}$, $B = \{n-s,...,\varphi(y)\}$. Ce qui explique les implications suivantes

   $a \in A \Rightarrow y < a \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(a) \Rightarrow (b \leq \varphi(a)\ \ \forall\, b \in B) \Rightarrow (a \to b\ \forall\, b \in B)$.

   Le lemme implique la transitivité de $y_+ = A \cup B$.

   Notons que $y_+ = \{y+1,...,\varphi(y)\}$ est un intervalle et dans y_+ on a $j \to k \Leftrightarrow j < k$.

   Passons à y_-. Notons $A = y_- \cap \{n-s,...,n\}, B = y_- \cap \{1,...,n-s-1\}$. On a A est vide si $\varphi(y) = n$, sinon $A = \{\varphi(y)+1,...,n\}$ et B est vide si $y = 1$, sinon $B = \{1,...,y-1\}$. D'où

   $$b \in B \Rightarrow b < y \Rightarrow \varphi(b) \leq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(b) < a \Rightarrow b \nrightarrow a \Rightarrow a \to b\ \ \forall\, a \in A.$$

   Il en découle que y_- est transitif.

   2eme Cas $y \in \{n-s+1,...,n\}$. Notons

   $$A = y_+ \cap \{n-s,...,n\}, B = y_+ \cap \{1,...,n-s-1\}$$

si $y = n$, A est vide ; sinon $A = \{y+1,...,n\}$.
Si $y \leq \varphi(1)$,B est vide ; sinon $B = \{k/\varphi(k) < y\} = \{1,...,j\}$ où $j = \max\{k/\varphi(k) < y\}$.
Là encore $(A,\rightarrow)$ et $(B,\rightarrow)$ sont transitifs et $a \rightarrow b\, \forall\, a \in A, \forall\, b \in B$
en effet, $b \in B \Rightarrow \varphi(b) < y \Rightarrow \varphi(b) < a\, \forall\, a \in A$. Ce qui prouve la transitivité de y_+.
Passons à y_- et posons

$$A = y_- \cap \{1,...,n-s-1\} = \{j+1,...,n-s-1\}$$

où $j = \max\{k/\varphi(k) < y\}$
(A est vide si $j = n-s-1$)

$$B = y_- \cap \{n-s,...,n\} = \{n-s,...,y-1\}.$$

$a \in A \Rightarrow j < a \Rightarrow y \leq \varphi(a) \Rightarrow b \leq \varphi(a) \Rightarrow a \rightarrow b, \quad \forall\, b \in B$ Ce qui prouve la transitivité de y_- et termine la preuve de 1).

2. On a vu plus haut que pour $y \in \{1,...,n-s-1\}$

$$y_+ = \{k; y+1 \leq k \leq \varphi(y)\}.$$

Ceci implique $\varphi(y)$ est le plus grand indice de joueur battu par y (dans l'indexation triviale de $\{1,...,n\}$) ; par suite φ est la fonction caractéristique du tournoi l.t qui lui est attaché.

■

Corollaire 1. *L'ensemble des types de tournois l.t. pointé $(S,\mathcal{R},x)$ tels que $s(x) = s$ est en bijection avec l'ensemble des applications croissantes de $\{1,...,n-s-1\}$ dans $\{n-s,...,n\}$.*

Remarque 1. *Le corollaire précédent permet d'énumérer les tournois l.t à isomorphisme de tournoi-pointés prs, par ailleurs pour un même tournoi l.t $(S,\mathcal{R})$, les fonctions caractéristiques relatives à deux points distincts x et x' sont égales si et seulement il existe un automorphisme de tournois qui envoie x sur x'. Cette question fait l'objet du paragraphe suivant*

3 Construction des tournois l.t périodiques

3.1 Symétries et périodicité

Soit S un ensemble de cardinal n fixé, (par exemple $S = \{1,2,...,n\}$). Une structure $\mathcal{R}$ de tournoi l.t non transitif permet de définir une application

$$\pi : S \rightarrow S, \pi(x) = \max(x_+).$$

Ceci a un sens puisque x_+ est totalement ordonnée par $\mathcal{R}$.
$\pi(x)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} x \rightarrow \pi(x) \\ \pi(x)\mathcal{R}y, \forall\, y \in x_+. \end{cases}$$

On dira aussi que $\pi(x)$ est le successeur de x.

