Communications in Mathematical Analysis
Volume 3, Number 2, pp. 83–97, 2007
Procceedings of the 15th Symposium of
The Tunisian Mathematical Society
held in Sousse, March 19-22, 2007 *www.commun-math-anal.org*
ISSN 1938-9787

LES TOURNOIS (-1)-CRITIQUES

HOUMEM BELKHECHINE*
Faculté des Sciences de Gabès, Cité Riadh, Zirig 6072 Gabès, Tunisie

IMED BOUDABBOUS†
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax,
route Menzel Chaker Km 0.5 - 3018 Sfax,Tunisie

JAMEL DAMMAK‡
Faculté des Sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie

(Communicated by Said Zarati)

Résumé

Étant donné un tournoi $T = (S,A)$, une partie X de S est un intervalle de T lorsque pour tous $a,b \in X$ et $x \in S-X$, $(a,x) \in A$ si et seulement si $(b,x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}(x \in S)$ et S sont des intervalles de T, appelés intervalles triviaux. Un tournoi, dont tous les intervalles sont triviaux, est indécomposable ; sinon, il est décomposable. Un sommet x d'un tournoi indécomposable T est critique si le tournoi $T - x$ est décomposable. En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont caractérisé les tournois dont tous les sommets sont critiques, appelés tournois critiques. Ces tournois ont un cardinal impair ≥ 5. Pour chaque entier impair $m \geq 5$, il existe trois tournois critiques de cardinal m. Dans cet article, nous caractérisons les tournois qui admettent un unique sommet non critique, que nous appelons tournois (-1)-critiques. Ces tournois ont un cardinal impair ≥ 7. Pour chaque entier impair $m \geq 7$, il existe $3m-15$ tournois (-1)-critiques de cardinal m.

Mots clés : Critique, Graphe d'indécomposabilité, Intervalle, Tournoi Indécomposable.

Abstract

The (-1)-critical tournaments. Given a tournament $T = (V,A)$, a subset X of V is an interval of T provided that for any $a,b \in X$ and $x \in V - X$, $(a,x) \in A$ if and only if $(b,x) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}(x \in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament, all the intervals of which are trivial, is indecomposable; otherwise, it is decomposable. A vertex x of an indecomposable tournament is critical if $T - x$ is decomposable. In 1993, J.H. Schmerl and W.T. Trotter characterized the tournaments, all the vertices of which are critical, called critical tournaments. The cardinality of

*E-mail address : houmem@gmail.com
†E-mail adress : imed.boudabbous@gmail.com
‡E-mail : jdammak@yahoo.fr

these tournaments is odd. Given an odd integer $m \geq 5$, there exist three critical tournaments of cardinality m. and there are exactly three critical tournaments for each such a cardinality. In this article, we characterize the tournaments which admit a single non critical vertex, that we call (-1)-critical tournaments. The cardinality of these tournaments is odd. Given an odd integer $m \geq 7$, there exist $3m-15$ (-1)-critical tournaments of cardinality m.

1 Introduction

Un *graphe* (*orienté*) $G = (S(G), A(G))$ ou (S, G), est constitué d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de G. L'*ordre* (ou le *cardinal*) du graphe G est le nombre de ses sommets. À chaque partie X de S est associé le *sous-graphe* $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de G induit par X. Pour $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), le graphe $G(S-X)$, où $S - X = \{s \in S : s \notin X\}$, (resp. $G(S - \{x\})$ est noté $G - X$ (resp. $G - x$). Étant donnés deux graphes $G = (S,A)$ et $G' = (S,A')$, une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de G sur G' si pour tous x, $y \in S$, $(x,y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont *isomorphes*, et on note $G \simeq G'$.

Un graphe $G = (S,A)$ est un *tournoi* lorsque pour tous $x \neq y \in S$, on a: $(x,y) \in A$ si et seulement si $(y,x) \notin A$. Étant donné un tournoi $T = (S,A)$, pour tous sommets distincts x, y de S, la notation $x \longrightarrow y$ signifie $(x,y) \in A$, et on dit, dans ce cas, que x domine y. Pour toutes parties disjointes I et J de S, on note $I \longrightarrow J$ lorsque pour tout $(x,y) \in I \times J$, $x \longrightarrow y$. La notation $I \sim J$ signifie que $I \longrightarrow J$ ou $J \longrightarrow I$. De même, pour tout $x \in S$ et pour tout $Y \subseteq S - \{x\}$, $x \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow x$) signifie $x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$) pour tout $y \in Y$. La notation $x \sim Y$ signifie que $x \longrightarrow Y$ ou $Y \longrightarrow x$. Pour tout $x \in S$, on pose $V_T^-(x) = \{y \in S : y \longrightarrow x\}$ et $V_T^+(x) = \{y \in S : x \longrightarrow y\}$. On introduit une relation d'équivalence, notée $\equiv$, sur les couples de sommets distincts de T, définie comme suit: $(x,y) \equiv (u,v)$ si $(x,y) = (u,v)$ ou $| \{(x,y),(u,v)\} \cap A | \neq 1$.

Un tournoi T est un *ordre total* (ou une *chaîne*, ou une *liste*), lorsque pour tous $x,y,z \in S(T)$, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow z$, alors $x \longrightarrow z$. Un ordre total d'ordre k est aussi appelé *k-chaîne*. Pour deux sommets distincts a et b d'un ordre total T, $a < b$ signifie $a \longrightarrow b$. La notation $T = a_0 < \cdots < a_n$ signifie que T est l'ordre total défini sur $S = \{a_0, \cdots, a_n\}$ par $A(T) = \{(a_i, a_j) : i < j\}$. L'ordre total usuel $0 < \cdots < n$ est noté L_{n+1}.

À tout tournoi $T = (S,A)$ est associé son tournoi *dual* $T^\star = (S, A^\star)$, où $A^\star = \{(x,y) : (y,x) \in A\}$.

Étant donné un tournoi $T = (S,A)$, une partie I de S est un *intervalle* [4, 5, 7] (ou un *clan* [3]) de T lorsque pour $a,b \in I$ et $x \in S - I$, $(a,x) \equiv (b,x)$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* [5, 7] (ou *primitif* [3]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire.

Un sommet x d'un tournoi indécomposable T est dit *critique* si le tournoi $T - x$ est décomposable. Soit T un tournoi indécomposable à au moins 5 sommets. Le tournoi T est dit *critique* si tous ses sommets sont critiques. On généralise cette définition en disant que le tournoi T est $(-k)$-*critique* lorsqu'il admet exactement k sommets non critiques. Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, nous introduisons, pour tout entier $n \geq 1$, les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\{0,\cdots,2n\}$ comme suit.

1. $A(T_{2n+1}) = \{(i,j) : j-i \in \{1,\cdots,n\} \ mod.\ 2n+1\}$.

2. U_{2n+1} est le tournoi obtenu à partir de l'ordre total L_{2n+1} en inversant les arcs reliant deux sommets pairs, de sorte que $A(U_{2n+1}) = \{(i,j) : i < j$ et i ou j est impair $\} \cup \{(i,j) : i > j$ et i et j sont pairs$\}$.

3. $V_{2n+1}(\{0,\cdots,2n-1\}) = 0 < \cdots < 2n-1$ et $V^+_{V_{2n+1}}(2n) = \{2i : i \in \{0,\cdots,n-1\}\}$.

