应用概率统计　第二十四卷
第二期　2008年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.2 Apr. 2008

保险赔付中的最优对冲策略

董　莹
(大连民族学院理学院, 大连, 116600)

冯敬海
(大连理工大学应用数学系, 大连, 116024)

摘　要

本文对带有付费过程A_t的保险公司在金融市场(S_t, Q_t, B_t)上通过购买股票S_t、兑换外币Q_t以及购买无风险资产B_t的投资过程而采取的最优投资策略, 使保险公司所面临的风险最小进行探讨. 利用Galtchouk-Kunita-Watanabe分解定理将风险表达式重新表达, 从而找到保险公司所能采取的风险最小的最优对冲策略. 文中举出一个具有现实性意义的例子将文章的重要结论加以应用, 使本文更具有应用价值.

关键词: Galtchouk-Kunita-Watanabe分解定理, Girsanov定理, 最优对冲策略, 付费过程, 具有保证的单位联结保险合同.

学科分类号: O211.6, F840.62.

§1.　引　　言

保险公司在对被保险人进行保险赔付的同时又要保证保险公司本身所面临的风险相对较小, 这便促使人们要对保险公司在资金投资上进行研究探讨, 研究保险公司采用什么样的投资组合策略才能使保险公司所面临的风险最小. 保险公司或通过购买股票S_t、或兑换外币Q_t、或以现金流B_t的形式存入银行, 或者同时进行上述的投资过程来进行对冲, 从而保证风险最小. 本文对上述三种投资过程同时进行来探讨.

Föllmer and Sondermann证明了在鞅情形之下平方可积的或有债权存在唯一的可容许的风险最小对冲策略. 本文将付费过程给出了具体的表达且将保险公司的投资方式给与扩展, 应用具有保证的单位联结保险合同进行探讨, 得出了适合保险公司的最优对冲策略.

§2.　模型构建

设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$为概率空间, T为一个固定常数. 考虑一个由三个资本组成的金融市场(S_t, Q_t, B_t), 其中S_t表示保险公司在t时刻购买股票的价值, Q_t表示保险公司在t时刻兑换外币的汇率, B_t为无风险资产. 分别用X_t、Y_t、Z_t记为他们的折现过程, 表示为$X_t =$

本文2005年5月10日收到.

S_t/B_t, $Y_t = Q_t/B_t$, $Z_t = B_t/B_t$. 我们假设(S_t, Q_t, B_t)满足下面的微分方程组

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = r_1(t, S_t, Q_t)S_t\mathrm{d}t + \sigma_1(t, S_t, Q_t)S_t\mathrm{d}W_1(t), \\ \mathrm{d}Q_t = r_2(t, S_t, Q_t)Q_t\mathrm{d}t + \sigma_2(t, S_t, Q_t)Q_t\mathrm{d}W_2(t), \\ \mathrm{d}B_t = r_0(t)B_t\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中$B_0 = 1$, $W_i = (W_t)_{i,0\leq t\leq T,i=1,2}$为标准的Brown运动且$W_1$与$W_2$相互独立. $r_{j\,(j=0,1,2)}$, $\sigma_{k\,(k=1,2)}$满足Lipschitz条件且有界, 那么(2.1)的解存在且唯一. $r_0(t)$表示t时刻的国内利率. 设$\mathcal{G} = (g_t)_{0\leq t\leq T}$为由$(S_t, Q_t, B_t)$生成的自然滤子且已完备化. 由Girsanov定理, 存在概率测度P^*使得X与Y均为鞅. 不妨认为P即为P^*, 我们直接在鞅测度P之下进行讨论.

设策略$\phi_t = (\xi_t, \zeta_t, \eta_t)$满足通常的可测可积条件. 其中$\xi_t$表示为$t$时刻持有股票的数量, ζ_t表示为t时刻兑换外币的数量, η_t表示为t时刻银行的折现存款数量.

各种资金流过程:

(i) 组合价值过程:

$$V_t(\phi) = \xi_t \cdot X_t + \zeta_t \cdot Y_t + \eta_t \cdot 1.$$

即$V_t(\phi)$表示在投资策略ϕ下t时刻的资产折现价值, 且称满足$V_T(\phi) = 0$的策略ϕ为0-容许策略.

(ii) 成本过程:

$$C_t(\phi) = V_t(\phi) - \int_0^t \xi_u \mathrm{d}X_u - \int_0^t \zeta_u \mathrm{d}Y_u + A_t.$$

其中A_t为保险公司付给被保险者的付费过程.

(iii) 本性价值过程:

$$V_t^* = \mathsf{E}[A_T|\mathcal{F}_t].$$

它是T时刻的赔付额在t时的预测值. 可知V_t^*是一个鞅, 由Galtchouk-Kunita-Watanabe分解定理知V_t^*可表示为:

$$V_t^* = \mathsf{E}[A_T|\mathcal{F}_t] = V_0^* + \int_0^t \xi_u^A \mathrm{d}X_u + \int_0^t \zeta_u^A \mathrm{d}Y_u + L_t^A.$$

其中L_t^A是与X, Y均正交的零均值鞅, 且XL_t^A与YL_t^A也均为鞅, ξ_u^A与ζ_u^A为满足可积条件的可料过程.