On étend cette définition au cas d'un tournoi transitif $(S,\mathcal{R})$, en décrétant que $\pi(x) = \max(S,\mathcal{R})$ si $x_+ = \emptyset$.

L'application π est une bijection de S qu' on appellera "successeur" et on voit, sur l'indexation canonique relative à un point arbitraire, que le groupe $\langle\pi\rangle$ est d'ordre n et opère transitivement sur S.

Appelons vecteur-score circulaire la suite des scores (déterminée à permutation circulaire près)

$$\big(s(x), s(\pi(x)), ..., s(\pi^{n-1}(x))\big), x \in S.$$

Proposition 2. *Deux tournois l.t sont isomorphes si et seulement si ils ont le même vecteur-score circulaire.*

Preuve.Soit $(S,\mathcal{R})$ et $(S',\mathcal{R}')$ deux tournois l.t ayant le même vecteur-score circulaire. choisissons $x \in S$ et $x' \in S'$ tel que

$$\big(s(x), s(\pi(x)), ..., s(\pi^{n-1}(x))\big) = \big(s(x'), s(\pi(x')), ..., s(\pi^{n-1}(x'))\big)$$

et posons $s = s(x) = s(x')$. Les sous-tournoi x_- et x'_- sont

$$x_- : \pi^{s+1}(x) \to \pi^{s+2}(x) \to ... \to \pi^{n-1}(x)$$

$$x'_- : \pi^{s+1}(x) \to \pi^{s+2}(x) \to ... \to \pi^{n-1}(x)$$

Ce qui montre que les fonctions caractéristiques de $(S,\mathcal{R},x)$ et $(S',\mathcal{R}',x')$ sont les mêmes et les tournois sont donc isomorphes (proposition 1). ∎

Proposition 3. *Soit $(S,\mathcal{R})$ un tournoi l.t. Le groupe des automorphismes de $(S,\mathcal{R})$ est formé les bijections π^k, $k \in \mathbb{Z}$, qui conservent le vecteur-score circulaire.*

$$Aut(S,\mathcal{R}) = \{\pi^k, k \in \mathbb{Z}, s(\pi^k(x)) = s(x), \forall x \in S\}.$$

Preuve.Notons d'abord que tout automorphisme f de (S,R) commute avec π ; en effet on a

$$\begin{aligned} \forall\, x \in S, f(x_+) &= (f(x))_+ \Longrightarrow f(\pi(x)) = f(\max(x_+)) \\ &= \max(f(x_+)) = \pi(f(x)). \end{aligned}$$

Soit $f \in Aut(S,R)$. Choisissons $x \in S$, et notons $y = f(x)$.

Comme S est une orbite de π, il existe $k \in \mathbb{N}$; $y = \pi^k(x)$. On a donc $f(x) = \pi^k(x)$. Montrons que $f = \pi^k$.

Soit $z \in S$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$; $z = \pi^\ell(x)$ on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\pi^\ell(x)) \\ &= \pi^\ell(f(x)) = \pi^\ell(\pi^k(x)) \\ &= \pi^k(\pi^\ell(x)) = \pi^k(z) \end{aligned}$$

Cela prouve l'inclusion $\mathrm{Aut}(S,\mathcal{R}) \subset \langle\pi\rangle$.

Par ailleurs, supposons que π^ℓ conserve le score et soit $x \in S$ dont le score est différent de 0 et de $n-1$. Notons $x' = \pi^\ell(x)$ et utilisons les indexations canoniques respectives à x et x'.