Remarquons que $T_3 = U_3 = V_3 = \{\{0,1,2\},\{(0,1),(1,2),(2,0)\}\}$.

Proposition 1.1. (J. H. Schmerl et W. T. Trotter [7]) *À un isomorphisme près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

Dans cet article, nous caractérisons les tournois (-1)-critiques, répondant ainsi, dans le cas des tournois, à une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille [2]. Contrairement aux tournois T_{2n+1}, les tournois U_{2n+1} et V_{2n+1} apparaissent dans la morphologie de ces tournois que nous présentons à partir de leur unique sommet non critique. A cet effet, nous définissons pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout entier $k \in \{1,\cdots,n-2\}$, les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} et H^{2k+1}_{2n+1} définis sur $\{0,\cdots,2n\}$ comme suit.

1. $E^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = L_{2k+1}$, $E^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = 2k+2 < \cdots < 2n$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs.

2. $F^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = U_{2k+1}$, $F^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = 2k+2 < \cdots < 2n$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs.

3. $G^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = U_{2k+1}$, $G^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \cdots < 2n-1$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et y est pair.

4. $H^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = V_{2k+1}$, $H^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \cdots < 2n-1$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et $y = 2k$.

Observons que dans les tournois $T = E^{2k+1}_{2n+1}$, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} ou H^{2k+1}_{2n+1} définis ci-dessus, chacun des sous-tournois $T(V^-_T(2k+1))$ et $T(V^+_T(2k+1))$ est ou bien une chaîne, ou bien un tournoi critique non isomorphe à un tournoi de la classe $\{T_{2p+1}\}_{p\geq 2}$. Les cardinaux respectifs de ces sous-tournois sont $2k+1$ et $2n-2k-1$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on désigne par $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), la classe des $n-2$ tournois $\{E^{2k+1}_{2n+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$ (resp. $\{F^{2k+1}_{2n+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{(F^{2k+1}_{2n+1})^\star\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{G^{2k+1}_{2n+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{(G^{2k+1}_{2n+1})^\star\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{H^{2k+1}_{2n+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$).

Remarquons alors le fait suivant.

Remarque 1.2. *Étant donné un entier $n \geq 3$, si T est un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_{2n+1}$), alors $T^\star$ est aussi un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_{2n+1}$)).*

Preuve. Il suffit de remarquer que pour $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, la permutation σ de $\{0, \cdots, 2n\}$ définie par : pour tout $q \in \{0, \cdots, 2n\}$, $\sigma(q) = 2n - q$ (resp. $\sigma(q) = 2n - q - 1$ si $q \in \{0, \cdots, 2n\} - \{2n, 2k, 2k+1\}$, $\sigma(2n) = 2(n-k-1)$, $\sigma(2k) = 2n$ et $\sigma(2k+1) = 2(n-k-1)+1$), est un isomorphisme de $(E_{2n+1}^{2k+1})^\star$ (resp. $(H_{2n+1}^{2k+1})^\star$) sur $E_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$ (resp. $H_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$). $\square$

La caractérisation suivante des tournois (-1)-critiques, est le principal résultat de cet article.

Théorème 1.3. *À un isomorphisme près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, $(F_{2n+1}^{2k+1})^\star$, G_{2n+1}^{2k+1}, $(G_{2n+1}^{2k+1})^\star$ et H_{2n+1}^{2k+1}, où $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-2$. De plus, le sommet $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

2 Tournois indécomposables

Définition 2.1. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi. À toute partie X de S telle que $\mid X \mid \geq 3$ et le sous-tournoi $T(X)$ est indécomposable, on associe les parties de $S - X$ suivantes.*

- $[X] = \{x \in S - X : x \sim X\}$.
- *Pour tout $u \in X$, $X(u) = \{x \in S - X : \{u, x\}$ est un intervalle de $T(X \cup \{x\})\}$.*
- *$Ext(X) = \{x \in S - X : T(X \cup \{x\})$ est indécomposable$\}$.*

Rappelons le lemme suivant.

Lemme 2.2. (A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg [3]) *Soient $T = (S, A)$ un tournoi et X une partie de S tels que $\mid X \mid \geq 3$ et $T(X)$ est indécomposable. La famille $\{X(u) : u \in X\} \cup \{Ext(X), [X]\}$ forme une partition de $S - X$. De plus, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- *Soient $u \in X$, $x \in X(u)$ et $y \in S - (X \cup X(u))$. Si $T(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $\{u, x\}$ est un intervalle de $T(X \cup \{x, y\})$.*
- *Soient $x \in [X]$ et $y \in S - (X \cup [X])$. Si $T(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $X \cup \{y\}$ est un intervalle de $T(X \cup \{x, y\})$.*
- *Soient $x \neq y \in Ext(X)$. Si $T(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $\{x, y\}$ est un intervalle de $T(X \cup \{x, y\})$.*

De ce lemme découle le résultat suivant.

Corollaire 2.3. (A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg [3])

Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable. Si X est une partie de S telle que $\mid X \mid \geq 3$, $\mid S - X \mid \geq 2$ et $T(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts x et y de $S - X$ tels que $T(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.

3 Graphe d'indécomposabilité

Rappelons d'abord qu'un graphe *symetrique* (ou *non orienté*) est un graphe G tel que pour tous $x \neq y \in S(G)$, on a : $(x,y) \in A(G)$ si et seulement si $(y,x) \in A(G)$. On considère alors que, dans un tel graphe G, $A(G)$ est un ensemble de paires de sommets distincts de $S(G)$, appelées *arêtes* de G. Par exemple, le *chemin* P_n de longueur $n-1$ et le *cycle* C_n de longueur $n \geq 3$ sont les graphes non orientés définis sur $\{0,\cdots,n-1\}$ de la façon suivante. Pour tous i, $j \in \{0,\cdots,n-1\}$, $\{i,j\}$ est une arête de P_n si $\mid i-j \mid = 1$. Le cycle C_n est alors obtenu à partir de P_n en ajoutant l'arête $\{0,n-1\}$. Tout graphe isomorphe à P_n (resp. C_n) est appelé chemin (resp. cycle). Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie sur $S(G)$ comme suit. Pour tous $x \neq y \in S(G)$, $x\ \mathcal{R}\ y$ s'il existe une suite $x_0 = x,\cdots,x_n = y$ de sommets de G telle que pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, $\{x_i,x_{i+1}\} \in A(G)$. les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont appelées *composantes connexes* de G. Pour tout sommet $x \in S(G)$, on pose $V_G(x) = \{y \in S$: $\{x,y\} \in A(G)\}$. Lorsque $V_G(x) = \emptyset$, on dit que x est un sommet *isolé* de G.

La notion de *graphe d'indécomposablité* à été introduite par P. Ille [1, 5] de la façon suivante. À chaque tournoi $T = (S,A)$ est associé son graphe d'indécomposabilité $I(T)$ défini sur S comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $\{x,y\}$ est une arête de $I(T)$ si $T-\{x,y\}$ est indécomposable. Ce graphe est un outil important dans notre construction des tournois (-1)-critiques.

Notons qu'un tournoi T et son dual $T^\star$ ont les mêmes intervalles. Il s'ensuit que T et $T^\star$ ont les mêmes sommets critiques ainsi que le même graphe d'indécomposabilité.

Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique.

Rappelons, d'adord, les deux lemmes suivants.

Lemme 3.1. (Y. Boudabbous et P. Ille [2]) *Soient $T = (S,A)$ un tournoi indécomposable et x un sommet critique de T. Alors $\mid V_{I(T)}(x) \mid \leq 2$ et on a:*

- *Si $V_{I(T)}(x) = \{y\}$, où $y \in S$, alors $T-\{x,y\}$ est un intervalle de $T-x$.*
- *Si $V_{I(T)}(x) = \{y,z\}$, où $y \neq z \in S$, alors $\{y,z\}$ est un intervalle de $T-x$.*

Lemme 3.2. (Y. Boudabbous et P. Ille [2]) *Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet une unique composante connexe de cardinal ≥ 2.*

Le lemme suivant précise l'ordre d'un tournoi (-1)-critique

Lemme 3.3. *L'ordre d'un tournoi (-1)-critique est impair et supérieur ou égal à 7.*

Preuve.

Les tournois à 4 sommets sont, à un isomorphisme près, au nombre de quatre et sont tous décomposables. Il s'ensuit que les tournois indécomposables à 5 sommets sont critiques. Ainsi, il n'existe aucun tournoi (-1)-critique d'ordre 5.

Soit T un tournoi indécomposable à au moins 3 sommets. Pour tout sommet x de T, il existe deux sommets $y \neq z$ de $T-x$ tels que $T(\{x,y,z\}) \simeq U_3$. En effet, autrement, il existe un sommet α de T tel que $V_T^-(\alpha) \longrightarrow V_T^+(\alpha)$. Si $\mid V_T^-(\alpha) \mid = \mid V_T^+(\alpha) \mid = 1$ alors $T \simeq L_3$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Sinon, $V_T^-(\alpha)$ ou $V_T^+(\alpha)$ est un intervalle non trivial de T, une contradiction. Supposons, à présent, que le tournoi T est (-1)-critique et désignons par a son unique sommet non critique. D'après ce qui précède, il existe deux sommets $b \neq c$ de $T-a$ tel que $T(\{a,b,c\}) \simeq U_3$. Si le tournoi T est d'ordre pair, alors par une suite finie d'applications du corollaire 2.3, on obtient un sommet $\omega \in S(T)-\{a\}$ tel que le tournoi $T-\omega$ est indécomposable. Contradiction.

□

Le résultat suivant complète le lemme 3.1 dans le cas des tournois (-1)-critiques.

Lemme 3.4. *Le sommet non critique a d'un tournoi* (-1)*-critique* $T=(S,A)$ *est tel que* $\mid V_{I(T)}(a) \mid = 2$.

Preuve. Comme $T-a$ est un tournoi indécomposable qui est, d'après le lemme 3.3, d'ordre pair, il s'ensuit que $T-a$ n'est ni critique ni (-1)-critique. Il existe alors deux sommets distincts $x, y \in S-\{a\}$ tels que les tournois $T-\{a,x\}$ et $T-\{a,y\}$ sont indécomposables. Ainsi $\{x,y\} \subseteq V_{I(T)}(a)$, de sorte que $\mid V_{I(T)}(a) \mid \geq 2$. Supposons que $\mid V_{I(T)}(a) \mid \geq 3$ et considérons 3 sommets deux à deux distincts x, y et z de $V_{I(T)}(a)$. On pose $X = S-\{a,x\}$, $Y = S-\{a,y\}$ et $Z = S-\{a,z\}$. Les tournois T, $T(X)$, $T(Y)$ et $T(Z)$ sont indécomposables avec, d'après le lemme 3.3, $\mid X \mid = \mid Y \mid = \mid Z \mid \geq 5$. Les tournois $T-x$, $T-y$ et $T-z$ étant décomposables, alors $a \notin Ext(X) \cup Ext(Y) \cup Ext(Z)$. Nous montrons d'abord qu'il existe $(u,v,w) \in X \times Y \times Z$ tel que $a \in X(u) \cap Y(v) \cap Z(w)$. Supposons, par exemple, qu'il n'existe pas un $u \in X$ tel que $a \in X(u)$, ce qui équivaut à dire, d'après le lemme 2.2, que $a \in [X]$. Quitte à remplacer T par $T^\star$, on peut supposer que $a \longrightarrow X$ et donc $x \longrightarrow a$. Remarquons que $a \notin [Y]$, sinon, comme $z \in X \cap Y$ et $a \longrightarrow X$, alors $a \longrightarrow Y$ et en particulier $a \longrightarrow x$, une contradiction. De même $a \notin [Z]$. Comme de plus, $a \notin Ext(Y) \cup Ext(Z)$, alors, d'après le lemme 2.2, il existe $(v,w) \in Y \times Z$ tel que $a \in Y(v) \cap Z(w)$.

On a forcément $v \neq w$. Sinon, comme $a \longrightarrow X$ et $a \in Y(v)$ (resp. $a \in Z(v)$), alors $v \longrightarrow S-\{v,a,x,y\}$ (resp. $v \longrightarrow S-\{v,a,x,z\}$). Il s'ensuit que $v \longrightarrow S-\{v,a,x\}$ et en particulier $v \neq x$, autrement $\{x,a\} \longrightarrow X$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Comme de plus $\mid X \mid \geq 5$, alors $S-\{v,a,x\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T(X)$. Contradiction.

De plus, $\{v,w\} \cap \{x,y,z\} \neq \emptyset$. Sinon, comme d'une part $a \longrightarrow X$, en particulier $a \longrightarrow \{v,w\}$, et d'autre part $a \in Y(v)$ (resp. $a \in Z(w)$), il s'ensuit que $v \longrightarrow w$ (resp. $w \longrightarrow v$). Contradiction. Cela nous amène à distinguer les cas suivants.

- $x \notin \{v,w\}$. Dans ce cas $\{v,w\} \cap \{y,z\} \neq \emptyset$. Si, par exemple, $v = z$, alors $\{a,z\}$ et $\{a,w\}$ sont des intervalles respectifs de $T-y$ et de $T-z$, de sorte que $\{z,w\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T-\{a,y\}$. Contradiction.

- $x \in \{v,w\}$. Supposons, par exemple, que $v = x$. Dans ce cas $a \in Y(x)$, et comme $x \longrightarrow a \longrightarrow X$, alors $x \longrightarrow S-\{x,y\}$. Il s'ensuit que $S-\{a,x,y\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T-\{a,y\}$. Contradiction.

Il est, à présent, établi qu'il existe $(u,v,w) \in X \times Y \times Z$ tel que $a \in X(u) \cap Y(v) \cap Z(w)$. D'une part, les sommets u, v et w sont deux à deux distincts; autrement, si par exemple $u = v$, alors $\{a,u\}$ est un intervalle de chacun des tournois $T-x$ et $T-y$ ce qui implique que $\{a,u\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction. D'autre part, $\{u,v,w\} \cap \{x,y,z\} \neq \emptyset$; sinon, pour tout $\alpha \in \{u,v,w\}$, $\{u,v,w\} - \{\alpha\}$ est un intervalle de $T(\{u,v,w\})$. Une contradiction, car dans chacun des deux tournois à 3 sommets (U_3 et L_3), il existe une paire de sommets qui n'est pas un intervalle. Supposons alors, par exemple, que $u = y$. Les paires $\{u,a\}$ et $\{v,a\}$ sont alors des intervalles respectifs des tournois $T - x$ et $T - u$. Ainsi $\{u,v\}$ est un intervalle non trivial, de $T - \{a,x\}$ si $v \neq x$, de $T - a$ si $v = x$. Une contradiction, puisque les tournois $T - \{a,x\}$ et $T - a$ sont indécomposables. □

Le lemme ci-dessus, permet de préciser la composante connexe, non réduite à un singleton, du graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique.

