第 28 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 28, No. 1
2002 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 2002

短文

线性时滞系统的输入-输出能量解耦[1)]

毛维杰 褚 健
（浙江大学先进控制研究所，工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027）
（E—mail：wjmao@iipc.zju.edu.cn）

摘 要 提出一种针对具有时变时滞的线性时滞系统的能量解耦方法，即从输入-输出的能量关系上实现解耦，使得任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量，对其它输出能量的影响尽可能小. 该解耦方法兼有静态解耦与动态解耦的特点. 所有结论均由线性矩阵不等式描述.

关键词 线性时滞系统，时变时滞，解耦控制，线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号 TP13

INPUT-OUTPUT ENERGY DECOUPLING OF LINEAR TIME-DELAY SYSTEMS

MAO Wei-Jie CHU Jian
(*National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
(E-mail: wjmao@iipc.zju.edu.cn)

Abstract This paper presents an input-output energy decoupling method for linear systems with time-varying delay. It is an approximate decoupling method, under which the energy of every input controls mainly the energy of a corresponding output and influences the energy of other outputs as weakly as possible. The decoupling performance of this method is a compromise between the dynamic decoupling and the static decoupling. The results are obtained in terms of LMIs.

Key words Linear time-delay systems, time-varying delay, decoupling control, linear matrix inequality(LMI)

1 引言

近年来有关时滞系统的稳定与镇定问题已引起了广大学者的广泛关注，并取得了许多

1) 国家自然科学基金(60004002，69934030)资助.
收稿日期 1999-09-23 收修改稿日期 2001-03-12

成果,但其中解耦控制的应用却研究得甚少.解耦控制从解耦程度上的不同一般可分为全解耦[1~3]与近似解耦. Sename[4,5]基于全解耦思想研究了具有多率定常时滞的线性时滞系统的解耦控制问题,具有很大的应用局限性.从解耦的时间特性上来看,解耦控制又能分为动态解耦与静态解耦.静态解耦的设计与实现均非常简单,但只适用于输入为阶跃信号的情况.从控制效果上看,动态解耦比较理想,但其设计与实现的代价比较高.特别是针对时滞系统,动态解耦往往意味着控制器的非因果性.本文试图寻找一种折衷的方法,即从输入-输出的能量关系上实现近似解耦.使得任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量,对其它输出能量的影响尽可能小,因此称之为输入-输出能量解耦方法.

2 问题的提出

考虑如下具有时变时滞的线性时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h(t)) + B\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), \quad t \in [-h_{\max}, 0),\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为系统状态,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 为系统输入,$\boldsymbol{y}(t)\in R^m$ 为系统输出,同时满足 $m\leqslant n$,A_0, A_1, B, C, D 分别为具有相应维数的定常矩阵,且 $\det D\neq 0$. $\Phi(t)$是一个连续的矢量初值函数,$h(t)$表示系统的时变时滞,且满足

$$0\leqslant h(t)\leqslant h_{\max}<\infty,\quad \dot{h}(t)\leqslant d<1,$$

式中 $h_{\max}, d$ 均为常数.寻求状态反馈与输入变换控制率

$$\boldsymbol{u}(t) = F\boldsymbol{x}(t) + G\boldsymbol{v}(t) \tag{2}$$

使得闭环系统的任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量,而对其它输出能量的影响尽可能小.其中 $\boldsymbol{v}(t)\in R^m$ 为变换后新的系统输入;F, G 分别为具有相应维数的定常矩阵.上述输入-输出能量解耦过程可归纳为:寻求 $F\in R^{m\times n}, G\in R^{m\times m}$,满足

$$\int_0^\tau y_i^{\mathrm{T}}(t)v_i(t)\mathrm{d}t\geqslant\alpha_i\int_0^\tau v_i^{\mathrm{T}}(t)v_i(t)\mathrm{d}t,\ \forall\ \tau\geqslant 0,\ v_j=0(j\neq i),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{3}$$

$$\int_0^\tau \hat{y}_i^{\mathrm{T}}(t)\hat{y}_i(t)\mathrm{d}t\leqslant\beta_i\int_0^\tau v_i^{\mathrm{T}}(t)v_i(t)\mathrm{d}t,\ \forall\ \tau\geqslant 0,\ v_j=0(j\neq i),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{4}$$

其中 $\hat{y}_i(t)\in R^{m-1}$表示 $\boldsymbol{y}(t)$中除 $y_i(t)$分量外的所有其它分量组成的向量,α_i, β_i 为给定的正常数.

