应用概率统计　第二十三卷
第二期　2007 年 5 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 2 May 2007

混合指数更新模型下平均折现惩罚函数 *

李俊海 [1,2]　　刘再明 [1]

([1] 中南大学数学学院概率统计研究所，长沙， 410075； [2] 河南工业大学理学院，郑州， 450052)

摘　要

本文讨论了以混合指数分布为点间间距的更新风险模型下平均折现惩罚函数，在简单条件下，利用 Dickson and Hipp (2001) 中引入的变换方法，得到了平均折现惩罚函数的 Laplace 变换的精确表达式．

关 键 词： 混合指数分布，更新过程，惩罚函数，破产概率．

学 科 分 类 号： O211.6.

§1.　引　　言

本文考虑下列混合指数更新风险模型

$$R(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i, \tag{1.1}$$

其中 $u\geq 0$ 是初始资金， c 是单位时间保费收入．$N(t)$ 是一个普通更新过程，点间间距 W 服从混合指数分布， i.e. W 的密度函数为

$$g_W(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda_i e^{-\lambda_i t},\qquad t>0, \tag{1.2}$$

这里 $n\geq 2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$; 数学期望为 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i/\lambda_i$. 索赔大小 $\{X_i\}$ 是 i.i.d. 非负随机变量且共同密度为 $f_X(x)$, $x>0$, 数学期望为 μ. 设 $\omega(x,y)$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ 是一个非负二元函数且满足条件

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\omega(x,y)f_X(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty. \tag{1.3}$$

记 $T=\inf\{t|R(t)<0,t>0\}$, 若集合为空集时取 $T=\infty$, 则 T 表示首次破产时间．

$$\phi_\delta(u)=\mathsf{E}[e^{\delta T}\omega(R(T-),|R(T)|)1_{(T<\infty)}|R(0)=u], \tag{1.4}$$

称为平均折现惩罚函数， $\phi_\delta(u)$ 与 δ 有关，但为了简化记号我们用 $\phi(u)$ 来表示．$\phi(u)$ 可以有多种解释，当 $\omega(x,y)\equiv 1$ 时， $\phi(u)$ 表示破产时刻的 Laplace 变换；当 $\omega(x,y)\equiv 1$, $\delta=0$, 代表最终破产概率；当 $\omega(x,y)\equiv R(T)$, $\delta=0$ 时，表示破产时刻的平均亏损等等．因此，对 $\phi(u)$ 的研究是当前保险数学中的一个热点问题， Gerber and Shiu (1998) 对索赔到达过程 Poisson 的古典风

* 国家自然科学基金资助项目 (10371133).

本文 2004 年 5 月 25 日收到， 2006 年 1 月 13 日收到修改稿.

险模型进行了研究，得到了关于 $\phi(u)$ 的一个积分方程．Lin and Willmot (2000) 对这个积分方程进行了研究，利用更新方程的解得到了 $\phi(u)$ 的一个表达式．Dickson and Hipp (2001) 把索赔到达过程推广到 Erlang(2) 更新过程时的情况，并在 $\omega(x,y)\equiv 1$ 这一特殊情况下得到了 $\phi(u)$ 的 Laplace 变换的表达式； Cheng and Tang (2003) 对一般 $\omega(x,y)$ 但要求 $\delta=0$ 时的情况进行了讨论也得到了精确的表达式，推广了 Dickson and Hipp (2001) 的结果．Gerber and Shiu (2003)、Li (2003) 和 Lin (2003) 把模型推广到 Erlang(n) 更新过程．本文讨论了混合指数更新模型时的情况，当 $n=2$ 时，利用 Dickson and Hipp (2001) 的变换方法，得到了 $\phi_\delta(u)$ 的 Laplace 变换的一个精确表达式．

§ 2. 主要结果

我们先寻找 $\phi(u)$ 所满足的一个微分积分方程．

定理 2.1 在模型 (1.1) 中，若 $\Big[c\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}p_i/\lambda_i\Big)-\mu\Big]\Big/\mu>0$ 且条件 (1.3) 成立，则

$$\begin{aligned}c\phi'(u) &= -\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda_i\Big)\Big[\int_0^u\phi(u-x)f_X(x)\mathrm{d}x+M(u)\Big]+\delta\phi(u)\\&\quad+\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda_i^2\int_u^{+\infty}e^{-[(\lambda_i+\delta)/c](h-u)}\Big[\int_0^h\phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x+M(h)\Big]\mathrm{d}h,\end{aligned}\tag{2.1}$$

这里 $M(h)=\displaystyle\int_h^{+\infty}\omega(h,x-h)f_X(x)\mathrm{d}x$.

