应用概率统计　第二十三卷
第四期　2007 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 4 Nov. 2007

负相协重尾随机变量和的尾概率的渐近性的若干注记 *

王开永 [1,2]　　王岳宝 [1]

([1] 苏州大学数学科学学院，苏州， 215006； [2] 苏州科技学院应用数学系，苏州， 215009)

摘　要

本文得到了同分布负相协重尾随机变量和的最大值、随机个和的最大值尾概率的渐进性质．所得到的结果削弱了 Wang 和 Tang (Statist. Prob. Lett., 68, 287–295, 2004)[1] 的 Theorem 2.1 的矩条件，在与 [1] 的 Theorem 2.2 不同的条件下得到了相应的结果，并且都解除了上述 [1] 的结果中对随机变量的支撑的限制．

关 键 词： 负相协，次指数分布族，部分和最大值，随机和，尾概率.

学 科 分 类 号： O211.4.

§1.　引　　言

在本文中，均设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是同分布随机变量 (r.v.) 列，具有共同的分布函数 (d.f.) $F(x) = 1 - \overline{F}(x) = \mathsf{P}(X_1 \leq x)$，$x \in (-\infty, +\infty)$．记

$$X_{(n)} = \max_{1\leq k\leq n} X_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_{(n)} = \max_{1\leq k\leq n} S_k, \qquad n \geq 1.$$

对于一个 r.v. X, 记 $X^+ = XI(X > 0)$, 其中 $I(A)$ 是事件 A 的示性函数．无特殊说明，所有极限关系都是 $x \to \infty$. 此外若 $g(x)(f(x))^{-1} \to 1$, 则记 $g(x) \sim f(x)$.

在研究 S_n 和 $S_{(n)}$ 的尾概率的渐进性质中，往往要求 F 具有某种性质．一个 d.f. F (或相应的 r.v. X) 被称为是重尾的 (heavy-tailed), 如果对于任意 $\gamma > 0$, $\int_0^\infty e^{\gamma t} F(\mathrm{d}t) = \infty$. 而最重要的重尾子族是一种次指数分布族．由定义，一个 d.f. $F(x)$, $x \in [0, +\infty)$ (或相应的 r.v. X) 是次指数的 (subexponential), 记为 $F \in \mathcal{S}$ (或 $X \in \mathcal{S}$), 如果其对应的独立同分布 (i.i.d.) 随机变量列 $\{X_k : k \geq 1\}$, 对于某个 $n \geq 2$ (或等价地任意 $n \geq 2$) 满足

$$\mathsf{P}(S_n > x) \sim n\overline{F}(x). \tag{1.1}$$

更一般地，一个 d.f. $F(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (或相应的 r.v. X) 属于 $\mathcal{S}$, 若 $F^+(x) = F(x)I(X \geq 0) \in \mathcal{S}$ 参见 Foss 和 Zachary (2003)[2] 等．此外，我们再给出另外两个重要的重尾分布子族．一个 d.f. $F(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (或相应的 r.v. X) 属于 $\mathcal{D}$ 族 (domanated-tailed distributions class), 记为 $F \in \mathcal{D}$ (或 $X \in \mathcal{D}$), 如果对任意 $0 < y < 1$ (或等价地对 $y = 1/2$) F 满足

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty;$$

* 受国家自然科学基金资助 (项目号：10671139), 苏州科技学院引进人员科研启动费 (项目号：Z912) 及院科研基金资助.

本文 2004 年 10 月 18 日收到， 2006 年 3 月 9 日收到修改稿.

一个 d.f. $F(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (或相应的 r.v. X) 属于 $\mathcal{L}$ 族 (long-tailed distributions class), 记为 $F \in \mathcal{L}$ (或 $X \in \mathcal{L}$), 如果对任意固定的 t (或等价地对 $t=1$) F 满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

周知，上述重尾分布族具有如下关系:

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}.$$

关于重尾分布子族及在金融保险中的应用的详细介绍，可以参见 Embrechts, Klüppelberg 和 Mikosch (1997)[3] 等.