Lemme 3.5. *Si T est un tournoi (-1)-critique, alors $I(T)(\mathcal{C})$ est un chemin, où $\mathcal{C}$ est l'unique composante connexe de $I(T)$ qui n'est pas réduite à un singleton.*

Preuve. Rappelons que, d'après le lemme 3.2, $I(T)$ admet une unique composante connexe $\mathcal{C}$, non réduite à un singleton. De plus, d'après les lemmes 3.1 et 3.4, pour tout sommet $x \in \mathcal{C}$, on a: $1 \leq \mid V_{I(T)(\mathcal{C})}(x) \mid \leq 2$. Il s'ensuit que $I(T)(\mathcal{C})$ est ou bien un chemin ou bien un cycle. Supposons que $I(T)(\mathcal{C})$ est le cycle C_n défini sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, \cdots, n-1\}$ où $n \geq 3$ et où 0 est l'unique sommet non critique de T. Soit $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Comme i est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(i) = \{i-1, i+1\}$, alors $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $T - i$, sans être un intervalle de T, de sorte que $(i-1,i) \equiv (i,i+1)$. Quitte à remplacer T par $T^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $i \longrightarrow i+1$, en particulier $n-1 \longrightarrow 0$. Si $j > 1$ est un sommet impair de $\mathcal{C}$, alors $j-1$ est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(j-1) = \{j-2, j\}$. Il s'ensuit que $\{j-2, j\}$ est un intervalle du tournoi $T - \{j-1\}$, et comme $j-1 \neq 0$, alors $(0,j) \equiv (0, j-2)$. Ainsi, pour tout sommet impair k de $\mathcal{C}$, on a: $(0,1) \equiv (0,3) \equiv \cdots \equiv (0,k)$, et comme $0 \longrightarrow 1$, alors $0 \longrightarrow k$. Il s'ensuit que $0 \longrightarrow \{k \in \mathcal{C} : k \text{ est impair}\}$. Comme $n-1 \longrightarrow 0$, alors n est impair. Posons $n-1 = 2m$ et distinguons les deux cas suivants.

- $\mathcal{C} \neq S$. Soit $x \in S - \mathcal{C}$. Comme pour tout $i \in \{1, \cdots, 2m\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $T - i$, alors $(x,0) \equiv (x,2) \equiv \cdots \equiv (x,2m)$ et $(x,0) \equiv (x,2m-1) \equiv \cdots \equiv (x,1)$. Il s'ensuit que $x \sim \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction.

- $\mathcal{C} = S$. D'une part, $0 \longrightarrow 1$ donc $1 \longrightarrow \{i \in S - \{0\} : i \text{ est pair}\}$; d'autre part, $2m-1 \longrightarrow 2m$ donc $\{i \in S : i \text{ est impair}\} \longrightarrow 2m$. le tournoi $T - 0$ étant indécomposable, il existe deux sommets k et l de $T - 0$ tels que $k \longrightarrow 1$ et $2m \longrightarrow l$. D'après ce qui précède, k est impair et l est pair. Comme $k \longrightarrow 1$ et k est impair (resp. $2m \longrightarrow l$ et l est pair), alors $\{i \in S - \{1\} : i \text{ est impair}\} \longrightarrow 1$ (resp. $2m \longrightarrow \{i \in S - \{0, 2m\} : i \text{ est pair}\}$). Ainsi, $\{i \in S - \{1\} : i \text{ est impair}\} \longrightarrow \{1, 2m\} \longrightarrow \{i \in S - \{0, 2m\} : i \text{ est pair}\}$. En particulier, $\{1, 2m\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T - 0$. Contradiction.

□

4 Preuve du théorème 1.3

Nous montrons d'abord que les tournois introduits dans le théorème 3.1 sont (-1)-critiques et deux à deux non isomorphes.

Proposition 4.1. *Soient n et k deux entiers tels que $n \geq 3$ et $k \in \{1, \cdots, n-2\}$. Les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, G_{2n+1}^{2k+1} et H_{2n+1}^{2k+1} sont des tournois (-1)-critiques dont l'unique sommet non critique est $2k+1$.*

Preuve.

Vérifions d'abord que pour $W = E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, G_{2n+1}^{2k+1}$ ou H_{2n+1}^{2k+1}, on a:

$$\forall i \in S(W) - \{2k+1\},\ W - \{i\} \text{ est décomposable.} \tag{4.1}$$

En effet, pour $i = 0$ (resp. $i = 2n$), $\{2, \cdots, 2n\}$ (resp. $\{0, \cdots, 2n-2\}$) est un intervalle non trivial de $W - i$. Pour $i \in \{1, \cdots, 2k-2\} \cup \{2k\} \cup \{2k+2, \cdots, 2n-2\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de $W - i$. Pour $i = 2k-1$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de chacun des tournois $E_{2n+1}^{2k+1} - i$, $F_{2n+1}^{2k+1} - i$ et $G_{2n+1}^{2k+1} - i$, et $\{i-1, i+2\}$ est un intervalle non trivial de $H_{2n+1}^{2k+1} - i$. Pour $i = 2n-1$, $\{i-1, i+1\}$ (resp. $\{0, \cdots, 2n-3\} \cup \{2n\}$) est un intervalle non trivial de chacun des tournois $E_{2n+1}^{2k+1} - i$ et $F_{2n+1}^{2k+1} - i$ (resp. $G_{2n+1}^{2k+1} - i$ et $H_{2n+1}^{2k+1} - i$).

Fixons maintenant un entier $k \geq 1$, et montrons la proposition par récurrence sur l'entier $n \geq k+2$. Commençons par examiner le cas où $n = k+2$. Nos tournois sont maintenant définis sur $\{0, \cdots, 2k+4\}$, on pose $X = \{0, \cdots, 2k+4\} - \{2k+1, 2k+2\}$. Les tournois $E_{2k+5}^{2k+1}(X)$, $F_{2k+5}^{2k+1}(X)$, $G_{2k+5}^{2k+1}(X)$ et $H_{2k+5}^{2k+1}(X)$ sont indécomposables. En effet, d'une part $E_{2k+5}^{2k+1}(X) \simeq H_{2k+5}^{2k+1}(X) \simeq V_{2k+3}$ (les $(2k+2)$-chaînes respectives des tournois $E_{2k+5}^{2k+1}(X)$ et $H_{2k+5}^{2k+1}(X)$ sont $0 < \cdots < 2k < 2k+3$ et $0 < \cdots < 2k-1 < 2k+3 < 2k+4$); d'autre part, $F_{2k+5}^{2k+1}(X) = G_{2k+5}^{2k+1}(X) \simeq U_{2k+3}$ (un isomorphisme sur U_{2k+3} fixe chacun des sommets de $\{0, \cdots, 2k\}$, envoie $2k+3$ sur $2k+1$ et $2k+4$ sur $2k+2$). Soit $T = E_{2k+5}^{2k+1}, F_{2k+5}^{2k+1}, G_{2k+5}^{2k+1}$ ou H_{2k+5}^{2k+1}. Dans le tournoi T, $2k+1 \in X(2k+3)$ et, comme $1 \longrightarrow 2k+2 \longrightarrow 2k+3$, alors $2k+2 \notin [X]$. Montrons que $2k+2 \in Ext(X)$, ce qui signifie que :