定义 1. 对于具有时变时滞的线性时滞系统(1),如果存在矩阵 F, G,满足条件(3),(4),且闭环系统渐近稳定,则称该系统为输入-输出能量$(\alpha,\beta|F,G)$解耦的.

3 主要结果

对于具有时变时滞的线性时滞系统(1),如果其本身是渐近稳定的,则(2)式可简化为仅具输入变换部分,即 $\boldsymbol{u}(t)=G\boldsymbol{v}(t)$.

定理 1. 渐近稳定的线性时滞系统(1)为输入-输出能量$(\alpha,\beta|0,G)$解耦的,如果存在矩阵 $X_i, Y_i>0, i=1,2,\cdots,2m$,满足

$$\begin{bmatrix} X_iA_0^{\mathrm{T}}+A_0X_i+\dfrac{1}{1-d}A_1X_{m+i}A_1^{\mathrm{T}} & X_i & B\boldsymbol{g}_i-X_iC_i^{\mathrm{T}} \\ X_i & -X_{m+i} & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-C_iX_i & 0 & 2\alpha_iI-(D_i\boldsymbol{g}_i+\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} Y_iA_0^{\mathrm{T}}+A_0Y_i+\dfrac{1}{1-d}A_1Y_{m+i}A_1^{\mathrm{T}} & Y_i & B\boldsymbol{g}_i & Y_i\hat{C}_i^{\mathrm{T}} \\ Y_i & -Y_{m+i} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}} \\ \hat{C}_iY_i & 0 & \hat{D}_i\boldsymbol{g}_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I \end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{g}_i\in R^m$ 表示 G 的 i 列，$\hat{C}_i\in R^{(m-1)\times n}$表示 C 中除 C_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵，$\hat{D}_i\in R^{(m-1)\times m}$表示 D 中除 D_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵.

证明. 系统(1) 经输入变换后，针对每一个输入 $v_i(t)$，可分解为下述子系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) &= A_0\boldsymbol{x}_i(t)+A_1\boldsymbol{x}_i(t-h(t))+B\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{v}_i(t) \\ \boldsymbol{y}_i(t) &= C\boldsymbol{x}_i(t)+D\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{v}_i(t) \end{aligned}, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

根据线性系统的叠加原理，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2+\cdots+\boldsymbol{y}_m$. 由于在以下的推导过程中都是针对某个特定子系统，为描述方便，将省去 $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$ 的下标. 针对上述子系统，构造二次函数

$$V_i(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_i\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\sigma)P_{m+i}\boldsymbol{x}(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$W_i(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_i\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\sigma)Q_{m+i}\boldsymbol{x}(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $P_i,Q_i>0$, $i=1,2,\cdots,2m$. 进一步定义

$$M_i(t)=\dot{V}_i(t,\boldsymbol{x})-2\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i+2\alpha_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i\leqslant$$

$$z_{M_i}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_0+P_{m+i} & P_iA_1 & P_iB\boldsymbol{g}_i-C_i^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}P_i & -(1-d)P_{m+i} & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_i-C_i & 0 & 2\alpha_iI-(D_i\boldsymbol{g}_i+\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}z_{M_i},$$

$$N_i(t)=\dot{W}_i(t,\boldsymbol{x})-\beta_i^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i+\beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{y}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}_i\leqslant$$

$$z_{N_i}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm{T}}Q_i+Q_iA_0+Q_{m+i} & Q_iA_1 & Q_iB\boldsymbol{g}_i & \hat{C}_i^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}Q_i & -(1-d)Q_{m+i} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_i & 0 & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}} \\ \hat{C}_i & 0 & \hat{D}_i\boldsymbol{g}_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I \end{bmatrix}z_{N_i},$$