为了研究 $\mathcal{D}$ 族的性质, 人们引入了一些指标. 设 X 是一 r.v. 具有 d.f. $F(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 对任意 $y > 0$, 设 $\overline{F}_*(y) = \liminf\limits_{x\to\infty} \overline{F}(xy)/\overline{F}(x)$, 定义 $\gamma_F = \gamma(X) = \inf\{-\log \overline{F}_*(y)/\log y : y > 1\}$.

$\mathcal{D}$ 族的一个周知的性质是:

命题 1.1 $F \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overline{F}_*(y) > 0$, 对所有 $y > 1 \Longleftrightarrow \overline{F}_*(y) > 0$, 对某个 $y > 1 \Longleftrightarrow \gamma_F < \infty$.

同时， Tang 和 Tsitsiashvili (2003)[4] 的 Lemma 3.5 指出.

命题 1.2 若 $F \in \mathcal{D}$, 则对任意的 $v > \gamma_F$, $x^{-v} = o(\overline{F}(x))$.

人们自然十分关心上述随机变量构成的 S_n 和 $S_{(n)}$ 的尾概率的渐进性质. 当 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一列 i.i.d. 随机变量时， Sgibev (1996)[5] 得到了其 $S_{(n)}$ 的尾概率的渐进性质. 即若 $F \in \mathcal{S}$, 则

$$\mathsf{P}(S_{(n)} > x) \sim n\overline{F}(x). \tag{1.2}$$

设 τ 是一个非负整值 r.v. 且独立于 $\{X_k : k \ge 1\}$, Ng 和 Tang (2004)[6] 将 (1.1) 及 (1.2) 推广到随机和 S_τ 和随机个和最大值 $S_{(\tau)}$. 另一方面，实际应用往往要求削弱 $\{X_k : k \ge 1\}$ 相互独立的限制. [1] 研究了负相协随机变量列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 的 S_n 和 $S_{(n)}$ 的尾概率的渐进性质. 由定义，随机变量列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是负相协的 (NA), 如果对于 $\{1, 2, \cdots, m\}$, $m \ge 2$ 的任意两个非空不交子集 A 和 B

$$\mathsf{Cov}\,(f(X_i : i \in A), g(X_j : j \in B)) \le 0,$$

其中 f 和 g 是任意按坐标单调不降的且使上述左式有意义的函数. 有关负相协的概念及性质可参见 Alam 和 Saxena (1981)[7], Joag-Dev 和 Proschan (1983)[8], Su, Zhao 和 Wang (1997)[9], Shao (2000)[10] 等. [1] 的主要结果如下:

定理 1.A 设 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一非负，同分布的 NA 列，具有 d.f. F. 如果 $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ 且对某个 $r > 1$, $\mathsf{E}X_1^r < \infty$, 则对每个 $n \ge 1$

$$\mathsf{P}(S_n > x) \sim n\overline{F}(x). \tag{1.3}$$

定理 1.B 设 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $[s, +\infty)$, $s > -\infty$ 上的 d.f. F 且 $\mu = \mathsf{E}X_1 < 0$. τ 是一个非负整值 r.v. 且独立于 $\{X_k : k \ge 1\}$. 如果 $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, $\mathsf{E}\tau < \infty$ 且对某个 $r > 1$, $\mathsf{E}(X_1^+)^r < \infty$, 则

$$\mathsf{P}(S_\tau > x) \sim \mathsf{P}(S_{(\tau)} > x) \sim \mathsf{E}\tau\overline{F}(x). \tag{1.4}$$

定理 1.A 中要求对某个 $r > 1$, $\mathsf{E}X_1^r < \infty$, 本文指出在 $\mathsf{E}X_1 < \infty$ 时，(1.3) 仍成立．定理 1.B 要求 $\mathsf{E}(X_1^+)^r < \infty$ 及 $\mathsf{E}\tau < \infty$. 本文指出，适当提高 τ 的矩条件，则可在更弱的 $\mathsf{E}X_1^+ < \infty$ 的条件下得到 (1.4). 另一方面，我们将在适当的条件下，解除定理 1.A 及定理 1.B 中 $F(x)$ 的 x 的取值有有限左端点的限制，使所得的结果有更大的应用范围．此外，我们也给出同分布 NA 列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 的 $X_{(n)}$ 和 $X_{(\tau)}$ 的尾概率的渐进性质，所得关系与独立时相同．