$$T - \{2k+1\} \text{ est indécomposable .} \tag{4.2}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in X$ tel que $2k+2 \in X(u)$. Pour $T = E_{2k+5}^{2k+1}$ ou F_{2k+5}^{2k+1}, $2k+2 \longrightarrow \{0, 2k+4\}$ et, comme il n'existe aucun sommet $x \in X$ vérifiant $x \longrightarrow \{0, 2k+4\}$, alors $u \in \{0, 2k+4\}$, ce qui contredit les faits que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2k+2$ et $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4$. Pour $T = G_{2k+5}^{2k+1}$ (resp. H_{2k+5}^{2k+1}), $\{0, \cdots, 2k\} \longrightarrow 2k+2$ et $T(\{0, \cdots, 2k\}) = U_{2k+1}$ (resp. V_{2k+1}), en particulier $T(\{0, \cdots, 2k\})$ est indécomposable. Il s'ensuit que $u \notin \{0, \cdots, 2k\}$, autrement, $\{0, \cdots, 2k\} - \{u\} \longrightarrow u$, ce qui contredit l'indécomposabilité de $T(\{0, \cdots, 2k\})$. Ainsi, $u \in \{2k+3, 2k+4\}$, contredisant le fait que $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4 \longrightarrow 2k+2$.

Comme $2k+1 \in X(2k+3)$ et $2k+2 \in Ext(X)$ et $2k+1 \longrightarrow 2k+2 \longrightarrow 2k+3$, alors, d'après le lemme 2.2, le tournoi T est indécomposable et, d'après (4.1) et (4.2), $2k+1$ est l'unique sommet non critique de T.

À présent, soit un entier $n > k+2$. On pose $X_n = \{0, \cdots, 2n\} - \{2k+2, 2k+3\}$ et $X'_n = X_n - \{2k+1\}$. Soit $D = E$, F, G ou H. L'application f de X_n sur $\{0, \cdots, 2n-2\}$

définie par $f(i) = i$ (resp. $f(i) = i-2$) si $i \in \{0, \cdots, 2k+1\}$ (resp. $i \in \{2k+4, \cdots, 2n\}$), est un isomorphisme de $D^{2k+1}_{2n+1}(X_n)$ sur D^{2k+1}_{2n-1}, qui fixe le sommet $2k+1$. Il s'ensuit, en appliquant l'hypothèse de récurrence, que $D^{2k+1}_{2n+1}(X_n)$ est un tournoi (-1)-critique dont l'unique sommet non critique est $2k+1$. Le tournoi $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n)$ est ainsi indécomposable. On a bien $2k+2 \in X_n(2k+4)$ et $2k+3 \in X_n(2k+1)$, en particulier, $2k+2 \in X'_n(2k+4)$ et $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n \cup \{2k+3\}) \simeq D^{2k+1}_{2n+1}(X_n) \simeq D^{2k+1}_{2n-1}$. Le tournoi $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n \cup \{2k+3\})$ étant alors indécomposable, $2k+3 \in Ext(X'_n)$. Comme de plus, $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4$, alors, d'après le lemme 2.2, les tournois D^{2k+1}_{2n+1} et $D^{2k+1}_{2n+1} - \{2k+1\}$ sont indécomposables. Avec (4.1), $2k+1$ est l'unique sommet non critique de D^{2k+1}_{2n+1}.

$\square$

Corollaire 4.2. *Pour tout $n \geq 3$, les $6(n-2)$ tournois de la classe $\mathcal{D}_{2n+1} = \mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup \mathcal{F}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup \mathcal{G}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{H}_{2n+1}$ sont deux à deux non isomorphes.*

Preuve.

Soient T et T' deux tournois isomorphes de la classe $\mathcal{D}_{2n+1}$. D'après la proposition 4.1, T et T' sont (-1)-critiques. Désignons alors par a et a' leurs sommets non critiques respectifs. Par construction des différentes classes, le tournoi T est dans la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$ $\mathcal{H}_{2n+1}$) si et seulement si $T(V^+_T(a))$ et $T(V^-_T(a))$ sont des chaînes (resp. $T(V^+_T(a))$ est une chaîne et $T(V^-_T(a))$ n'est pas une chaîne, $T(V^+_T(a))$ n'est pas une chaîne et $T(V^-_T(a))$ est une chaîne, il existe un unique sommet de $V^+_T(a)$ qui domine au moins deux sommets de $V^-_T(a)$, il existe un unique sommet de $V^-_T(a)$ qui soit dominé par au moins deux sommet de $V^+_T(a)$, $\mid A(T) \cap (V^+_T(a) \times V^-_T(a)) \mid = 1$). Il s'ensuit que si T est un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$ $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), il en est de même pour le tournoi T'. Si T et T' sont dans la même classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), alors il existe deux entiers k, $k' \in \{0, \cdots, n-2\}$ tels que $T = E^{2k+1}_{2n+1}$ (resp. F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1}, H^{2k+1}_{2n+1}) et $T' = E^{2k'+1}_{2n+1}$ (resp. $F^{2k'+1}_{2n+1}$, $G^{2k'+1}_{2n+1}$, $H^{2k'+1}_{2n+1}$). D'après la proposition 4.1, $a = 2k+1$ et $a' = 2k'+1$. Ainsi, $\mid V^-_T(a) \mid = 2k+1$ et $\mid V^-_{T'}(a') \mid = 2k'+1$. Or, comme un isomorphisme de T sur T' envoie a sur a', on a $\mid V^-_T(a) \mid = \mid V^-_{T'}(a') \mid$. Il s'ensuit que $k = k'$ et donc $T = T'$. Si enfin T et T' sont dans la même classe $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$), alors $T^\star$ et $T'^\star$ sont dans la même classe $\mathcal{F}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{G}_{2n+1}$) de sorte que, d'après ce qui précède, $T^\star = T'^\star$ et donc $T = T'$.

$\square$

Il est commode d'introduire les deux lemmes suivants, avant d'entamer la preuve du théorème.

Lemme 4.3. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi (-1)-critique, avec $I(T)(\mathcal{C}) = P_{m+1}$ où $\mathcal{C} = \{0, \cdots, m\}$ est la composante connexe, non réduite à un singleton, de $I(T)$. On désigne par a le sommet non critique de T et on pose $A^+_I = \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est impair$\}$, $A^-_I = \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est impair$\}$, $A^+_P = \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est pair$\}$ et $A^-_P = \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est pair$\}$. Si $W = T(A^+_P)$, $T(A^-_P)$, $T(A^+_I)$ ou $T(A^-_I)$, alors W ou $W^\star$ est l'ordre total usuel sur l'ensemble $S(W)$ des sommets de W.*

Preuve.