On a :

$$\sigma_i = \pi^{i-1}(\sigma_1) = \pi^{i-1}(\pi^{s-n+1}(x)) = \pi^{i+s-n}(x)$$

$$\sigma_i' = \pi^{i+s-n}(x') = \pi^{i+s-n}(\pi^\ell(x))$$

de sorte que $\sigma_i' = \pi^\ell(\sigma_i), \forall\, i \in \{1, ..., n\}$. Par conséquent

$$\chi(i) = i + s(\sigma_i) = i + s(\sigma_i') = \chi'(i).$$

Comme π^ℓ commute aux indexations canoniques, alors $\pi^\ell : (S,R,x) \to (S,R,x')$ est un isomorphisme de tournois pointés et $\pi^\ell \in$Aut$(S, \mathcal{R})$. ∎

Remarque 2. *Plus généralement, une fonction $f : (S,R) \to (S,R')$ est un isomorphisme de tournois l.t. si et seulement si f commute avec les applications successeur et conserve les scores.*

Corollaire 2. *Le groupe des automorphismes d'un tournoi l.t $(S, \mathcal{R})$ est cyclique, son ordre est impair et divise le cardinal de S.*

Preuve.Comme $\langle\pi\rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il en découle que Aut$(S,R)$ est cyclique d'ordre d divisant n. Le fait que d soit impair résulte de ce qu'un tournoi n'a pas d'automorphisme d'ordre 2. ∎

Exemples

1. Si $(S, \mathcal{R})$ est transitif alors Aut$(S, \mathcal{R}) = \{id\}$
2. pour $n = 3$ et $\mathcal{R}$ le 3-cycle Aut $(S, \mathcal{R}) = \langle\pi\rangle \sim \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
3. Plus généralement pour n impair, le n-cycle sur $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ défini dans [3] par :

$$(x_i \to x_j) \Longleftrightarrow (0 \leq j - i \leq \frac{n-1}{2})$$

   est localement transitif, son groupe d'automorphisme est $\langle\pi\rangle$ et tous ses joueurs ont le même score.

3.2 Construction

Soit ℓ un diviseur de n tel que $d = \frac{n}{\ell}$ est impair. Un tournoi l.t. $(S, \mathcal{R})$ est dit ℓ-périodique si la bijection $\pi^\ell : S \longrightarrow S$ est un automorphisme de tournois ; l'ordre de π^ℓ est alors égal à d.

Exemples

- tout tournoi l.t. à n joueurs est n-périodique, puisque $\pi^n = id_S$.
- les cycles sont 1-périodique.

Un tournoi à n joueur est dit périodique s'il admet une période $\ell < n$. Autrement dit s'il admet un automorphisme non trivial. Le plus petit entier n, pour lequel on peut obtenir un tournoi périodique qui ne soit pas un n-cycle est $n = 6$. Dans ce cas $\ell = 2$, et on a une représentation avec un vecteur-score circulaire $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ tel que

$$s_1 = s_3 = s_5 = a \quad \text{et} \quad s_2 = s_4 = s_6 = b.$$

Comme la somme des score est $\frac{6\times 5}{2} = 15$, on doit avoir $a + b = 5$.

Le cas $a = 4$ et $b = 1$ ne correspond pas à une fonction χ croissante et il reste le cas $(3,2)$ (ou (2,3) c'est pareil).
Considérons la fonction $\chi : \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ qui envoie 1 et 2 sur 4 et envoie 3 sur 6. Elle est croissante et définit bien un tournoi l.t sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ qui vérifie

$$s(1) = \chi(1) - 1 = 3,\ s(2) = \chi(2) - 2 = 2,\ \ s(3) = \chi(3) - 3 = 3.$$

Les scores des éléments restant sont alors

$$s(4) = 2 + \#\{i|\chi(i) < 4\} = 2, \quad s(5) = 1 + \#\{i|\chi(i) < 5\} = 3$$

et $s(6) = \#\{i|\chi(i) < 6\} = 2$.
Comme π^2 conserve les scores, c'est un automophisme de (S,R) et puisque π ne l'est pas, $Aut(S,R) = \langle \pi^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En fait, on obtient tous les tournois ℓ-périodiques de la manire suivante