其中 $z_{M_i}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}(t)]$, $z_{N_i}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}(t)\quad \beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{y}}_i^{\mathrm{T}}]$. 令 $X_i=P_i^{-1}$, $Y_i=Q_i^{-1}$，则当条件(5)，(6)成立时，经过简单变换就有 $M_i(t)\leqslant 0$, $N_i(t)\leqslant 0$，对其分别从 0 到 τ 积分，利用零初始条件，可以得到

$$\int_0^{\tau}M_i(t)\mathrm{d}t=V_i(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))-\int_0^{\tau}(2\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i-2\alpha_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}t\leqslant 0,$$

$$\int_0^{\tau}N_i(t)\mathrm{d}t=W_i(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))+\int_0^{\tau}(\beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{y}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}_i-\beta_i^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}t\leqslant 0.$$

因此，对所有 $\tau\geqslant 0$，总有

$$\int_0^\tau y_i^{\mathrm{T}} v_i \mathrm{d}t \geqslant \alpha_i \int_0^\tau v_i^{\mathrm{T}} v_i \mathrm{d}t, \quad \int_0^\tau \hat{y}_i^{\mathrm{T}} \hat{y}_i \mathrm{d}t \leqslant \beta_i \int_0^\tau v_i^{\mathrm{T}} v_i \mathrm{d}t.$$

另外，把二次函数 $V_i(t,\boldsymbol{x})$ 或 $W_i(t,\boldsymbol{x})$ 作为 Lyapunov 函数，很容易验证当 $\boldsymbol{v}(t)=0$ 时，$\dot{V}_i(t,\boldsymbol{x})<0$，$\dot{W}_i(t,\boldsymbol{x})<0$，即条件(5)或(6)可保证系统渐近稳定.　　证毕.

对于具有时变时滞的线性时滞系统(1)，如果其本身是不稳定的，可考虑同时具有状态反馈和输入变换的能量解耦问题.

定理 2. 具有时变时滞的线性时滞系统(1)为输入-输出能量$(\alpha,\beta|F,G)$解耦的，如果存在矩阵 Z 及矩阵 $X>0, X_{m+i}, Y_{m+i}>0$，$i=1,2,\cdots,m$，满足

$$\begin{bmatrix} XA_0^{\mathrm{T}}+A_0X+Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BZ+\frac{1}{1-d}A_1X_{m+i}A_1^{\mathrm{T}} & X & B\boldsymbol{g}_i-XC_i^{\mathrm{T}}-Z^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}} \\ X & -X_{m+i} & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-C_iX-D_iZ & 0 & 2\alpha_iI-(D_i\boldsymbol{g}_i+\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} XA_0^{\mathrm{T}}+A_0X+Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BZ+\frac{1}{1-d}A_1Y_{m+i}A_1^{\mathrm{T}} & X & B\boldsymbol{g}_i & X\hat{C}_i^{\mathrm{T}}+Z^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}} \\ X & -Y_{m+i} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}} \\ \hat{C}_iX+\hat{D}_iZ & 0 & \hat{D}_i\boldsymbol{g}_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I \end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{g}_i\in R^m$ 表示 G 的 i 列，$\hat{C}_i\in R^{(m-1)\times n}$表示 C 中除 C_i 行外的所有其它行组成的矩阵，$\hat{D}_i\in R^{(m-1)\times m}$表示 D 中除 D_i 行外的所有其它行组成的矩阵. 且状态反馈矩阵为

$$F = ZX^{-1} \tag{9}$$

参考文献

1　Morgan B S. The synthesis of linear multivariable systems by state feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1964, **9**(10):405～411

2　Falb P L, Wolovich W A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1969, **12**(6):651～659

3　Morse A S, Wonham W M. Status of noninteracting control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1971, **16**(6):568～581

4　Sename O, Rabah R, Lafay J F. Decoupling without prediction of linear systems with delays: A structured approach. *Sys. & Control Lett.*, 1995, **25**(3):387～395

5　Sename O, Lafay J F. Decoupling of square linear systems with delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(5):736～742

毛维杰　1991 年毕业于浙江大学，1996 年获浙江大学工学博士学位，现为浙江大学副教授. 主要研究方向为时滞系统控制、解耦控制、鲁棒控制等理论与应用.

褚　健　1982 年毕业于浙江大学，1986～1989 年留学日本京都大学，1989 年获工学博士学位，现为浙江大学教授、博士生导师、“长江学者奖励计划”特聘教授. 主要研究方向为时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制等理论与应用.