证明：以第一次索赔发生的时刻和索赔大小为条件可得

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \int_0^{+\infty}g_W(t)\int_0^{u+ct}e^{-\delta t}\phi(u+ct-x)f_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^{+\infty}g_W(t)\int_{u+ct}^{\infty}e^{-\delta t}\omega(u+ct,x-(u+ct))f_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由上式和条件 (1.3) 可知， $\phi(u)$ 有限且是 u 的连续函数并对 u 的导数存在．令 $h=u+ct$ 并对上式进行变量代换，有

$$\begin{aligned}c\phi(u) &= \int_u^{+\infty}g_W\Big(\frac{h-u}{c}\Big)e^{-\delta[(h-u)/c]}\int_0^h\phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}h\\&\quad+\int_u^{+\infty}g_W\Big(\frac{h-u}{c}\Big)e^{-\delta[(h-u)/c]}\int_h^{\infty}\omega(h,x-h)f_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

对 u 求导后，得

$$\begin{aligned}c\phi'(u) &= -\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda_i\Big)\Big[\int_0^u\phi(u-x)f_X(x)\mathrm{d}x+M(u)\Big]\\&\quad-\frac{1}{c}\int_u^{+\infty}g_W^{(1)}\Big(\frac{h-u}{c}\Big)e^{-(\delta/c)(h-u)}\Big[\int_0^h\phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x+M(h)\Big]\mathrm{d}h\\&\quad+\frac{\delta}{c}\int_u^{+\infty}g_W\Big(\frac{h-u}{c}\Big)e^{-(\delta/c)(h-u)}\Big[\int_0^h\phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x+M(h)\Big]\mathrm{d}h,\end{aligned}$$

这里 $g_W^{(1)}(x)$ 是函数的一阶导数，把 (2.2) 代入上式，整理后有

$$\begin{aligned}c\phi'(u) &= -\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i\Big)\Big[\int_0^u \phi(u-x)f_X(x)\mathrm{d}x + M(u)\Big] + \delta\phi(u)\\ &\quad +\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i^2\int_u^{+\infty} e^{-[(\lambda_i+\delta)/c](h-u)}\Big[\int_0^h \phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x + M(h)\Big]\mathrm{d}h. \qquad \#\end{aligned}$$

当 $s \neq (\lambda_i+\delta)/c$, $i=1,2,\cdots,n$ 时，对 (2.1) 式两边取 Laplace 变换，有

$$\begin{aligned}cs\phi^*(s) - c\phi(0) &= -\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i\Big)[\phi^*(s)f_X^*(s) + M^*(s)] + \delta\phi^*(s) + \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\lambda_i^2}{\lambda_i+\delta-cs}\\ &\quad \cdot\Big[\phi^*(s)f_X^*(s) - \phi^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big)f_X^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big) + M^*(s) - M^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big)\Big].\end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned}\phi^*(s) &= \Big\{c\phi(0) - \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i\Big)M^*(s) + \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\lambda_i^2}{\lambda_i+\delta-cs}\\ &\quad \cdot\Big[M^*(s) - \phi^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big)f_X^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big) - M^*\Big(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\Big)\Big]\Big\}\\ &\quad \Big/\Big\{cs-\delta+\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i)f_X^*(s) - \Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\lambda_i^2}{\lambda_i+\delta-cs}\Big]f_X^*(s)\Big\}.\end{aligned}$$

为此，下面主要的任务就是设法消除上述表达式中的 $\phi(0)$ 和 $\phi^*((\lambda_i+\delta)/c)$, 但是，当 $n>2$ 时，可以用后面的方法得到 Laplace 变换的表达式，但式子比较繁琐冗长，为了得到比较简洁的结果，我们在下面主要讨论 $n=2$ 时的情况．为了简化记号，记 $p_1=p$, $p_2=q$ 且假设 $0<\lambda_1<\lambda_2$, $0\leq p<1$, $0<q\leq 1$, 因为 $p=0$ 时相当于 $n=1$. 此时定理 2.1 可以写为:

定理 2.2 在模型 (1.1) 中，若 $[c(p/\lambda_1+q/\lambda_2)-\mu]/\mu>0$ 且条件 (1.3) 成立，则

$$\begin{aligned}c\phi'(u) &= -(p\lambda_1+q\lambda_2)\int_0^u \phi(u-x)f_X(x)\mathrm{d}x - (p\lambda_1+q\lambda_2)M(u) + (\lambda_2+\delta)\phi(u)\\ &\quad -p\frac{\lambda_2-\lambda_1}{c}\int_u^{+\infty}\lambda_1 e^{-[(\lambda_1+\delta)/c](h-u)}\Big[\int_0^h \phi(h-x)f_X(x)\mathrm{d}x + M(h)\Big]\mathrm{d}h, \qquad (2.3)\end{aligned}$$

这里 $M(h)=\int_h^{+\infty}\omega(h,x-h)f_X(x)\mathrm{d}x$.