1. On part d'un tournoi localement transitif à ℓ joueurs et on détermine le vecteur-score circulaire $(s(x), s(\pi(x)), \ldots, s(\pi^{\ell-1}(x))$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n = \ell.(2p+1)$, on considère la suite $(s_1, \ldots, s_n)$ ℓ-périodique dont les ℓ premiers termes sont

   $$s_i = p.\ell + s(\pi^{i-1}(x)) \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, \ell\}$$

   (le reste des termes étant déterminé par périodicité).
   Alors $(s_1, \ldots, s_n)$ est le vecteur-score circulaire d'un unique type de n-tournoi l.t qui soit ℓ-périodique.

Exemples
Pour $\ell = 2$, un tournoi à deux joueurs est de la forme $x \to y$. Le vecteur-score circulaire est (1,0), ou encore (0,1).

- Si on prend $p = 1$ on obtient $n = 6$ et

$$(s_1, s_2, \ldots, s_6) = (3,2,3,2,3,2) \quad \text{ou } (2,3,2,3,2,3))$$

ce qui revient au même. C'est l'exemple recontré plus haut.

- Si on prend $p = 2$ on obtient $n = 10$ et

$$(s_1, \ldots, s_{10}) = (5,4,5,4,5,4,5,4,5,4).$$

Le reste de ce paragraphe est consacré à la justification du procédé décrit plus haut.

Revenons à l'indexation canonique d'un tournoi pointé (S,R,x) et à la fonction caractéristique associée

$$\chi : \{1,...,\ell-s-1\} \to \{\ell-s,...,\ell\}.$$

L'application

$$\chi_1 : \{\ell-s,...,\ell\} \to \{0,1,...,\ell-s-1\},$$

associant à tout joueur $\sigma_i \in x_+$ le nombre de joueurs de x_- battus par σ_i, est croissante.

L'application

$$\widetilde{\chi} : \{1,...,\ell\} \to \mathbb{N}$$

$\widetilde{\chi}(i) = s(\sigma_i) + i$ est relié à χ et χ_1 par :

$$1 \leq i \leq \ell-s-1 \Rightarrow \widetilde{\chi}(i) = \chi(i)$$

$$\ell-s \leq i \Rightarrow \widetilde{\chi}(i) = \ell + \#\{k < \ell-s-1; \sigma_i \to \sigma_k\} = \ell + \chi_1(i).$$

Il est découle que $\widetilde{\chi}$ est croissante, $\widetilde{\chi}(\ell) \leq \ell+\ell-s-1 = 2\ell-s-1$ et

$$\widetilde{\chi}(1) = \chi(1) \geq \ell-s.$$

L'image de $\widetilde{\chi}$ est alors $\{\ell-s,...,2\ell-s-1\}$ et on a

$$1 \leq i \leq \ell-s-1 : \chi(i) < j \Leftrightarrow \sigma_j \text{ bat } \sigma_i$$

$$\widetilde{\chi}(\ell-s) = \ell$$

$$\ell-s \leq i \leq \ell : \widetilde{\chi}(i) < \ell+j \Leftrightarrow \sigma_j \text{ bat } \sigma_i$$

Ajoutons ces conventions :

• Le ℓ-tournoi transitif pointé au joueur de score nul correspond à l'unique fonction $\chi : \{1,...,\ell-1\} \to \{\ell\}$

• Le ℓ-tournoi transitif pointé au joueur de score $\ell-1$ correspond à l'inclusion $\chi : \emptyset \subset \{1,...,\ell\}$.