(iv) 风险过程:

$$R_t(\phi) = \mathsf{E}[(C_T(\phi) - C_t(\phi))^2|\mathcal{F}_t].$$

记它描述的是投资策略ϕ所对应的风险, 我们称使得风险过程$R_t(\phi)$最小的0-容许策略为最优对冲策略.

利用前面的定义与描述, 我们可以得到以下结果:

定理 2.1 在所有的0-容许策略中, 存在唯一的最优对冲策略$\phi=(\xi_t,\zeta_t,\eta_t)$, 其中

$$\xi_t=\xi_t^A,\qquad \zeta_t=\zeta_t^A,\qquad \eta_t=V_t^*-A_t-\xi_t^AX_t-\zeta_t^AY_t$$

能够使得风险$R_t(\Phi)$最小, 最小值为$R_t(\Phi)=\mathsf{E}[(L_T^A-L_t^A)^2|\mathcal{F}_t]$.

证明: 在0-容许策略之下, 由于

$$A_T=V_T^*=V_0^*+\int_0^T\xi_u^A\mathrm{d}X_u+\int_0^T\zeta_u^A\mathrm{d}Y_u+L_T^A=V_t^*+\int_t^T\xi_u^A\mathrm{d}X_u+\int_t^T\zeta_u^A\mathrm{d}Y_u+(L_T^A-L_t^A),$$

所以

$$C_T(\phi)-C_t(\phi)=(V_t^*-A_t-V_t(\phi))+(L_T^A-L_t^A)+\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)\mathrm{d}X_u+\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)\mathrm{d}Y_u.$$

将上式两边同时平方有

$$\begin{aligned}&[C_T(\phi)-C_t(\phi)]^2\\=\;&(V_t^*-A_t-V_t(\phi))^2+(L_T^A-L_t^A)^2+\Big(\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)\mathrm{d}X_u+\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)\mathrm{d}Y_u\Big)^2\\&+2(V_t^*-A_t-V_t(\phi))(L_T^A-L_t^A)\\&+2(V_t^*-A_t-V_t(\phi))\Big(\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)\mathrm{d}X_u+\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)\mathrm{d}Y_u\Big)\\&+2(L_T^A-L_t^A)\Big(\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)\mathrm{d}X_u+\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)\mathrm{d}Y_u\Big).\end{aligned}$$

由于W_1与W_2是相互独立的, 且L^A和X, L^A和Y均正交, 则上式的后三项均为零, 上式第三项的平方项打开后交叉乘积项也为零, 所以

$$\begin{aligned}[C_T(\phi)-C_t(\phi)]^2\;=\;&(V_t^*-A_t-V_t(\phi))^2+(L_T^A-L_t^A)^2+\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)^2\mathrm{d}\langle X,X\rangle_u\\&+\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)^2\mathrm{d}\langle Y,Y\rangle_u.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}R_t(\Phi)\;=\;&\mathsf{E}[(L_T^A-L_t^A)^2|\mathcal{F}_t]+(V_t^*-A_t-V_t(\phi))^2+\mathsf{E}\Big[\int_t^T(\xi_u^A-\xi_u)^2\mathrm{d}\langle X,X\rangle_u|\mathcal{F}_t\Big]\\&+\mathsf{E}\Big[\int_t^T(\zeta_u^A-\zeta_u)^2\mathrm{d}\langle Y,Y\rangle_u|\mathcal{F}_t\Big].\end{aligned}$$

其中$(V_t^*-A_t-V_t(\phi))^2$是$\mathcal{F}_t$可测的, $\mathsf{E}[(L_T^A-L_t^A)^2|\mathcal{F}_t]$与策略$\phi$无关, 其它项依赖于策略$\phi$. 于是, 为了使得$R_t(\Phi)$取最小值, 只需令

$$V_t(\phi)=V_t^*-A_t,\qquad \xi_t=\xi_t^A,\qquad \zeta_t=\zeta_t^A,\qquad \eta_t=V_t^*-A_t-\xi_t^AX_t-\zeta_t^AY_t$$

即可, 此时$R_t(\Phi)$必取得最小值$R_t(\Phi)=\mathsf{E}[(L_T^A-L_t^A)^2|\mathcal{F}_t]$. $\square$

§3. 最优对冲策略在多状态人寿保险中的应用

一、人寿保险模型

1. 模型描述

假设有n个人参加人寿保险, 每个投保人有J种生存状态, $\mathcal{J}=\{0,1,\cdots,J\}$, 比如0表示健康、1表示疾病、2表示死亡$\cdots\cdots$ 以Z_t表示被保险人在t时刻的生存状态, 并假设$Z=(Z_t)_{0\le t\le T}$是F适应的右连续的取值于$\mathcal{J}$的马尔可夫过程, 且Z与(B,S)是独立的. 同时假设各投保人之间的寿命是独立同分布的, 于是可将这n个人的剩余寿命$T_1,T_2,\cdots,T_n$视为来自于同一年龄y的样本.