我们将在 2 中给出主要结果及推论，在 3 中给出定理证明所需的若干引理，在 4 中给出定理的证明．

§2.　主要结果及推论

在给出本文的主要结果之前，我们先给出一个 Cline 和 Samorodnitsky (1994)[11] 等用到的 $\mathcal{L}$ 族的一个重要的性质．

命题 2.1　r.v. X 的取值于 $(-\infty, +\infty)$ 上的 d.f. $F \in \mathcal{L}$ 当且仅当

$$\mathcal{H}(F) = \Big\{h(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty); h(x) \uparrow \infty, \frac{h(x)}{x} \to 0, \frac{\overline{F}(x - h(x))}{\overline{F}(x)} \to 1\Big\} \ne \emptyset. \tag{2.1}$$

定理 2.1　设 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty, +\infty)$ 的共同 d.f. F 且 $\mu_+ = \mathsf{E}X_1^+ < \infty$. 如果 $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ 且存在 $h(x) \in \mathcal{H}(F)$ 使得

$$\frac{F(-h(x))}{\overline{F}(x)} \to 0. \tag{2.2}$$

则对每一个 $n \ge 1$

$$\mathsf{P}(S_{(n)} > x) \sim \mathsf{P}(S_n > x) \sim n\overline{F}(x). \tag{2.3}$$

注 2.1　若 F 取值于 $[s, +\infty)$, $s > -\infty$, 则条件 (2.2) 显然满足，从而 (2.3) 成立．在保险的实际中，F 是单个索赔来到时的保险公司的净损失的分布函数，有负的有限均值．这时 $\overline{F}(x)$, $x > 0$ 反映的是保险公司的损失的的可能性，而 $F(x)$, $x < 0$ 反映的是保险公司获利的可能性．保险公司获利过大反而会阻碍人们投保，因此保险公司除了控制风险外，还应当调节获利的程度．条件 (2.2) 就是这样一种调节．显然，条件 (2.2) 是比 F 取值于 $[s, +\infty)$, $s > -\infty$ 更合适的一种调节．

以下我们将定理 2.1 推广到随机和的场合．

定理 2.2　设 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty, +\infty)$ 的共同 d.f. F 且 $\mu_+ = \mathsf{E}X_1^+ < \infty$. τ 是一个非负整值 r.v. 且独立于 $\{X_k : k \ge 1\}$. 如果 $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ 满足条件 (2.2), 且存在 $p > \gamma_F$, 使得 $\mathsf{E}\tau^p < \infty$. 则

$$\mathsf{P}(S_{(\tau)} > x) \sim \mathsf{P}(S_\tau > x) \sim \mathsf{E}\tau\overline{F}(x). \tag{2.4}$$

注 2.2　与定理 1.B 的条件相比，由 $F \in \mathcal{D}$ 及 $\mu_+ = \mathsf{E}X_1^+ < \infty$ 知 $\gamma_F \ge 1$, 从而 $\mathsf{E}\tau^p < \infty$ 条件强于 $\mathsf{E}\tau < \infty$. 但是 $\mathsf{E}X_1^+ < \infty$ 的条件弱于 $\mathsf{E}(X_1^+)^r < \infty$, $r > 1$, 而在 i.i.d. 列的相应结果中，往往只要求 $\mathsf{E}X_1^+ < \infty$, 并且对于更新计数过程 $\tau = N(t)$ 等常见计数过程来说，都满足

$\mathsf{E}\tau^p<\infty$ 的要求．此外，在定理 1.B 的条件下，若 F 满足条件 (2.2)，同样可解除 F 取值于 $[s,+\infty)$, $s>-\infty$ 的限制．