Théorème 2. *Soit $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$, $s \in \{0,...,\ell-1\}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n = \ell(2p+1)$.*
A toute application croissante $\chi : \{1,...,\ell-s-1\} \to \{\ell-s,...,\ell\}$ on associe l'application

$$\chi_p : \{1,...,p\ell+\ell-s-1\} \to \{p\ell+\ell-s,...,\ell(2p+1)\}$$

déterminée par les deux conditions suivantes.

i) χ_p coincide avec $\widetilde{\chi}+p\ell$ sur l'intervalle $\{1,...,\ell\}$.

ii) L'application $i \to \chi_p(i)-i$ est ℓ-périodique.

Alors :

1. *L'application χ_p est croissante. Le type de n-tournoi pointé associé à χ_p est ℓ-périodique.*
2. *Tout n-tournoi ℓ-périodique s'obtient par ce procédé. L'ensemble des types de n-tournois (resp pointés) ℓ-périodiques est en bijection avec l'ensemble des types de ℓ-tournois (resp pointés).*

Preuve.

1. La restriction $\widetilde{\chi}+p\ell$ de χ_p à l'intervalle $\{1,..,\ell\}$ est croissante.

on a

$$\chi_p(1)=\chi(1)+p\ell \geq p\ell+\ell-s$$

$$\chi_p(p\ell+\ell-s-1)=p\ell+\chi_p(\ell-s-1)=2p\ell+\chi(\ell-s-1)\leq(2p+1)\ell$$

la propriété $\chi_p(i+\ell)=\chi_p(i)+\ell$ assure que χ_p est croissante sur chaque intervalle $\{1+k\ell,\ldots,\ell+k\ell\}$ et sur le dernier intervalle $\{1+p\ell,\ldots,p\ell+\ell-s-1\}$.

Pour les valeurs de χ_p aux extrémités d'intervalles consécutifs, on a :

$$\chi_p(\ell)<\chi_p(\ell+1).$$

En effet

$$\chi_p(\ell)=\widetilde{\chi}(\ell)\leq 2\ell-s-1$$

$$\chi_p(\ell+1)=\chi(1)+\ell\geq 2\ell-s.$$

Il s'ensuit, par périodicité, que

$$\chi_p(k\ell)=(k-1)\ell+\chi_p(\ell)<(k-1)\ell+\chi_p(\ell+1)=\chi_p(k\ell+1)\quad (k\in\{1,\ldots,p\}.$$

Finalement χ_p est bien définie et est croissante. χ_p définit un tournoi sur $\{1,\ldots,\ell(2p+1)\}$ pointé au point $p\ell+\ell-s$ de score $p\ell+s$. La condition (ii) affirme exactement que la restriction de la fonction score à l'intervalle $\{1,\ldots,p\ell+\ell-s-1\}$ est ℓ-périodique.

Il en découle que sa restriction à l'intervalle

$$\{p\ell+\ell-s,\ldots,(2p+1)\ell\}$$

est aussi ℓ-périodique ; en effet pour

$$p\ell+\ell-s\leq i\leq i+\ell\leq(2p+1)\ell$$

on a

$$\widetilde{\chi}_p(i)=(2p+1)\ell+\max\{k<p\ell+\ell-s;\chi_p(k)<i\}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}_p(i+\ell) &= (2p+1)\ell+\max\{k<p\ell+\ell-s;\chi_p(k)<i+\ell\}\\ &= \widetilde{\chi}_p(i)+\ell(\text{ d'après } \chi_p(k+\ell)=\chi_p(k)+\ell) \text{ et } \chi_p \text{ croissante })\end{aligned}$$

Reste le point le plus délicat où i et $i+\ell$ ne sont pas dans un même intervalle $(p\ell+\ell-s)_-$ ou $(p\ell+\ell-s)_+$. C'est le cas où $p\ell-s\leq i\leq p\ell+\ell-s-1$.