Il suffit de considérer le cas où $\mid S(W) \mid \geq 3$. On pose alors $S(W) = \{w_1, \cdots, w_q\}$, où $q \geq 3$ et $w_1 < \cdots < w_q$. Soit $k \in \{2, \cdots, q\}$. On a $w_{k-1}+1 \in \mathcal{C} - \{0, m\}$ et donc

$\mid V_{I(T)}(w_{k-1}+\ 1)\mid = 2$. En utilisant le lemme 3.1, $\{w_{k-1}, w_k\}$ est un intervalle de $T - \{w_{k-1}+1\}$ et, comme $w_{k-1}+1 \notin S(W)$, alors $\{w_{k-1}, w_k\}$ est un intervalle de W. Il s'ensuit que pour tous $i < j \in \{1, \cdots, q\}$, $(w_i, w_j) \equiv \cdots \equiv (w_1, w_j) \equiv (w_1, w_{j-1}) \equiv \cdots \equiv (w_1, w_2)$. Il en découle que si $w_1 \longrightarrow w_2$ (resp. $w_2 \longrightarrow w_1$), alors W (resp. $W^\star$) est l'ordre total usuel sur $S(W)$.

□

Lemme 4.4. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi (-1)-critique, avec $S = \{0, \cdots, 2n\}$ et $I(T)(\mathcal{C}) = P_{m+1}$ où $\mathcal{C} = \{0, \cdots, m\}$ est la composante connexe, non réduite à un singleton, de $I(T)$. Alors $m \geq 3$, et si $0 \longrightarrow 1$, alors $V_T^+(1) = \{2, \cdots, 2n\}$ et $V_T^+(m-1) = \{m\}$. De plus, en désignant par a le sommet non critique de T, les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Si a est impair, alors pour tout sommet impair i, on a:*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m\}$, alors $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$.*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m-a\}$, alors $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$.*

   En particulier, ou bien $S - \mathcal{C} = \emptyset$, ou bien m est impair.

2. *Si a et m sont pairs, alors pour tout sommet impair i, on a:*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, a-1\}$, alors $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$.*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m-a-1\}$, alors $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$.*

   En particulier, $S - \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Preuve.

Notons d'abord que, d'après les lemmes 3.5 et 3.4, $I(T)(\mathcal{C})$ est un chemin et $a \in \{1, \cdots, m-1\}$. On a bien $m \geq 3$, autrement, $m = 2$ et $a = 1$ et dans ce cas, d'après le lemme 3.1, $S - \{0,1\}$ et $S - \{1,2\}$ sont des intervalles respectifs des tournois $T - 0$ et $T - 2$, de sorte que $1 \sim S - \{0,1\}$ et $1 \sim S - \{1,2\}$. Comme de plus, $(S - \{0,1\}) \cap (S - \{1,2\}) \neq \emptyset$, alors $1 \sim S - \{1\}$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. D'après le lemme 3.1, $1 \sim S - \{0,1\}$ et $m-1 \sim S - \{m-1, m\}$ et, comme T est indécomposable avec $0 \longrightarrow 1$, alors $V_T^+(1) = \{2, \cdots, 2n\}$, en particulier, $1 \longrightarrow m-1$ et donc $V_T^+(m-1) = \{m\}$. Supposons, à présent, que a est impair et montrons, par récurrence finie, l'assertion 1. D'après ce qui précède, l'assertion est vérifiée pour $i = 1$. Si i est un sommet impair avec $3 \leq i \leq m$ (resp. $3 \leq i \leq m-a$), alors, par hypothèse de récurrence, $V_T^+(i-2) = \{i-1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m-i+2) = \{m-i+3, \cdots, m\}$). Dans ce cas, $i-1$ (resp. $m-i+1$) est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(i-1) = \{i, i-2\}$ (resp. $V_{I(T)}(m-i+1) = \{m-i, m-i+2\}$) de sorte que, d'après le lemme 3.1, $\{i, i-2\}$ (resp. $\{m-i, m-i+2\}$) est un intervalle de $T - \{i-1\}$ (resp. $T - \{m-i+1\}$), sans être un intervalle de T. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$). En particulier, si m est pair, alors $V_T^+(m-1) = \{m\} = \{m, \cdots, 2n\}$, de sorte que $m = 2n$ et donc $S - \mathcal{C} = \emptyset$.

Supposons maintenant que a et m sont pairs et montrons, par récurrence finie, l'assertion 2. Celle-ci est vérifiée pour $i = 1$. Si i est un sommet impair avec $3 \leq i \leq a-1$ (resp. $3 \leq i \leq m-a-1$), alors, par hypothèse de récurrence, $V_T^+(i-2) = \{i-1, \cdots, 2n\}$ (resp.

$V^+_T(m- i+2) = \{m-i+3,\cdots,m\}$). Dans ce cas, $i-1$ (resp. $m-i+1$) est un sommet critique de T et, en utilisant le lemme 3.1, $\{i,i-2\}$ (resp. $\{m-i,m-i+2\}$) est un intervalle de $T-\{i-1\}$ (resp. $T-\{m-i+1\}$), sans être un intervalle de T. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $V^+_T(i) = \{i+1,\cdots,2n\}$ (resp. $V^+_T(m-i) = \{m-i+1,\cdots,m\}$). En particulier, si $S-\mathcal{C} = \emptyset$, c'est à dire $m = 2n$, alors $V^+_{T-a}(a-1) = \{a+1,\cdots,2n\}$ et $V^+_{T-a}(a+1) = \{a+2,\cdots,2n\}$, de sorte que $\{a-1,a+1\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T-a$. Contradiction.

□

Maintenant, nous présentons une preuve du théorème 1.3, qui repose sur une construction des tournois (-1)-critiques à partir des différents graphes d'indécomposabilités possibles pour de tels tournois.

Théorème 1.3 *À un isomorphisme près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, $(F^{2k+1}_{2n+1})^\star$, G^{2k+1}_{2n+1}, $(G^{2k+1}_{2n+1})^\star$ et H^{2k+1}_{2n+1}, où $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-2$. De plus, le sommet $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

Preuve.

Soit $T = (S,A)$ un tournoi (-1)-critique. D'après la proposition 4.1 et le corollaire 4.2, il suffit de montrer que T est dans la classe $\mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup \mathcal{F}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup \mathcal{G}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{H}_{2n+1}$, pour un entier $n \geq 3$. On désigne par a l'unique sommet non critique de T et par $\mathcal{C}$ la composante connexe de $I(T)$, non réduite à un singleton. On pose $I(T)(\mathcal{C}) = P_{m+1}$ et $S = \{0,\cdots,2n\}$, où $n \geq 3$ et $m \leq 2n$. D'après le lemme 3.4, $a \in \{1,\cdots,m-1\}$. On pose $A^+_I = \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est impair$\}$, $A^-_I = \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est impair$\}$, $A^+_P = \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est pair$\}$, $A^-_P = \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est pair$\}$, $A^+ = A^+_P \cup A^+_I$ et $A^- = A^-_P \cup A^-_I$. Quitte à remplacer T par $T^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$.

Supposons d'abord que a est impair. Soit $(i,j) \in A^-_P \times A^+_P$. D'une part, si $i \neq a-1$ alors, d'après le lemme 3.1, $\{i,i+2\}$ est un intervalle de $T-\{i+1\}$, de sorte que $(i,j) \equiv (i+2,j)$. D'autre part, si $j \leq m-2$, alors $\{j,j+2\}$ est un intervalle de $T-\{j+1\}$, de sorte que $(i,j) \equiv (i,j+2)$. Il s'ensuit que :

$$A^-_P \sim A^+_P. \tag{4.3}$$

Le lemme 4.4 nous amène à distinguer les deux cas suivants.