假设T_i具有风险率(hazard rate)函数$\mu_{y+\tau}$, 定义被保险人的死亡计数过程N=$(N_t)_{0\le t\le T}$为$N_t=\sum\limits_{i=1}^{n}I_{(T_i\le t)}$. 记$(\mathcal{H}_t)=\sigma\{N_u,u\le t\}$, 那么补偿过程$M_t=N_t-\displaystyle\int_0^t\lambda_u\mathrm{d}u$是$(\mathcal{H}_t)$鞅, 其中$\lambda$为$N$的强度由$\mathsf{E}[\mathrm{d}N_t|\mathcal{H}_{t-}]=(n-N_t^-)\mu_{y+t}\mathrm{d}t\equiv\lambda_t\mathrm{d}t$定义. 以下用$\mathcal{F}_t$表示$\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t$的完备化, 并假设$\mathcal{G}_t$和$\mathcal{H}_t$独立.

2. 参数设置

考虑两种基本的赔付方式:

(a) $g_t^{jk}=g^{jk}(t,S_t,Q_t)$表示$t$时刻被保险人由状态$j$到状态$k$变化后保险公司的赔付额(带跳跃的);

(b) $g_t^{j}=g^{j}(t,S_t,Q_t)$表示t时刻被保险人逗留在状态j时保险公司的年度付费(不带跳跃的). 且有

$$\sup_{u\in[0,T]}\mathsf{E}[(B_u^{-1}g^{jk}(u,S_u,Q_u))^2]<\infty,\qquad \sup_{u\in[0,T]}\mathsf{E}[(B_u^{-1}g^{j}(u,S_u,Q_u))^2]<\infty,\qquad (j,k\in\mathcal{J}).$$

该条件确保$\displaystyle\int B^{-1}g^{jk}\mathrm{d}M^{jk}$是平方可积鞅.

在上述假设下保险公司的总赔付可表示为

$$H/B_T=g(T,S_T,Q_T)B_T^{-1}\sum_{i=1}^{n}I_{(T_i>T)}=g(T,S_T,Q_T)B_T^{-1}(n-N_T).$$

其中g为g^{jk}或g^j, $(n-N_T)$是保险到期时仍然生存的人数(一般在T时刻支付的合同称为T-索取权). 这些保险合同利益依赖于被保险人的剩余寿命, 并且与金融市场以及外汇汇率的变化有关. 注意H是$\mathcal{F}_t$-可测的. $g(T,S_T,Q_T)$为保险利益, 这依赖于T时刻的风险资产购买股票的价格以及兑换的外汇汇率, 其形式一般在合同中写明. 例如: $g(T,S_T,Q_T)=\max(K,S_T,Q_T)$, 通常称为具有保证的单位联结保险合同, 其中$K$为合同的最低执行价格.

注 滤子F的选择是非常重要的, 因为一个或有债权通常定义为$\mathcal{F}_t$可测P平方可积的随机变量, 因此债权依赖于过程(B_t,S_t,Q_t)的发展及保险状态Z的不确定性. 而市场(B,S,Q,F)是不完全的, 因此债权不一定是可达的. 但是, 若或有债权$H\in\mathcal{L}^2(\mathcal{G}_T,\mathsf{P})\subseteq\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T,\mathsf{P})$, 则$H$是可达的且可被唯一定价. 因此作为或有债权$g^j(u,S_u,Q_u)$与$g^{jk}(u,S_u,Q_u)$

可被唯一定价, 且其无套利定价过程F^j和F^{jk}为

$$F^j(t,S_t,Q_t,u)=\mathsf{E}[B_tB_u^{-1}g^j(u,S_u,Q_u)|\mathcal{G}_t],$$
$$F^{jk}(t,S_t,Q_t,u)=\mathsf{E}[B_tB_u^{-1}g^{jk}(u,S_u,Q_u)|\mathcal{G}_t],\qquad 0\le t\le u\le T.$$

本文中假设对任意的$j,k\in\mathcal{J}$函数$F^j(t,S_t,Q_t,u)$与$F^{jk}(t,S_t,Q_t,u)$都是连续且可测的, $\partial F^j/\partial t$, $\partial F^{jk}/\partial t$, $\partial^2F^j/\partial S_t^2$, $\partial^2F^{jk}/\partial S_t^2$, $\partial^2F^j/\partial Q_t^2$, $\partial^2F^{jk}/\partial Q_t^2$都是连续的且$\partial F^j/\partial S_t$, $\partial F^{jk}/\partial S_t$, $\partial F^j/\partial Q_t$, $\partial F^{jk}/\partial Q_t$是一致有界的. 那么$F^j(t,S_t,Q_t,u)\cdot B_t^{-1}$与$F^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\cdot B_t^{-1}$都是鞅.

二、与模型相关的主要资金流过程

未折现付费过程$\widehat{A}_t$为

$$\mathrm{d}\widehat{A}_t=\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big(I_t^jg_t^j\mathrm{d}t+\sum_{k:k\neq j}g_t^{jk}\mathrm{d}N_t^{jk}\Big),$$

则折现付费过程可表示为

$$A_t=A_0+\int_0^tB_u^{-1}\mathrm{d}\widehat{A}_t=A_0+\int_0^tB_u^{-1}\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big(I_u^jg_u^j\mathrm{d}u+\sum_{k:k\neq j}g_u^{jk}\mathrm{d}N_u^{jk}\Big).\qquad(3.1)$$

本性价值过程V^*为

$$\begin{aligned}V_t^*&=A_t+\mathsf{E}[(A_T-A_t)|\mathcal{F}_t]=A_t+\mathsf{E}\Big[\int_t^TB_u^{-1}\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big(I_u^jg_u^j\mathrm{d}u+\sum_{k:k\neq j}g_u^{jk}I_u^j\mu_u^{jk}\mathrm{d}u\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big]\\&=A_t+B_t^{-1}\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big[\int_t^Tp_{Z_t,j}(t,u)\Big(F^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big].\end{aligned}$$