证明: 只要把 (2.2) 代入 (2.1) 的最后一项，即可得到 (2.3). #

在讨论下一个结论前先引入一些记号．对一个定义在 R^+ 上的函数 $g(x)$, 定义 Laplace 变换并记为

$$g^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\mathrm{d}x.$$

对 $r\in R$ 定义算子 $T_r g$ 为

$$T_r g(x)=\int_x^\infty e^{-r(u-x)}g(u)\mathrm{d}u,$$

则变换后的函数 $T_r g$ 的 Laplace 变换有下列性质

$$(T_r g)^*(s)=\frac{g^*(s)-g^*(r)}{r-s}.$$

有关算子 $T_r g$ 的其它性质可参阅 Dickson and Hipp (2001).

在下面引理中，讨论了主要结论表达式中要用到的方程的根的存在性.

引理 2.3 在定理 2.2 的条件下，方程

$$cs+\Big[(p\lambda_1+q\lambda_2)+p\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1+\delta-cs}\Big]f_X^*(s)-(\lambda_2+\delta)=0. \tag{2.4}$$

(1) 若 $p\neq 0$ 至少有二个不同非负根，分别记最小的非负根为 r_1, 大于 r_1 的非负根为 r_2, 且均不等于 $(\lambda_1+\delta)/c$.

(2) 若 $p=0$, 至少有一个非负根，记最小的非负根为 r.

证明: 令 $G(s)=cs+[(p\lambda_1+q\lambda_2)+p[\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)/(\lambda_1+\delta-cs)]]f_X^*(s)-(\lambda_2+\delta)$, 则

$$\begin{aligned} G(0) &= (p\lambda_1+q\lambda_2)+p\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1+\delta}-(\lambda_2+\delta)\\ &\le p\lambda_1+q\lambda_2+p(\lambda_2-\lambda_1)-(\lambda_2+\delta)\\ &= -\delta\le 0. \end{aligned}$$

若 $p\neq 0$, 当 $s\uparrow(\lambda_1+\delta)/c$ 时， $G(s)\to+\infty$, 所以方程在 $[0,(\lambda_1+\delta)/c)$ 中有一个根. 当 $s\downarrow(\lambda_1+\delta)/c$ 时， $G(s)\to-\infty$, 当 $s\to+\infty$ 时， $G(s)\to+\infty$, 所以方程在 $((\lambda_1+\delta)/c,+\infty)$ 中有一个根.

若 $p=0$, $q=1$, 有 $G(0)=-\delta\le 0$, 又因 $c>0$, 所以当 $s\to+\infty$ 时，有 $G(s)=cs+\lambda_2 f_X^*(s)-\lambda_2\to+\infty$. 从而方程至少有一个非负根. #

下面我们来求 $\phi(u)$ 的 Laplace 变换.

定理 2.4 在定理 2.2 的条件下， $\phi(u)$ 的 Laplace 变换为

(1) 若 $p\neq 0$ 且 $s\neq(\lambda_1+\delta)/c$ 时

$$\phi^*(s)=\frac{c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}M^*(r_2)+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}M^*(s)}{c^2-c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}f_X^*(r_2)-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}f_X^*(s)}. \tag{2.5}$$

(2) 若 $p=0$ 时

$$\phi^*(s)=\frac{\lambda_2 T_r M^*(s)}{c-\lambda_2 T_r f_X^*(s)}. \tag{2.6}$$

证明: (1) 当 $p\neq 0$, $s\neq(\lambda_1+\delta)/c$ 时，对 (2.3) 式两边取 Laplace 变换，有

$$\begin{aligned} & cs\phi^*(s)-c\phi(0)\\ =\ & -(p\lambda_1+q\lambda_2)\phi^*(s)f_X^*(s)-(p\lambda_1+q\lambda_2)M^*(s)+(\lambda_2+\delta)\phi^*(s)\\ & -\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1+\delta-cs}\Big[\phi^*(s)f_X^*(s)-\phi^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)f_X^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)+M^*(s)-M^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned} \phi^*(s) =\ & \Big\{c\phi(0)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\Big[\phi^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)f_X^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)+M^*\Big(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\Big)\Big]\\ & -[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]M^*(s)\Big\}\\ & /\{(cs-\lambda_2-\delta)(\lambda_1+\delta-cs)+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]f_X^*(s)\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

由引理 2.3 可知， r_1 使得上式的分母为零，但 $\phi^*(r_1)$ 是有限的，上式的分子也为零．i.e.

$$\begin{aligned} & c\phi(0)(\lambda_1+\delta-cr_1)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\left[\phi^*\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)f^*\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)+M^*\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}\right)\right] \\ = \ & [(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cr_1)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]M^*(r_1). \end{aligned}$$