1er Cas

$p\ell-s\leq i\leq p\ell$ alors $i+\ell\leq(p+1)\ell$ or on sait que $\widetilde{\chi}(\ell-s)=\ell$ et par suite $\chi_p(\ell-s)=(p+1)\ell$ d'où

$$\max\{k|\chi_p(k)<i+\ell\}<\ell-s$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}_p(i+\ell) &= (2p+1)\ell+\max\{k|\chi_p(k)<i+\ell\}\\ &= (2p+1)\ell+\max\{k<\ell-s/p\ell+\chi(k)<i+\ell\}\\ &= (2p+1)\ell+\max\{k<\ell-s/\chi(k)<i+\ell-p\ell.\end{aligned}$$

Notons que, dans ce cas, on a $\ell - s \leq i + \ell - p\ell \leq \ell$ et

$$\tilde{\chi}(i+\ell-p\ell) = \ell + \max\{k < \ell - s/\chi(k) < i + \ell - p\ell\}.$$

Donc

$$\widetilde{\chi}_p(i+\ell) = 2p\ell + \widetilde{\chi}(i+\ell-p\ell)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \chi_p(i) &= (p-1)\ell + \chi_p(i - p\ell + \ell) \\ &= (p-1)\ell + p\ell + \widetilde{\chi}(i - p\ell + \ell). \end{aligned}$$

D'o

$$\widetilde{\chi}_p(i+\ell) = \chi_p(i) + \ell.$$

2eme cas

$$p\ell < i \leq p\ell + \ell - s - 1 \Rightarrow p\ell + \ell < i + \ell \leq p\ell + 2\ell - s - 1$$

$\Rightarrow \ell - s \leq Max\{k|\chi_p(k) < i + \ell\} \leq \ell$ (car $\chi_p(\ell+1) = \ell + \chi_p(1) \geq \ell + p\ell + \ell - s$)

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}_p(i+\ell) &= (2p+1)\ell + \max\{k \in \{\ell - s, \ldots, \ell\}; \chi_p(k) < i + \ell\} \\ &= (2p+1)\ell + \max\{k \in \{\ell - s, \ldots, \ell\}, p\ell + \widetilde{\chi}(k) < i + \ell\} \\ &= (2p+1)\ell + \max\{k \in \{\ell - s, \ldots, \ell\}; \widetilde{\chi}(k) < i + \ell - p\ell \\ &= (2p+1)\ell + \max\{k \in \{\ell - s, \ldots \ell\}/i - p\ell \to k\} \\ &= (2p+1)\ell + \chi(i - p\ell) = (p+1)\ell + \chi_p(i - p\ell) \\ &= \ell + \chi_p(i) = \ell + \widetilde{\chi}_p(i) \end{aligned}$$

D'où la périodicité du tournoi associé à χ_p. 2.Considérons un tournoi canonique sur $\{1, \ldots, n\}$ qui soit ℓ-périodique. Notons m le minimum des scores des joueurs et M le maximum. On a $0 \leq M - m < \ell$. En effet, grâce à la périodicité de la fonction score, on peut supposer que $m = s(i)$ et $M = s(j)$ avec $i \leq \ell$ et $i < j < i + \ell$. On a $s(j) + j \leq s(i+\ell) + i + \ell = s(i) + i + \ell$ donc $s(j) < s(i) + \ell$.
Il s'ensuit que, pour tout $x \in \{1, \ldots, n\}$, la différence des cardinaux de x_+ et x_- est strictement inférieur àℓ, d'où

$$p\ell \leq s(x) \leq p\ell + \ell - 1.$$

Donc tout n-tournoi pointé ℓ-périodique est défini par une application qu'on notera $\chi_{(p)}$

$$\chi_{(p)} : \{1, \ldots, p\ell + \ell - s - 1\} \to \{p\ell + \ell - s, \ldots, n\}$$

où $0 \leq s \leq \ell - 1$.

Soit $\chi : \{1, \ldots, \ell - s - 1\} \to \mathbb{N}$, définie par $\chi(i) = \chi_(p)(i) - p\ell$. On remarque que $\chi(1) \geq \ell - s$ et que $\chi(\ell - s - 1) \leq \ell$. En effet

$$\begin{aligned} \chi(\ell - s - 1) &= \chi_(p)(\ell - s - 1) - p\ell \\ &= \chi_(p)(p\ell + \ell - s - 1) - 2p\ell \leq n - 2p\ell = \ell \end{aligned}$$

L'application χ est croissante car $\chi_(p)$ l'est. Ainsi χ définit un tournoi pointé canonique sur $\{1, \ldots, \ell\}$.