若令

$$V^i(t,S_t,Q_t)=\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big[\int_t^Tp_{i,j}(t,u)\Big(F^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big],$$

那么

$$V_t^*=A_t+\sum_{i\in\mathcal{J}}I_t^iV^i(t,S_t,Q_t)B_t^{-1}.$$

三、主要结果

定理 3.1 对于(3.1)式所给出的付费过程A_t, 其0-容许的风险最小的对冲策略为

$$\phi=(\xi,\zeta,\eta)=\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\xi_t^i,\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\zeta_t^i,\sum_{i\in\mathcal{J}}I_t^iV^i(t,S_t,Q_t)B_t^{-1}-X_t\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\xi_t^i-Y_t\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\zeta_t^i\Big),$$

其风险过程最小值为

$$R_t(\Phi)=\sum_{i\in\mathcal{J}}I_t^i\int_t^T\sum_{j,k:j\neq k}\mathsf{E}[(\upsilon_u^{jk})^2|\mathcal{F}_t]p_{ij}(t,u)\mu_u^{jk}\mathrm{d}u.$$

其中:

(a) $\xi_t^i=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}}\Big[\displaystyle\int_t^T p_{Z_t,j}(t,u)\Big(F_s^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F_s^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big]$;

(b) $\zeta_t^i=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}}\Big[\displaystyle\int_t^T p_{Z_t,j}(t,u)\Big(F_q^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F_q^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big]$;

(c) $\upsilon_t^{jk}=B_t^{-1}(g_t^{jk}+V^k(t,S_t,Q_t))-V^j(t,S_t,Q_t))$.

欲证明此定理我们首先要证明下面引理.

引理 3.1 若$V^i(t,S_t,Q_t)\in C^{1,2,2}$, 则

$$V_t^*=V_0^*+\int_0^t\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{u^-}^i\xi_u^i\Big)\mathrm{d}X_u+\int_0^t\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{u^-}^i\zeta_u^i\Big)\mathrm{d}Y_u+\sum_{j,k:j\neq k}\int_0^t\upsilon_u^{jk}\mathrm{d}M_u^{jk},$$

其中$\xi_t^i,\zeta_t^i,\upsilon_t^{jk}$如定理3.1中的(a), (b), (c)所表示.

证明: $V_t^*=A_t+B_t^{-1}f(t,S_t,Q_t,Z_t)$, 令$f(t,s,q,i)=V^i(t,s,q)$, $i\in\mathcal{J}$, 导函数F_s^j, F_s^{jk}, F_q^j, F_q^{jk}是一致有界的.

$$f_s(t,S_t,Q_t,Z_t)=\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big[\int_t^T p_{Z_t,j}(t,u)\Big(F_s^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F_s^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big],$$

$$f_q(t,S_t,Q_t,Z_t)=\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big[\int_t^T p_{Z_t,j}(t,u)\Big(F_q^j(t,S_t,Q_t,u)+\sum_{k:k\neq j}\mu_u{}^{jk}F_q^{jk}(t,S_t,Q_t,u)\Big)\mathrm{d}u\Big].$$

利用分部积分, 有

$$V_t^*=A_t+f(0,S_0,Q_0,Z_0)+\int_0^t f(u,S_u,Q_u,Z_u)\mathrm{d}B_u^{-1}+\int_0^t B_u^{-1}\mathrm{d}f(u,S_u,Q_u,Z_u).\quad(3.2)$$

因为$V^i(t,S_t,Q_t)\in C^{1,2,2}$, 将$(f(t,S_t,Q_t,Z_t))_{0\leq t\leq T}$应用Ito公式有

$$\begin{aligned}f(t,S_t,Q_t,Z_t)&=f(0,S_0,Q_0,Z_0)+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial Q}\mathrm{d}Q\\&\quad+\frac12\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial Q}\mathrm{d}\langle S,Q\rangle_u+\frac12\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mathrm{d}\langle S,S\rangle_u\\&\quad+\frac12\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2}\mathrm{d}\langle Q,Q\rangle_u+\int_0^t J_u^{jk}.\end{aligned}\quad(3.3)$$

其中$f(0,S_0,Q_0,Z_0)=0$, J_u^{jk}为被保险人在u时刻从状态j到状态k的跳跃项. 同时将(3.1), (3.3)代入(3.2)整理可得

$$\begin{aligned}V_t^*&=A_0+\int_0^t B_u^{-1}\sum_{j\in\mathcal{J}}\Big(I_u^jg_u^j\mathrm{d}u+\sum_{k:k\neq j}g_u^{jk}\mathrm{d}N_u^{jk}\Big)+\int_0^t f\mathrm{d}B_u^{-1}+\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u\\&\quad+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}X_u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial Q}\mathrm{d}Y_u+\frac12\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial Q}\mathrm{d}\langle S,Q\rangle_u\\&\quad+\frac12\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mathrm{d}\langle S,S\rangle_u+\frac12\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2}\mathrm{d}\langle Q,Q\rangle_u+\int_0^t J_u^{jk}B_u^{-1}.\end{aligned}\quad(3.4)$$