推论 2.1 设 $\{X_k:k\geq 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty,+\infty)$ 的共同 d.f. F 且 $\mu_+=\mathsf{E}X_1^+<\infty$. $\{Y_k:k\geq 1\}$ 是一列非负， i.i.d. 的随机变量，具有有限期望且与 $\{X_k:k\geq 1\}$ 相互独立．$N(t)$ 是由 $\{Y_k:k\geq 1\}$ 生成的更新计数过程．如果 $F\in\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$ 且满足条件 (2.2). 则对任意给定的 $t>0$

$$\mathsf{P}(S_{(N(t))}>x)\sim\mathsf{P}(S_{N(t)}>x)\sim\mathsf{E}N(t)\overline{F}(x).$$

定理 2.3 设 $\{X_k:k\geq 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty,+\infty)$ 的共同 d.f. F. 则对每一个 $n\geq 1$

$$\mathsf{P}(X_{(n)}>x)\sim n\overline{F}(x). \tag{2.5}$$

我们也可以将 (2.5) 推广到随机和的场合．

定理 2.4 设 $\{X_k:k\geq 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty,+\infty)$ 的共同 d.f. F. τ 是一个非负整值 r.v. 且独立于 $\{X_k:k\geq 1\}$, $\mathsf{E}\tau<\infty$. 则

$$\mathsf{P}(X_{(\tau)}>x)\sim\mathsf{E}\tau\overline{F}(x). \tag{2.6}$$

§3. 若干引理

引理 3.1 设 $\{X_k:k\geq 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty,+\infty)$ 的共同 d.f. F 且 $\mu_+=\mathsf{E}X_1^+<\infty$. 则对任意的 $\theta>0$, $x>0$ 及 $n\geq 1$

$$\mathsf{P}\Big(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i\leq\theta x\}\Big)\leq\Big(\frac{e\mu_+n}{x}\Big)^{\theta^{-1}} \tag{3.1}$$

及

$$\mathsf{P}(S_n>x)\leq\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\leq n\overline{F}(\theta x)+\Big(\frac{e\mu_+n}{x}\Big)^{\theta^{-1}}. \tag{3.2}$$

证明: 若 $\mu_+=\mathsf{E}X_1^+=0$, 则 $X_k\leq 0$, a.s., $k\geq 1$, 从而 (3.1) 显然成立．若 $\mu_+=\mathsf{E}X_1^+>0$. 对任意的 $\theta>0$, $x>0$, 设

$$\widetilde{X}_k=X_kI(X_k\leq\theta x)+\theta xI(X_k>\theta x),\quad k\geq 1,\qquad \widetilde{S}_n=\sum_{k=1}^n\widetilde{X}_k,\quad n\geq 1.$$

从而 $\widetilde{X}_k^+=X_kI(0\leq X_k\leq\theta x)+\theta xI(X_k>\theta x)$, $k\geq 1$. 由 [8] 的性质 P_6 知， $\{\widetilde{X}_k^+:k\geq 1\}$ 也是 NA 列．故对任意 $h>0$ 及 $n\geq 1$, 由 [8] 的性质 P_2, $(e^{ht}-1)t^{-1}$ 关于 t 不降性及初等不等式 $1+u\leq e^u$ 知

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\Big(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i\leq\theta x\}\Big)\leq\mathsf{P}(\widetilde{S}_n>x)\leq e^{-hx}\mathsf{E}e^{h\widetilde{S}_n}\\ \leq\ & e^{-hx}\big(\mathsf{E}e^{h\widetilde{X}_1^+}\big)^n=e^{-hx}\Big(\int_0^{\theta x}e^{ht}F(\mathrm{d}t)+e^{h\theta x}\overline{F}(\theta x)+F(0)\Big)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-hx}\Big(\int_0^{\theta x}(e^{ht}-1)F(\mathrm{d}t)+(e^{h\theta x}-1)\overline{F}(\theta x)+1\Big)^n \\
&\le \exp\Big\{n\int_0^{\theta x}\frac{e^{ht}-1}{t}tF(\mathrm{d}t)+n(e^{h\theta x}-1)\overline{F}(\theta x)-hx\Big\} \\
&\le \exp\Big\{n(e^{h\theta x}-1)(\theta x)^{-1}\int_0^{\theta x}tF(\mathrm{d}t)+n(e^{h\theta x}-1)\overline{F}(\theta x)-hx\Big\} \\
&= \exp\Big\{n(e^{h\theta x}-1)(\theta x)^{-1}\Big(\int_0^{\theta x}tF(\mathrm{d}t)+\theta x\overline{F}(\theta x)\Big)-hx\Big\} \\
&\le \exp\{n(e^{h\theta x}-1)(\theta x)^{-1}\mu_+-hx\}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