- $S-\mathcal{C} = \emptyset$. Dans ce cas $m = 2n$, et le lemme 4.4 donne que :

$$\text{pour tout sommet impair } i \text{ de } T,\ V^+_T(i) = \{i+1,\cdots,2n\}. \tag{4.4}$$

  Nécessairement $a+1 \longrightarrow 0$, sinon, d'après (4.3), $A^-_P \longrightarrow A^+_P$ et, en utilisant (4.3), on obtient que $A^- \longrightarrow A^+$, ce qui contredit l'indécomposabilité de $T-a$. Il s'ensuit, en utilisant (3), que :

$$A^+_P \longrightarrow A^-_P. \tag{4.5}$$

  On distingue les cas suivants.

  - $0 \longrightarrow 2$. Comme $a+1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 2$, et a est impair, alors $a \geq 3$. Le lemme 4.3 donne que $T(A^-_P)$ est l'ordre total usuel sur A^-_P. En utilisant de plus la relation (4.4), on obtient:

$$T(A^-) = L_a. \tag{4.6}$$

Notons que $a \leq 2n-3$, autrement, $a = 2n-1$ et, en utilisant (4.4), (4.5) et (4.6), $T = V_{2n+1}$, en particulier, T est un tournoi critique, contradiction. Comme de plus $a \geq 3$, alors $3 \leq a \leq 2n-3$. On pose alors $a = 2k+1$, avec $k \in \{1, \cdots, n-2\}$.

Si $a+1 \longrightarrow a+3$, le lemme 4.3 donne que $T(A_P^+)$ est l'ordre total usuel sur A_P^+ et, en utilisant de plus (4.4), (4.5) et (4.6), on obtient que $T = E_{2n+1}^{2k+1}$.

Si au contraire, $a+3 \longrightarrow a+1$, alors $T(A_P^+)$ est, encore par le lemme 4.3, le tournoi dual de l'ordre total usuel sur A_P^+ et, en utilisant encore (4.4), (4.5) et (4.6), on trouve que $T \simeq (F_{2n+1}^{2k'+1})^\star$, où $k' = n-k-1 \in \{1, \cdots, n-2\}$ (un isomorphisme f de T sur $(F_{2n+1}^{2k'+1})^\star$ est défini par : pour tout $i \in \{0, \cdots, 2n\}$, $f(i) = 2n-i$).

– $2 \longrightarrow 0$. Dans ce cas, d'après le lemme 4.3, $T(A_P^-)$ est le tournoi dual de l'ordre total usuel sur A_P^-. Notons que $a \leq 2n-3$, autrement, $a = 2n-1$ et, en utilisant de plus (4.4) et (4.5), on obtient que $T = U_{2n+1}$, en particulier, T est un tournoi critique, contradiction.

  Nécessairement $a+1 \longrightarrow a+3$, sinon, par le lemme 4.3, $T(A_P^+)$ est le tournoi dual de l'ordre total usuel sur A_P^+ et, en utilisant, en outre, (4.4) et (4.5), on obtient que $T = U_{2n+1}$, en particulier T est critique, contradiction. Il s'ensuit, encore par le lemme 4.3, que $T(A_P^+)$ est l'ordre total usuel sur A_P^+. En particulier, $a \geq 3$, autrement, $a = 1$ et en utilisant, de plus, (4.4) et (4.5), on obtient que $T \simeq V_{2n+1}$ (la $2n$-chaîne de T étant: $1 < 2 < \cdots < 2n$). Comme de plus $a \leq 2n-3$, alors $3 \leq a \leq 2n-3$. On pose alors $a = 2k+1$, avec $k \in \{1, \cdots, n-2\}$. En utilisant (4.4), (4.5) et le fait que $T(A_P^+)$ (resp. $T(A_P^-)$) est l'ordre total usuel sur $T(A_P^+)$ (resp. le dual de l'ordre total usuel sur $T(A_P^-)$), on obtient que $T = F_{2n+1}^{2k+1}$.

- m est impair. Dans ce cas $S - \mathcal{C} \neq \emptyset$, et le lemme 4.4 nous donne les deux faits suivants.

$$\text{pour tout sommet impair } i \in \{1, \cdots, m\},\ V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}. \tag{4.7}$$

$$T(A_P^+) \text{ est l'ordre total usuel sur } A_P^+, \text{ avec } A^- \cup (S-\mathcal{C}) \longrightarrow A_P^+. \tag{4.8}$$

Soit $\mu \in S - \mathcal{C}$ et soit $i \in A_P^- - \{0\}$. Comme $\{i, i-2\}$ est un intervalle de $T - \{i-1\}$ et $\mu \neq i-1$, alors $(i,\mu) \equiv (i-2,\mu) \equiv \cdots \equiv (0,\mu)$. Il s'ensuit que :

$$\text{pour tout } \mu \in S - \mathcal{C},\ \mu \sim A_P^-. \tag{4.9}$$

Il existe alors $\lambda \in S - \mathcal{C}$ tel que $\lambda \longrightarrow 0$. Autrement, $0 \longrightarrow S - \mathcal{C}$ et, en utilisant (4.9), on obtient que $A_P^- \longrightarrow S - \mathcal{C}$. Il s'ensuit, en utilisant de plus (4.7) et (4.8), que $A^- \longrightarrow S - A^-$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Ainsi, de nouveau par (4.9), $\lambda \longrightarrow A_P^-$. Supposons par l'absurde que $0 \longrightarrow 2$. En utilisant (4.7), (4.8) et le lemme 4.3, on obtient que $T(\mathcal{C}) = L_{m+1}$ et on déduit, à l'aide de (4.7), (4.8), (4.9) et le fait que $\lambda \longrightarrow A_P^-$, que $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\}) \simeq V_{m+2}$. Comme le tournoi T n'est pas critique, $S - \mathcal{C} \neq \{\lambda\}$, et puisque $\mid S - \mathcal{C} \mid$ est impair, alors, par une suite finie d'applications du corollaire 2.3 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - (\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ tels que $T - \{x,y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que $\{x,y\}$ n'est pas une arête de $I(T)$. Ainsi, forcément $2 \longrightarrow 0$ et, d'après le lemme 4.3, $T(A_P^-)$ est le tournoi dual de l'ordre total usuel sur A_P^-. De plus, $a \neq 1$, autrement, $A^- = \{0\}$ et $2 \in A_P^+$ de sorte que, d'après (4.8), $0 \longrightarrow 2$, contradiction. On pose alors $n' = \frac{m+1}{2}$ et $a = 2k+1$, où $k \in \{1, \cdots, n'-2\}$. Le tournoi $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ est isomorphe à $G_{2n'+1}^{2k+1}$ (un isomorphisme de $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ sur $G_{2n'+1}^{2k+1}$ envoie λ sur $2n'$ et fixe chaque sommet de $\mathcal{C}$). En particulier, par la proposition 4.1, le tournoi $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ est indécomposable. Il s'ensuit que $S - \mathcal{C} = \{\lambda\}$. Autrement, $\mid S - \mathcal{C} \mid$ est impair avec $\mid S - \mathcal{C} \mid \geq 3$ et, par une suite finie d'applications le corollaire 2.3 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x,y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$. On conclut que $n' = n$ et que $T = T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\}) \simeq G_{2n+1}^{2k+1}$.