令

$$\frac{\partial}{\partial s}V^i(t,S_t,Q_t)=\xi_t^i, \qquad \frac{\partial}{\partial q}V^i(t,S_t,Q_t)=\zeta_t^i,$$

所以

$$f_s(t,S_t,Q_t,Z_t^-)=\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\xi_t^i, \qquad f_q(t,S_t,Q_t,Z_t^-)=\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\zeta_t^i.$$

状态Z的跳跃项是

$$J_u^{jk}=f(u,S_u,Q_u,Z_u)-f(u^-,S_{u^-},Q_{u^-},Z_{u^-})=\sum_{j,k:k\neq j}(V^k(u,S_u,Q_u)-V^j(u,S_u,Q_u))\mathrm{d}N_u^{jk}.$$

将J_u^{jk}的表达式代入(3.4), 又因为$\mathrm{d}N_u^{jk}=\mathrm{d}M_u^{jk}+\lambda_u\mathrm{d}u$, 且令$\upsilon_t^{jk}=B_t^{-1}(g_t^{jk}+V^k(t,S_t,Q_t))$ $-V^j(t,S_t,Q_t))$, 有

$$\begin{aligned}V_t^* \;=\;& A_0+\int_0^t B_u^{-1}\sum_{j\in\mathcal{J}}(I_u^j g_u^j)\mathrm{d}u+\int_0^t f\mathrm{d}B_u^{-1}+\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial Q}\mathrm{d}\langle S,Q\rangle_u+\frac{1}{2}\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mathrm{d}\langle S,S\rangle_u+\frac{1}{2}\int_0^t B_u^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2}\mathrm{d}\langle Q,Q\rangle_u\\ &+\sum_{j,k:k\neq j}\int_0^t \upsilon_u^{jk}\lambda_u\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}X_u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial Q}\mathrm{d}Y_u+\sum_{j,k:k\neq j}\int_0^t\upsilon_u^{jk}\mathrm{d}M_u^{jk}.\end{aligned}$$

由于V_t^*与上式等号右边的第一、九、十、十一项都为连续鞅, 而第二、三、四、五、六、七、八项都为有限变差过程, 所以上式的第二、三、四、五、六、七、八项之和为有限变差的连续鞅, 所以为常数零. 又由于$A_0=V_0^*$, 所以上式即为

$$V_t^*=V_0^*+\int_0^t\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{u-}^i\xi_u^i\Big)\mathrm{d}X_u+\int_0^t\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{u-}^i\zeta_u^i\Big)\mathrm{d}Y_u+\sum_{j,k:k\neq j}\int_0^t\upsilon_u^{jk}\mathrm{d}M_u^{jk}.$$

证毕. $\square$

所以利用定理2.1及引理, 定理3.1的证明就是显然的. 其0-容许的最优对冲策略为

$$\phi=(\xi,\zeta,\eta)=\Big(\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\xi_t^i,\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\zeta_t^i,\sum_{i\in\mathcal{J}}I_t^iV^i(t,S_t,Q_t)B_t^{-1}-X_t\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\xi_t^i-Y_t\sum_{i\in\mathcal{J}}I_{t-}^i\zeta_t^i\Big).$$

风险过程最小值为

$$\begin{aligned}R_t(\Phi)\;=\;&\mathsf{E}\Big[\Big(\sum_{j,k:j\neq k}\int_t^T\upsilon_u^{jk}\mathrm{d}M_u^{jk}\Big)^2\Big|\mathcal{F}_t\Big]=\mathsf{E}\Big[\sum_{j,k:j\neq k}\int_t^T(\upsilon_u^{jk})^2\mathrm{d}\langle M,M\rangle_u|\mathcal{F}_t\Big]\\ =\;&\mathsf{E}\Big[\sum_{j,k:j\neq k}\int_t^T(\upsilon_u^{jk})^2\lambda_u^{jk}\mathrm{d}u|\mathcal{F}_t\Big]=\sum_{i\in\mathcal{J}}I_t^i\int_t^T\sum_{j,k:j\neq k}\mathsf{E}[(\upsilon_u^{jk})^2|\mathcal{F}_t]p_{ij}(t,u)\mu_u^{jk}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

§4. 一个算例

现考虑一个具有保证的单位联结保险合同, 其只在被保险人状态变化之时给予付费. 给定状态空间$\mathcal{J}=\{0,1,2\}$, 其中0表示健康, 1表示给定的某种程度的疾病, 2表示意外死亡. 在保证被保险人开始保险的时刻为健康的前提之下, 保险公司对被保险人只进行一次赔付, 之后合同便停止效应. 用T_x^1表示被保险人从保险之日起到患有给定的某种程度的疾病所经过的时间, 用T_x^2表示被保险人从保险之日起到意外死亡所经过的时间. 该险种的数学模型如文章最前面所定义的. 假设状态变化的风险率是相同的均为$\{\mu_t\}$, 状态变换概率为$p_{ij}(t,u)=\exp\Big(-\int_t^u\mu_\tau\mathrm{d}\tau\Big)$, $(i,j=0,1,2)$. 可见该合同的$g^j(t,S_t,Q_t,u)=0$, 则$F^j(t,S_t,Q_t,u)=0$, $(j=0,1,2)$. 令$g^{01}(t,S_t,Q_t,u)=\max(S_t,Q_t)$为被保险人从健康到患有给定的某种程度的疾病所获得的保险利益, $g^{02}(t,S_t,Q_t,u)=\max(S_t,Q_t,Ke^{r_0t})$为被保险人从健康到意外死亡所获得的的保险利益, K为最低收益.