在 (3.3) 中取 $h=(\theta x)^{-1}\log(xn^{-1}\mu_+^{-1}+1)\ (>0)$ 得

$$\mathsf{P}\Big(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i\le\theta x\}\Big)\le\exp\{\theta^{-1}-\theta^{-1}\log(xn^{-1}\mu_+^{-1}+1)\}\le\Big(\frac{e\mu_+n}{x}\Big)^{\theta^{-1}}.$$

即 (3.1) 成立．下证 (3.2) 成立．

对于任意的 $\theta>0$, $x>0$, $n\ge1$ 及 $h>0$, 由 (3.3) 及 [8] 的性质 P_2 知

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(S_n>x)\le\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\le\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^+>x\Big) \\
\le\ & \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n\{X_i^+>\theta x\}\Big)+\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^+>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i^+\le\theta x\}\Big) \\
\le\ & n\overline{F}(\theta x)+\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i^+>x\Big)\le n\overline{F}(\theta x)+e^{-hx}\big(\mathsf{E}e^{h\widetilde{X}_1^+}\big)^n \\
\le\ & n\overline{F}(\theta x)+\Big(\frac{e\mu_+n}{x}\Big)^{\theta^{-1}}.
\end{aligned}$$

即 (3.2) 成立．　　#

引理 3.2　设 $\{X_k:k\ge1\}$ 是一同分布 NA 列，具有取值于 $(-\infty,+\infty)$ 的共同 d.f. F. 如果 $F\in\mathcal{L}$ 且满足条件 (2.2). 则对每一个 $n\ge1$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathsf{P}(S_n>x)}{n\overline{F}(x)}\ge1. \qquad (3.4)$$

证明:　设 $\widetilde{X}_i=X_iI(X_i>-h(x))-h(x)I(X_i\le-h(x))$, $i\ge1$. 则对任意 $x>0$ 及 $n\ge1$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(S_n>x)=\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i+\sum_{i=1}^n(X_i-\widetilde{X}_i)>x\Big) \\
=\ & \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i+\sum_{i=1}^n(X_i+h(x))I(X_i\le-h(x))>x\Big) \\
\ge\ & \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i+\sum_{i=1}^n X_iI(X_i\le-h(x))>x\Big) \\
\ge\ & \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i>x+h(x)\Big)-\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_iI(X_i\le-h(x))\le-h(x)\Big) \\
=\ & \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n(\widetilde{X}_i+h(x))>x+(n+1)h(x)\Big)-\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n\{X_i\le-h(x)\}\Big) \\
\ge\ & \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n(\widetilde{X}_i+h(x))>x+(n+1)h(x)\Big)-nF(-h(x)). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

注意到 $\{\widetilde{X}_k : k \geq 1\}$ 是同分布 NA 列且 $\widetilde{X}_k + h(x)$ 非负， $k \geq 1$. 故由 [8] 的性质 P_2 知

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i + h(x)) > x + (n+1)h(x)\Big) \geq \mathsf{P}\Big(\max_{1\leq i\leq n} \widetilde{X}_i > x + nh(x)\Big) \\
\geq\ & \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\widetilde{X}_i > x + nh(x)) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathsf{P}(\widetilde{X}_i > x + nh(x), \widetilde{X}_j > x + nh(x)) \\
\geq\ & n\overline{F}(x + nh(x)) - \big(n\overline{F}(x + nh(x))\big)^2 \sim n\overline{F}(x + nh(x)). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