Reste à vérifier que $\chi(p)$ coincide avec la fonction $\widetilde{\chi}+p\ell$ sur l'intervalle $\{1,\ldots,\ell\}$

Comme le vecteur score de $\chi(p)$ est périodique et que le score de $p\ell+\ell-s$ est égal à $p\ell+s$ on en déduit que le score (par $\chi(p)$) de $\ell-s$ est aussi $p\ell+s$ d'où

$$\widetilde{\chi}(\ell-s)=\ell=\chi_{(p)}(\ell-s)-p\ell$$

Soit i, $\ell-s<i\leq\ell$

$$\begin{aligned}\chi_{(p)}(i) &= -p\ell+\chi_{(p)}(i+p\ell)\\ &= -p\ell+n+\max\{k|\chi_{(p)}(k)<i+p\ell\}\\ &= -p\ell+n+\max\{k<\ell-s/\chi_{(p)}(k)<i+p\ell\}\\ &= -p\ell+n+\max\{k<\ell-s/\chi(k)<i\}\\ &= -p\ell+n-\ell+\widetilde{\chi}(i)=p\ell+\widetilde{\chi}(i).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\chi(p)$ coincide avec la fonction χ_p associée à χ sur $\{1,\ldots,\ell\}$ et par périodicité, on a $\chi(p)=\chi_p$. Ce qui établit la bijection entre ℓ-tournois pointés canoniques et n-tournois pointés ℓ-périodiques. Pour la bijection entre types de ℓ-tournois et types de n-tournois ℓ-périodiques, signalons que tout type de tournoi est déterminé par son vecteur score. ■

Corollaire 3. *Soit un entier $n\geq 2$. Pour tout diviseur impair d de n, il existe un n-tournoi dont le groupe d'automorphismes est cyclique d'ordre d.*

Preuve.Si $d=n$, on considre le n-cycle.

Si $d<n$, on pose $\ell=\frac{n}{d}$. Le n-tournoi périodique construit à partir du ℓ-tournoi transitif admet ℓ comme plus petite période et son groupe d'automorphismes est engendré par π^{ℓ}. ■

4 Enumération des types de tournoi l.t

Soit S un ensemble de cardinal $n\geq 3$. On note $\mathcal{T}_0(S)$ ou encore $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des types de tournoi-pointés localement transitif définis sur S et $\mathcal{T}(S)$ ou encore $\mathcal{T}$ l'ensemble des types de tournoi localement transitifs (sur S).

Proposition 4. *Le cardinal de $\mathcal{T}_0$ est 2^{n-1}.*

Preuve.Soit $s\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. On note $M(s)$ le nombre de types de tournois localement transitifs pointés $(S,\mathcal{R},x)$ où le score de x est s.

• Si $s=n-1$ ou $s=0$, on a vu précédemment qu'un tel tournoi est transitif et qu'il n'y a qu'un seul. Donc $M(n-1)=M(0)=1$.

• Si $s\in\{1,\ldots,n-2\}$, d'après le corollaire 1, $M(s)$ n'est autre que le nombre d'applications croissantes de $\{1,\ldots,n-s-1\}$ dans $\{n-s,\ldots,n\}$. Or ce dernier est bien connu, il est égal à $\begin{pmatrix} n-1\\ n-s-1\end{pmatrix}$. On obtient alors le résultat en remarquent que $\begin{pmatrix} n-1\\ n-s-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n-1\\ s\end{pmatrix}$ et que $1+1+\sum_{s=1}^{n-2}\begin{pmatrix} n-1\\ s\end{pmatrix}=2^{n-1}$ ■

Proposition 5. *a) Le groupe $\mathbb{Z}_n$ opère sur $\mathcal{T}_0$ par la formule :*

$$(k,[(S,\mathcal{R},x)]) \to [(S,\mathcal{R},\pi^k(x))]$$

le crochet désignant la classe d'isomorphisme.

b) L'ensemble $\mathcal{T}$ est le quotient de $\mathcal{T}_0$ par cette action.