为替该保险公司找到一个风险最小的对冲策略, 我们可以直接运用前面所给出的定理. 首先我们要求出$F^{01}(t,S_t,Q_t,u)$与$F^{02}(t,S_t,Q_t,u)$. 因为

$$F^{01}(t,S_t,Q_t,u)=\mathsf{E}[B_tB_u^{-1}g^{01}(u,S_u,Q_u)|\mathcal{F}_t],$$
$$F^{02}(t,S_t,Q_t,u)=\mathsf{E}[B_tB_u^{-1}g^{02}(u,S_u,Q_u)|\mathcal{F}_t],\qquad(0\le t\le u\le T).$$

本例中假设$r_0(t)$, $r_1(t,S_t,Q_t)$, $r_2(t,S_t,Q_t)$, $\sigma_1(t,S_t,Q_t)$, $\sigma_2(t,S_t,Q_t)$均为常数, 分别记为r_0, r_1, r_2, σ_1, σ_2. 则模型为

$$\begin{cases}\mathrm{d}B_t=r_0B_t\mathrm{d}t;\\ \mathrm{d}S_t=r_1S_t\mathrm{d}t+\sigma_1S_t\mathrm{d}W_1(t);\\ \mathrm{d}Q_t=r_2Q_t\mathrm{d}t+\sigma_2Q_t\mathrm{d}W_2(t),\end{cases}\qquad \text{解得}\begin{cases}B_t=e^{r_0t};\\ S_u=S_te^{(r_1-\sigma_1^2/2)(u-t)+\sigma_1W_1(u-t)};\\ Q_u=Q_te^{(r_2-\sigma_2^2/2)(u-t)+\sigma_2W_2(u-t)}.\end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}F^{01}(t,S_t,Q_t,u)&=\mathsf{E}[e^{-r_0(u-t)}*\max(S_u,Q_u)|\mathcal{F}_t]\\&=\mathsf{E}[e^{-r_0(u-t)}(Q_u+(S_u-Q_u)^+)|\mathcal{F}_t],\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}F^{02}(t,S_t,Q_t,u)&=\mathsf{E}[e^{-r_0(u-t)}*\max(S_u,Q_u,Ke^{r_0u})|\mathcal{F}_t]\\&=\mathsf{E}[e^{-r_0(u-t)}(Ke^{r_0u}+(Q_u+(S_u-Q_u)^+-Ke^{r_0u})^+)|\mathcal{F}_t].\end{aligned}\tag{4.2}$$

令$u-t=\theta$, 先做(4.1)

$$F^{01}(t,S_t,Q_t,u)=\mathsf{E}[e^{-r_0(u-t)}Q_u+e^{-r_0(u-t)}(S_u-Q_u)1_{\{S_u\ge Q_u\}}|\mathcal{F}_t].$$

令

$$a=\frac{\ln(S_t/Q_t)+(r_1-r_2)\theta-[(\sigma_1^2-\sigma_2^2)/2]\theta}{\sigma_2\sqrt{\theta}},$$
$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_1-\sigma_1\sqrt{\theta})N\Big(a+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1\Big)\mathrm{d}x_1,$$

所以运算整理可得

$$\begin{aligned} F^{01}(t,S_t,Q_t,u) &= \mathsf{E}[e^{-r_0\theta}Q_u]+e^{-r_0\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{a+(\sigma_1/\sigma_2)x_1}(S_u-Q_u)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &= Q_te^{(r_2-r_0)\theta}+S_te^{(r_1-r_0)\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_1-\sigma_1\sqrt{\theta})N\Big(a+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1\Big)\mathrm{d}x_1 \\ &\quad -Q_te^{(r_2-r_0)\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_1)N\Big(a+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1-\sigma_2\sqrt{\theta}\Big)\mathrm{d}x_1 \\ &= S_te^{(r_1-r_0)\theta}I(a)+Q_te^{(r_2-r_0)\theta}(1-I(a-\sigma_2\sqrt{\theta})). \end{aligned}$$

再做(4.2)

$$\begin{aligned} F^{02}(t,S_t,Q_t,u) &= \mathsf{E}[(e^{-r_0\theta}S_u-Ke^{r_0t})1_{\{S_u\ge Ke^{r_0u}\}}]1_{\{S_u\ge Q_u\}} \\ &\quad +\mathsf{E}[(e^{-r_0\theta}Q_u-Ke^{r_0t})1_{\{Q_u\ge Ke^{r_0u}\}}]1_{\{S_u<Q_u\}}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\ln(S_t/K)+(r_1-\sigma_1^2/2-r_0)\theta-r_0t}{\sigma_1\sqrt{\theta}}, \\ h_2 &= \frac{\ln(Q_t/K)+(r_2-\sigma_2^2/2-r_0)\theta-r_0t}{\sigma_2\sqrt{\theta}}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} F^{02}(t,S_t,Q_t,u) &= \int_{-h_1}^{+\infty}\varphi(x_1)e^{-r_0\theta}S_uN\Big(a+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1\Big)\mathrm{d}x_1 \\ &\quad -Ke^{r_0t}\int_{-h_1}^{+\infty}\varphi(x_1)N\Big(a+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1\Big)\mathrm{d}x_1 \\ &\quad +\int_{-h_2}^{+\infty}\varphi(x_2)e^{-r_0\theta}Q_uN\Big(a+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x_2\Big)\mathrm{d}x_2 \\ &\quad -Ke^{r_0t}\int_{-h_2}^{+\infty}\varphi(x_2)N\Big(a+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x_2\Big)\mathrm{d}x_2+Ke^{r_0t}. \end{aligned}$$