又由 $h \in \mathcal{H}(F)$ 知

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F}(x+nh(x))}{\overline{F}(x)} &= \frac{\overline{F}(x+nh(x))}{\overline{F}(x+nh(x)-h(x))}\cdot\frac{\overline{F}(x+(n-1)h(x))}{\overline{F}(x+(n-1)h(x)-h(x))}\cdots\frac{\overline{F}(x+h(x))}{\overline{F}(x+h(x)-h(x))} \\
&\geq \frac{\overline{F}(x+nh(x))}{\overline{F}(x+nh(x)-h(x+nh(x)))}\cdots\frac{\overline{F}(x+h(x))}{\overline{F}(x+h(x)-h(x+h(x)))} \to 1. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

由 (3.5), (3.6), (3.7) 及 (2.2) 立得 (3.4). #

引理 3.3 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ 是一同分布的 NA 列，具有取值于 $(-\infty, +\infty)$ 的共同 d.f. F. 如果 $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, $\mu_+ = \mathsf{E}X_1^+ < \infty$. 则对每一个 $n \geq 1$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} \leq 1. \qquad (3.8)$$

证明: 由 $F \in \mathcal{L}$ 及命题 2.1 知存在 $h(x) \in \mathcal{H}(F)$. 取 $\theta > 0$ 且 $\theta^{-1} > \gamma_F$, 则对任意的 $x > 0$ 及 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n > x) &\leq \mathsf{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n} X_j > x - h(x)\Big) + \mathsf{P}\Big(S_n > x, \max_{1\leq j\leq n} X_j \leq x - h(x), \max_{1\leq i\leq n} X_i > \theta x\Big) \\
&\quad + \mathsf{P}\Big(S_n > x, \max_{1\leq i\leq n} X_i \leq \theta x\Big) \\
&\leq n\overline{F}(x - h(x)) + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(S_n - X_i > h(x), X_i > \theta x) + \mathsf{P}\Big(S_n > x, \bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq \theta x\}\Big) \\
&= K_1(x) + K_2(x) + K_3(x). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

由 $h \in \mathcal{H}(F)$ 知

$$K_1(x) \sim n\overline{F}(x). \qquad (3.10)$$

由 $\{X_k : k \geq 1\}$ 的 NA 性， $F \in \mathcal{D}$ 及 $h \in \mathcal{H}(F)$ 知,

$$\frac{K_2(x)}{n\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(\theta x)}{n\overline{F}(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(S_n - X_i > h(x)) \to 0, \qquad x \to \infty. \qquad (3.11)$$

又由引理 3.1 及命题 1.2 知,

$$\frac{K_3(x)}{n\overline{F}(x)} \leq (e\mu_+ n)^{\theta^{-1}} \frac{x^{-\theta^{-1}}}{\overline{F}(x)} \to 0, \qquad x \to \infty. \qquad (3.12)$$

由 (3.9), (3.10), (3.11) 及 (3.12) 知 (3.8) 成立. #

§4. 定理的证明

定理 2.1 的证明： 由引理 3.2 及引理 3.3 知 $\mathsf{P}(S_n > x) \sim n\overline{F}(x)$. 此外，又由引理 3.2, 引理 3.3 及 $\mathsf{P}(S_n > x) \le \mathsf{P}(S_{(n)} > x) \le \mathsf{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^+ > x\Big)$ 知 $\mathsf{P}(S_{(n)} > x) \sim n\overline{F}(x)$. #

定理 2.2 的证明： 我们只证明 $\mathsf{P}(S_\tau > x) \sim \mathsf{E}\tau\overline{F}(x)$, 另一部分类似可证.