Preuve.a) Si $f:(S,\mathcal{R},x) \longrightarrow (S',\mathcal{R}',x')$ est un isomorphisme de tournois l.t pointés alors f envoie le successeur de x sur celui de x' et par suite $f:(S,\mathcal{R},\pi^k(x)) \longrightarrow (S',\mathcal{R}',\pi^k(x'))$ est un isomorphisme de tournois l.t pointés.

b) le foncteur "oubli" : $(S,\mathcal{R},x) \to (S,\mathcal{R})$, transforme deux tournois pointés isomorphes en deux tournois isomorphes et induit une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_0 & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ [(S,\mathcal{R},x)] & \longmapsto & [(S,\mathcal{R})] \end{array}.$$

Soient $(S,\mathcal{R},x)$ et $(S,\mathcal{R}',x')$ deux tournoi pointés tels que $[(S,\mathcal{R})] = [(S,\mathcal{R}')]$. Il existe, alors, un isomorphisme de tournois

$$f:(S,\mathcal{R}) \to (S,\mathcal{R}')$$

; f induit un isomorphisme de tournoi-pointés entre $(S,\mathcal{R},x)$ et $(S,\mathcal{R}',f(x))$. Ainsi

$$[(S,\mathcal{R},x)] = [(S,\mathcal{R}',\pi^k(x))] = \pi^k([(S,\mathcal{R},x')]),$$

avec $k \in \mathbb{Z}_n$ vérifiant $f(x) = \pi^k(x')$. ■

Proposition 6. *Le type du tournoi pointé $(S,\mathcal{R},x)$ est fixé par k si et seulement si $\pi^k \in Aut(S,\mathcal{R})$ i.e $\mathcal{R}$ est k-périodique.*

Preuve.Un isomorphisme de tournoi pointés $f:(S,\mathcal{R},x) \to (S,\mathcal{R},\pi^k(x))$ est un automorphisme de $(S,\mathcal{R})$ tel que $f(x) = \pi^k(x)$. Or on a vu que $f \in \langle\pi\rangle$ donc il existe ℓ tel que $f = \pi^\ell$. Comme $f(x) = \pi^k(x) = \pi^\ell(x)$, on trouve que n divise $k-\ell$ d'où $f = \pi^k$. ■

Les trois propositions précédentes fournissent une preuve " à la Burnside" de la formule de A. E. Brouwer

$$N = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \varphi(d) 2^{\frac{n}{d}-1}.$$

où N est le nombre de types de n-tournois l.t. Ces propositions ont des analogues dans [1]. L'analogue de la proposition 4 est que toute classe de switch d'un n-tournoi contient 2^{n-1} tournois distincts. L'analogue de la proposition 5 est que le groupe de chaque classe de switch d'un n-tournoi transitif est cyclique d'ordre n et l'ensemble des orbites s'identifie à l'ensemble des types de n- tournois l.t ([1] lemme 3.3). L'analogue de la proposition 6 est le lemme 3.1.

Références

[1] L.Babai and P. J. Cameron, Automorphisms and enumeration of switching classes of tournament. *Electron. J. Combin.* **7** (2000), 1-25.

[2] N. Cohen, M. Paredes y S. Pinzón, Locally transitive tournaments and the classification of (1,2)-symplectic : metrics on maximal flag manifolds. *Illinois J. Math.* **48** (2004), no. 4, 1405 - 1415.

[3] J. W. Moon, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York-Montreal, 1968.

[4] N. J. A. Sloane, On single- deletion- correcting codes.Codes and Designs, Ohio State University, May 2000 (Ray-Chaudhuri Festschrift), K. T. Arasu and A. Seress (editors), Walter de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 273-291.