通过运算整理可得

$$\begin{aligned} F^{02}(t,S_t,Q_t,u) &= Ke^{r_0t}\Big[1-\Big[\sigma_2\exp\Big(-\frac{\sigma_2^2a^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big)N(h_1^{(2)}) \\ &\quad +\sigma_1\exp\Big(-\frac{a^2\sigma_1^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big)N(h_2^{(2)})\Big]\Big/\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big] \\ &\quad +\Big[\sigma_2S_t\exp\Big((r_1-r_0)\theta-\frac{(\sigma_1^2\sqrt{\theta}+\sigma_2a)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big)N(h_1^{(1)}) \\ &\quad +\sigma_1Q_t\exp\Big((r_2-r_0)\theta-\frac{(\sigma_2^2\sqrt{\theta}-a\sigma_1)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\Big)N(h_2^{(1)})\Big]\Big/\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}. \end{aligned}$$

其中a, h_1, h_2如前所定义,

$$h_1^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_2}h_1 - \frac{\sigma_1(a-\sigma_2\sqrt{\theta})}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}, \qquad h_1^{(2)} = h_1^{(1)} - \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}},$$
$$h_2^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1}h_2 + \frac{\sigma_2(a+\sigma_1\sqrt{\theta})}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}, \qquad h_2^{(2)} = h_2^{(1)} - \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

对于这道例题所给出的条件, 在状态空间$\mathcal{J}=\{0,1,2\}$中, 只有被保险者状态在$0\to 1$, $0\to 2$两种情况下发生改变保险公司才会给予赔付. 又由$\mu_u^{jk}=\mu_u$, $p_{00}(t,u)=p_{01}(t,u)=p_{02}(t,u)=\exp\Big(-\int_t^u\mu_\tau\mathrm{d}\tau\Big)$ (其他状态变换概率为0). 则根据前面定理, 可知最优对冲策略$\phi=(\xi_t,\zeta_t,\eta_t)$为

$$\begin{aligned}
\xi_t &= \sum_{i\in\mathcal{J}} I_{t-}^i\xi_t^i \\
&= I_{t-}^0\int_t^T p_{00}(t,u)(\mu_u F_s^{01}(t,S_t,Q_t,u)+\mu_u F_s^{02}(t,S_t,Q_t,u))\mathrm{d}u \\
&= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}\int_t^T e^{-\int_t^u\mu_\tau\mathrm{d}\tau}\mu_u\Big[(\exp((r_1-r_0)\theta)I(a)) \\
&\quad + \frac{\sigma_2\exp((r_1-r_0)\theta-(\sigma_1^2\sqrt{\theta}+\sigma_2 a)^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_1^{(1)})}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Big]\mathrm{d}u, \\
\zeta_t &= \sum_{i\in\mathcal{J}} I_{t-}^i\zeta_t^i \\
&= I_{t-}^0\int_t^T p_{00}(t,u)(\mu_u F_q^{01}(t,S_t,Q_t,u)+\mu_u F_q^{02}(t,S_t,Q_t,u))\mathrm{d}u \\
&= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}\int_t^T e^{-\int_t^u\mu_\tau\mathrm{d}\tau}\mu_u\Big[(\exp((r_2-r_0)\theta)(1-I(a-\sigma_2\sqrt{\theta}))) \\
&\quad + \frac{\sigma_1\exp((r_2-r_0)\theta-(\sigma_2^2\sqrt{\theta}-\sigma_1 a)^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_2^{(1)})}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Big]\mathrm{d}u, \\
\eta_t &= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}B_t^{-1}\int_t^T p_{00}(t,u)\mu_u(F^{01}(t,S_t,Q_t,u)+F^{02}(t,S_t,Q_t,u))\mathrm{d}u - X_t\xi_t - Y_t\zeta_t \\
&= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}B_t^{-1}\int_t^T e^{-\int_t^u\mu_\tau\mathrm{d}\tau}\mu_u\Big\{Ke^{r_0 t} \\
&\quad \cdot\Big[1-\frac{\sigma_2\exp(-\sigma_2^2a^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_1^{(2)})+\sigma_1\exp(-a^2\sigma_1^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_2^{(2)})}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Big] \\
&\quad + S_t e^{(r_1-r_0)\theta}\Big(I(a)+\frac{\sigma_2\exp(-(\sigma_1^2\sqrt{\theta}+\sigma_2 a)^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_1^{(1)})}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Big) \\
&\quad + Q_t e^{(r_2-r_0)\theta}\Big(1-I(a-\sigma_2\sqrt{\theta}) \\
&\quad + \frac{\sigma_1\exp(-(\sigma_2^2\sqrt{\theta}+\sigma_1 m)^2/(2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)))N(h_2^{(1)})}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Big)\Big\}\mathrm{d}u - X_t\xi_t - Y_t\zeta_t.
\end{aligned}$$