对于任意 $x > 0$,

$$\mathsf{P}(S_\tau > x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(S_n > x)\mathsf{P}(\tau = n). \tag{4.1}$$

取 $\theta^{-1} = p$, 由 $F \in \mathcal{D}$ 及命题 1.2 知，存在 $C = C(\theta) > 0$ 及 $x_0 > 0$, 当 $x \ge x_0$ 时,

$$\overline{F}(\theta x) \le C\overline{F}(x), \qquad x^{-\theta^{-1}} \le C\overline{F}(x). \tag{4.2}$$

对上述 θ 及任意 $n \ge 1$, 记 $M = (1 + (e\mu_+)^p)C$, 由引理 3.1 及 (4.2) 知，当 $x \ge x_0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n > x) &\le n\overline{F}(\theta x) + \left(\frac{e\mu_+ n}{x}\right)^{\theta^{-1}} \\ &\le nC\overline{F}(x) + (e\mu_+ n)^{\theta^{-1}} C\overline{F}(x) = (n + (e\mu_+ n)^p)C\overline{F}(x) \\ &\le Mn^p\overline{F}(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

由 (4.1), (4.3), $\mathsf{E}\tau^p < \infty$, 定理 2.1 及控制收敛定理知

$$\mathsf{P}(S_\tau > x) \sim \mathsf{E}\tau\overline{F}(x). \qquad \#$$

定理 2.3 的证明： 由 [8] 的性质 P_2 知，对任意的 $x > 0$ 及 $n \ge 1$,

$$\mathsf{P}(X_{(n)} > x) \ge 1 - F^n(x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n\overline{F}(x). \tag{4.4}$$

又对任意的 $x > 0$ 及 $n \ge 1$,

$$\mathsf{P}(X_{(n)} > x) \le \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k > x) = n\overline{F}(x). \tag{4.5}$$

由 (4.4) 及 (4.5) 知 (2.5) 成立. #

定理 2.4 的证明： 对任意的 $x > 0$,

$$\mathsf{P}(X(\tau) > x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_{(n)} > x)\mathsf{P}(\tau = n). \tag{4.6}$$

由 (4.5), (4.6), $\mathsf{E}\tau < \infty$, 定理 2.3 及控制收敛定理知 (2.6) 成立. #

感谢审稿人的宝贵意见！

参 考 文 献

[1] Wang, D. and Tang, Q., Maxima of sums and random sums for negatively associated random variables with heavy tails, *Statist. Prob. Lett.*, **68**(2004), 287–295.

[2] Foss, S. and Zachary, S., The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments ang negative drift, *Ann. Appl. Prob.*, **13**(2003), 37–53.

[3] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin, 1997.

[4] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Precise estimates for the ruin probability in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, *Stochastic Process Appl.*, **108(2)**(2003), 299–325.

[5] Sgibnev, M.S., On the distribution of the maxima of partial sums, *Statist. Prob. Lett.*, **28**(1996), 235–238.

[6] Ng, K.W. and Tang, Q., Asymptotic behavior of tail and local probabilities for sums of subexponential random variables, *J. Appl. Prob.*, **41**(2004), 108–116.

[7] Alam, K. and Saxena, K.M.L., Positive dependence in multivariate distributions, *Commun. Statist. Theory Meth.*, **10**(1981), 1183–1196.

[8] Joag-Dev, K. and Proschan, F., Negative association of random variables with applitions, *Ann. Statist.*, **11**(1983), 286–295.

[9] Su, C., Zhao, L.C. and Wang, Y.B., Moment inequalities and weak convergence for negatively associated sequences, *Science in China (A)*, **40(2)**(1997), 172–182.

[10] Shao, Q.M., A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables, *J. Theoret. Prob.*, **13**(2000), 343–356.

[11] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G., Subexponentiality of the product of independent random variables, *Stoch. Process. Appl.*, **49**(1994), 75–98.

Notes on the Asymptotics of the Tail Probabilities of Sums for Negatively Associated Random Variables with Heavy Tails

WANG KAIYONG[1,2] WANG YUEBAO[1]

([1] *School of Mathematical Science, Soochow University, Suzhou, 215006*)

([2] *Department of Applied Mathematics, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou, 215009*)

This paper obtains some asymptotics for the tail probabilities of maximum of sums, random sums and maximum of idetically distributed, negatively associated random variables with heavy tails. The obtained results weaken the conditions of the moments of Theorem 2.1 in Wang and Tang (Statist. Prob. Lett., 68, 287–295, 2004). We also discuss the conditions of Theorem 2.2 of [1] and remove the restrictions of the supports of random variables.