Il reste à examinier le cas où a est pair. Soit, dans ce cas, σ la permutation de S fixant chaque sommet de $S - \mathcal{C}$ et telle que pour tout $i \in \mathcal{C}$, $\sigma(i) = m - i$. L'application σ est un isomorphisme de T sur un tournoi T'. Si m est impair, alors le sommet non critique de T' est le sommet impair $\sigma(a) = m - a$. On se ramène ainsi au cas précedent et on déduit que T', et par suite T, est un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup (\mathcal{F}_{2n+1})^\star \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup (\mathcal{G}_{2n+1})^\star$, pour un entier $n \geq 3$. Supposons alors que m est pair. D'après le lemme 4.4, d'une part $m \geq 4$, d'autre part, le tournoi T est déterminé par $T(S - (A_I^- \cup A_I^+))$. Posons $R = T(\mathcal{C}_P)$, où $\mathcal{C}_P$ est l'ensemble des sommets pairs de $\mathcal{C}$. On a bien R ou $R^\star$ est l'ordre total usuel sur $\mathcal{C}_P$. En effet, si i et j sont deux sommets de $\mathcal{C}_P$, avec $0 < i < j$, alors, en utilisant le lemme 3.1, $(i,j) \equiv (i-2,j) \equiv \cdots (0,j) \equiv (0,j-2) \equiv \cdots \equiv (0,2)$. Il s'ensuit que si $0 \longrightarrow 2$ (resp. $2 \longrightarrow 0$), alors R (resp. $R^\star$) est l'ordre total usuel sur C_P. Supposons par l'absurde que $2 \longrightarrow 0$. D'après ce qui précède, R est le tournoi dual de l'ordre total usuel sur $\mathcal{C}_P$ et, en utilisant de plus le lemme 4.4, $T(\mathcal{C}) = U_{m+1}$. Comme de plus $\mid S - \mathcal{C} \mid$ est pair avec $\mid S - \mathcal{C} \mid \geq 2$, alors, une suite finie d'applications du corollaire 2.3 au sous-tournoi-indécomposable $T(\mathcal{C})$ de T, nous donne deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x,y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$. Ainsi, $0 \longrightarrow 2$, de sorte que R est l'ordre total usuel sur $\mathcal{C}_P$ et, avec le lemme 4.4, $T(\mathcal{C})$ est l'ordre total usuel sur $\mathcal{C}$.

Soit $\nu \in S - \mathcal{C}$ et soit $l \in \mathcal{C}_P - \{0\}$. D'après le lemme 3.1, $\{l, l-2\}$ est un intervalle de $T - \{l-1\}$ et, comme $\nu \neq l-1$, alors $(l,\nu) \equiv (l-2,\nu) \equiv \cdots \equiv (0,\nu)$. Il s'ensuit que:

$$\text{pour tout } \nu \in S - \mathcal{C},\ \nu \sim \mathcal{C}_P. \tag{4.10}$$

On en déduit que $V_T^+(0) \cap (S - \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Autrement, $(S - \mathcal{C}) \longrightarrow 0$ et, d'après (4.10), $S - \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_P$, de sorte qu'en utilisant de plus le lemme 4.4, on obtient que $S - \mathcal{C}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction. On a aussi $V_T^-(0) \cap (S - \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Sinon, comme $T(\mathcal{C})$ est l'ordre total usuel sur $\mathcal{C}$, $V_T^-(0) = \emptyset$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. On pose $\Gamma^+ = V_T^+(0) \cap (S - \mathcal{C})$ et $\Gamma^- = V_T^-(0) \cap (S - \mathcal{C})$. D'après (4.10), pour tout $(u,v) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$, $u \longrightarrow \mathcal{C}_P \longrightarrow v$. Il existe alors $(\alpha,\beta) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$ tel que $\beta \longrightarrow \alpha$, autrement, $\Gamma^- \cup A^- \cup \{a\} \longrightarrow \Gamma^+ \cup A^+$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Il s'ensuit que $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha,\beta\}) \simeq H_{2n'+1}^{2k+1}$, où $n' = \frac{m+2}{2} \geq 3$ et $k = \frac{a}{2} \in \{1,\cdots,n'-2\}$ (un isomorphisme ϕ de $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha,\beta\})$ sur $H_{2n'+1}^{2k+1}$ est défini par $\phi(i) = i$ (resp. $i+1$), si $i \in \{0,\cdots,2k-1\}$ (resp. $i \in \{2k,\cdots,m\}$), $\phi(\alpha) = 2k$ et $\phi(\beta) = 2n'$). Il s'ensuit que $S - \mathcal{C} = \{\alpha,\beta\}$, et donc $n' = n$ et $T = T(\mathcal{C} \cup \{\alpha,\beta\}) \simeq H_{2n+1}^{2k+1}$. Autrement, $|\, S - \mathcal{C}\,|$ étant pair, par une suite finie d'applications du corollaire 2.3 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha,\beta\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x,y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$. $\square$

Cette preuve du théorème 1.3, donne les tournois (-1)-critiques avec leurs graphes d'indécomposabilité. Nous en dégageons la remarque suivante.

Remarque 4.5. *Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet au plus deux sommets isolés. Plus précisément, pour $n \geq 3$ et pour $1 \leq k \leq n-2$, on a :*

- $I(E_{2n+1}^{2k+1}) = I(F_{2n+1}^{2k+1}) = P_{2n+1}$.
- $I(G_{2n+1}^{2k+1})$ *est obtenu à partir de P_{2n+1} en supprimant l'arête $\{2n-1,2n\}$.*
- $I(H_{2n+1}^{2k+1})$ *est obtenu à partir de P_{2n+1} en supprimant les trois arêtes $\{2n-1,2n\}$, $\{2k-1,2k\}$, $\{2k,2k+1\}$, et en ajoutant la paire $\{2k-1,2k+1\}$ comme nouvelle arête.*

Notons que, d'après le lemme 3.4, si a est le sommet non critique d'un tournoi (-1)-critique T , alors $T - a$ est un tournoi (-2)-critique. Cela nous amène à poser le problème suivant.

Problème 4.6. *Caractériser les tournois (-2)-critiques.*

References

[1] I. Boudabbous and P. Ille, Critical and infinite directed graphs. *Discrete Math.* **307** (2007), pp. 2415-2428.

[2] Y. Boudabbous and P. Ille, Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph. Preprint.

[3] A. Ehrenfeucht and G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures. *Theoret. Comput. Sci.* **3(70)** (1990), pp. 343-358.

[4] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation. *in: Orders, Description and Roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland.* (1984), pp. 313-342.

[5] P. Ille, Indecomposable graphs. *Discrete Math.* **173** (1997), pp. 71-78.

[6] P. Ille, 1993, Recognition problem in reconstruction for decomposable relations. *B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow (Eds.), Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, Kluwer Academic Publishers.* (1993), pp. 189-198.

[7] J.H. Schmerl and W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures. *Discrete Math.* **113** (1993), pp. 191-205.