所以 (2.7) 的分子可以写为

$$\begin{aligned} &(r_1-s)[c^2\phi(0)-c(p\lambda_1+q\lambda_2)M^*(r_1) \\ &-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_1}M^*(s)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

又 r_2 也使得 (2.7) 的分母为零，但 $\phi^*(r_2)$ 是有限的， (2.7) 的分子也为零．由于 $r_1\neq r_2$, 从而有

$$c^2\phi(0)-c(p\lambda_1+q\lambda_2)M^*(r_1)-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cr_2)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_1}M^*(r_2)=0.$$

代入 (2.8), 可知 (2.7) 的分子可以写为

$$\begin{aligned} &(r_2-s)(r_1-s)[-c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}M^*(r_2) \\ &-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}M^*(s)]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

下面讨论分母的变换，因

$$(cr_1-\lambda_2-\delta)(\lambda_1+\delta-cr_1)+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cr_1)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]f_X^*(r_1)=0,$$

所以分母可写为

$$\begin{aligned} &(r_1-s)[c^2(s+r_1)-c(\lambda_2+\delta)-c(\lambda_1+\delta)+c(p\lambda_1+q\lambda_2)f_X^*(r_1) \\ &+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_1}f_X^*(s)]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

又因 r_2 也使得分母为零且 $r_2\neq r_1$, 有

$$\begin{aligned} &c^2(r_2+r_1)-c(\lambda_2+\delta)-c(\lambda_1+\delta)+c(p\lambda_1+q\lambda_2)f_X^*(r_1) \\ &+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cr_2)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_1}f_X^*(r_2)=0. \end{aligned}$$

代入 (2.10), 可知 (2.7) 的分母可以写为

$$\begin{aligned} &(r_1-s)(s-r_2)[c^2-c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}f_X^*(r_2) \\ &-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}f_X^*(s)]. \end{aligned}$$

联合 (2.9) 可知

$$\phi^*(s)=\frac{-c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}M^*(r_2)-[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}M^*(s)}{-c^2+c(p\lambda_1+q\lambda_2)T_{r_1}f_X^*(r_2)+[(p\lambda_1+q\lambda_2)(\lambda_1+\delta-cs)+p\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)]T_{r_2}T_{r_1}f_X^*(s)}.$$

可得定理的结论．

(2) 若 $p=0$, 类似 (1) 的讨论可得 (2.6).　　#

例 当 $p=0$, $\delta=0$, $f_X(x)=be^{-bx}$, $x>0$ 和 $\omega(x,y)\equiv 1$ 时, $\phi(u)=\mathsf{P}(T<\infty)$ 是最终破产概率. 此时方程 (2.4) 的最小非负解为 $r=0$, $M^*(s)=1/(s+b)$, $f_X^*(s)=b/(s+b)$. 所以 $T_0M^*(s)=1/[b(s+b)]$, $T_0f_X^*(s)=1/(s+b)$, 从而

$$\phi^*(s)=\frac{\lambda_2T_0M^*(s)}{c-\lambda_2T_0f_X^*(s)}=\frac{\lambda_2}{cb}\frac{1}{s+b-\lambda_2/c},$$

i.e.

$$\phi(u)=\mathsf{P}(T<\infty)=\frac{\lambda_2}{cb}e^{-(b-\lambda_2/c)u}.$$

这正是古典风险模型下的著名的结果.

感谢审稿人对本文提过了许多宝贵的改进建议.

参 考 文 献

[1] Dickson, D.C.M and Hipp, C., On the time to ruin for Erlang(2) risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, **29(3)**(2001), 333–344.

[2] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., On the time value of the ruin, *North American Actuarial Journal*, **2(1)**(1998), 48–78.

[3] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., Discussion of "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process", *North American Actuarial Journal*, **7(3)**(2003), 117–119.

[4] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process" (Cheng, Y.B. and Tang, Q.H.), *North American Actuarial Journal*, **7(4)**(2003), 96–101.

[5] Li, S.M., Discussion of "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process", *North American Actuarial Journal*, **7(3)**(2003), 119–122.

[6] Lin, X.S., Discussion of "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process", *North American Actuarial Journal*, **7(3)**(2003), 122–124.

[7] Cheng, Y.B. and Tang, Q.H., Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process, *North American Actuarial Journal*, **7(1)**(2003), 1–12.

[8] Lin, X.S. and Gordon, E.W., The moments of time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27(1)**(2000), 19-44.

Expected Discounted Penalty of Mixed Exponential Renewal Process

Li Junhai[1,2] Liu Zaiming[1]

([1] *School of Mathematics, Central South University, Changsha, 410075*)

([2] *College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou, 450052*)

In this paper, the expected discounted penalty of mixed exponential renewal risk process was considered. Under some simple conditions, the explicit expression of Laplace transform of the expected discounted penalty is obtained.