最小风险表达为

$$
\begin{aligned}
R_t(\Phi) &= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}\int_t^T \{p_{00}(t,u)\mu_u^{00}\{\mathsf{E}[(\upsilon_u^{01})^2|\mathcal{F}_t]+\mathsf{E}[(\upsilon_u^{02})^2|\mathcal{F}_t]\}\\
&\quad +p_{01}(t,u)\mu_u^{01}\{\mathsf{E}[(\upsilon_u^{10})^2|\mathcal{F}_t]+\mathsf{E}[(\upsilon_u^{12})^2|\mathcal{F}_t]\}\\
&\quad +p_{02}(t,u)\mu_u^{02}\{\mathsf{E}[(\upsilon_u^{20})^2|\mathcal{F}_t]+\mathsf{E}[(\upsilon_u^{21})^2|\mathcal{F}_t]\}\}\mathrm{d}u\\
&= 1_{\{T_x^{1,2}\geq 0\}}\int_t^T e^{-\int_t^u \mu_\tau \mathrm{d}\tau}\mu_u\Big[e^{-r_0 t}((F^{01}(t,S_t,Q_t,u))^2+(F^{02}(t,S_t,Q_t,u))^2)\\
&\quad -2e^{-r_0 u}(F^{01}(t,S_t,Q_t,u)+F^{02}(t,S_t,Q_t,u))\\
&\quad \cdot\int_t^u e^{-\int_t^x \mu_\tau \mathrm{d}\tau}\mu_x(F^{01}(t,S_t,Q_t,x)+F^{02}(t,S_t,Q_t,x))\mathrm{d}x\\
&\quad +4e^{-r_0(2u-t)}\int_t^u e^{-\int_t^x \mu_\tau \mathrm{d}\tau}\mu_x(F^{01}(t,S_t,Q_t,x)+F^{02}(t,S_t,Q_t,x))^2\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

其中$F^{01}(t,S_t,Q_t,x)$与$F^{02}(t,S_t,Q_t,x)$的表达式为将前面给出的$F^{01}(t,S_t,Q_t,u)$与$F^{02}(t,S_t,Q_t,u)$的表达式中的θ $(\theta=u-t)$变为θ' $(\theta'=x-t)$.

由此, 该例题所给出的此险种的最优对冲策略$\phi=(\xi,\zeta,\eta)$就由上面的计算得到了, 最小风险$R_t(\phi)$也由上面给出来了.

§5. 结　语

保险公司要定期的或在被保险人突发某种意外事件时给与付费, 本文将此付费过程用一个付费流A_t描述, 并且令保险公司在金融市场(S_t,Q_t,B_t)上通过购买股票S_t、兑换外币Q_t以及购买无风险资产B_t来进行投资, 从而保证保险公司所面临的风险最小. 基于这一目的, 本文利用Galtchouk-Kunita-Watanabe分解定理将给出的风险表达式在此要求的金融市场模型之下重新表达, 从而找到保险公司所能采取的最优对冲策略. 文章后面举出了一个具有现实性意义的例子将文中的重要结论加以应用, 给出了一个较为具体与完善的最优对冲策略的表达, 对于保险公司规避风险具有一定的现实性意义.

参 考 文 献

[1] Möller, T., Risk-minimizing hedging strategies for insurance payment process, *Finance and Stochastics*, **5**(2001), 419–446.

[2] Nguyen, X., Hedging of contingent claims in incomplete markets, *STAT 250 Project Report*, Springer, 2002.

[3] Rheinländer, T. and Schweizer, M., On L^2-projections on a space of stochastic integrals, *The Annals of Probability*, **4**(1997), 1810–1831.

[4] Colwell, D., El-Hassan, N., Kwon, O.K., Hedging Diffusion Processes by Local Risk-Minimisation with Applications to Index Tracking, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney Research Paper Series.

[5] Lamberton, D. and Lapeyre, B., *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 2–6 Boundary Row, London SEI 8HN, UK. 1996.

[6] 王春发, 随机利率权益连结保险合同的局部风险最小化, 系统工程学报, **19(2)**(2004), 141–147.

[7] 杜立金, 刘继春, 汤思英, 局部风险最小下保险合约的套期保值, 厦门大学学报, **43(3)**(2004), 302–305.

The Hedging Strategies of Optimization in Insurance Payment Processes

DONG YING

(*College of Sciences, Dalian Nationalities University, Dalian, 116600*)

FENG JINGHAI

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian, 116024*)

In this paper we discuss the insurance companies with payment process A_t hedge their risk to the level of minimax by buying stocks S_t, exchanging foreign – currency Q_t and buying risk – free asset B_t in the financial market (S_t, Q_t, B_t). In virtue of Galtchouk-Kunita-Watanabe Decomposition Theorem, the expression of risk is expressed over again. Then we get the hedging strategies of optimization with minimal risk. It gives out a realistic example to apply the important conclusion in this paper, which makes this paper to be more practical.

Keywords: Galtchouk-Kunita-Watanabe Decomposition Theorem, Girsanov Theorem, the hedging strategies of optimization, payment processes, unit-linked insurance contracts with guarantee.

AMS Subject Classification: 60H30.