产品的容差设计

朱鸿鹗　陈海强　陈柏孙

提　要

本文是《产品的参数设计》一文的续篇。对于性能不可计算的产品，可用方差分析的方法确定参数的容差；对于性能可以计算的产品，直接计算更为方便；最后讨论蒙特卡洛法，更加接近实际的生产过程。

产品的参数设计完成之后，就要进行容差设计。容差设计是在产品性能指标 y 规定的偏差范围内，合理选择各个参数的容许偏差，使产品的性能最稳定，成本最低。我们知道当产品的参数偏离其设计值时，它们对性能 y 的影响程度是各不相同的，容差设计要在参数设计的基础上，进一步研究参数对性能的影响。对于影响小的参数，选择元器件时可以采用容差较大的低挡元件，对于影响大的参数，要采用容差较小的高挡元件。我们先用方差分析法讨论性能不可计算产品的容差设计。

一、方差分析法

我们仍以惠斯登电桥为例说明方差分析法，假定待测电阻 $y=20000\Omega$，通过参数设计我们选定 $A=220\Omega$，$B=2000\Omega$，$D=15\Omega$，$E=15V$，$F=200\Omega$。当电桥平衡时 $x=0$，$C=2200\Omega$。

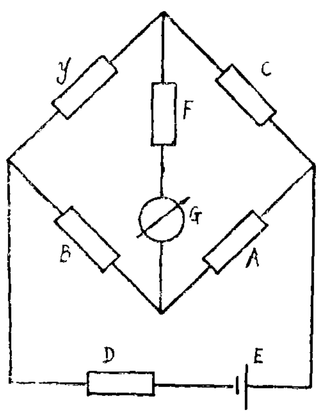

图 1　惠斯登电桥

假定电阻的容差为 $\pm 0.3\%$，电动势的容差为 $\pm 5\%$，电流计的偏差为 $\pm 10^{-7}$ 安培，用这样的元件组装电桥时必然会使 y 产生偏差，我们要用方差分析法，计算 y 的均方偏差，同时确定各个参数的容差对于 y 的均方偏差的贡献，从而求出在确定的 y 的均方偏差条件下，应该怎样选择各个参数的容差，或者在选定的参数的另一组容差下，求出 y 的均方偏差。

以选定的这组参数作位级 2，並根据给定的容差作误差因素位级表(表 1) 然后根据表 1 作正交试验表 (表 2)。根据表 2 中的各个条件，分别按参数的位级进行测量，求得在指定参数位级下的 y 值，减去常数 20000 后，记在表 2 最后一列。

由于参数的偏差，使性能 y 偏离了 20000Ω。根据表 2 中 18 项 y_i，求 y 的偏差平方和称为 y 的总变动。

$$S_T=\sum_{i=1}^{18}(y_i-y_0)^2=\sum_{i=1}^{18} y_i^2-2y_0\sum_{i=1}^{18} y_i+18\bar{y}_0^2=\sum_{i=1}^{18} y_i^2-18\bar{y}_0^2=129748 \tag{1}$$

1981 年 7 月 24 日收到初稿　1982 年 3 月 5 日收到修改稿

表1　误差因素位级表

因　素	$A(\Omega)$	$B(\Omega)$	$C(\Omega)$	$D(\Omega)$	$E(V)$	$F(\Omega)$	$x(A)$
位　级 1	219.34	1994	2193.4	14.955	14.25	199.4	-10^{-7}
位　级 2	220	2000	2200	15	15	200	0
位　级 3	220.66	2006	2206.6	15045	15.75	200.6	$+10^{-7}$

表2　正交试验表

条件 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	
因素	$A(\Omega)$	$B(\Omega)$	$C(\Omega)$	$D(\Omega)$	$E(V)$	$F(\Omega)$	$x(A)$	y_i
1	1	1	3	2	2	1	2	60
2	2	1	1	1	1	2	1	−117
3	3	1	2	3	3	3	3	−124
4	1	2	2	1	2	3	1	63
5	2	2	3	3	1	1	3	56
6	3	2	1	2	3	2	2	−120
7	1	3	1	3	1	3	2	60
8	2	3	2	2	3	1	1	63
9	3	3	3	1	2	2	3	56
10	1	1	1	1	3	1	3	− 64
11	2	1	2	3	2	2	2	− 60
12	3	1	3	2	1	3	1	− 57
13	1	2	3	3	3	2	1	123
14	2	2	1	2	2	3	3	− 64
15	3	2	2	1	1	1	2	− 60
16	1	3	2	2	1	2	3	116
17	2	3	3	1	3	3	2	120
18	3	3	1	3	2	1	1	− 57
y_I	358	−362	−362	−2	−2	−2	18	
y_{II}	−2	−2	−2	−2	−2	−2	0	$y_0=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} y_i=-\frac{1}{3}$
y_{III}	−362	358	358	−2	−2	−2	−24	

于是 y 的均方偏差 V_T 为

$$V_T=\frac{1}{18-1}\sum_{i=1}^{18}(y_i-y_0)^2=\frac{1}{17}S_T=7632 \tag{2}$$

可以把 $3\sqrt{V_T}$ 看作是 y 的容许偏差，如果 $3\sqrt{V_T}$ 比 y 实际容许的偏差大，不符合产品的性能要求时，应该减小参数的容差，从而使 $3\sqrt{V_T}$ 下降到需要的数值，而如果 $3\sqrt{V_T}$ 比实际容许偏差小时，可以放宽参数的容差，使 $3\sqrt{V_T}$ 达到需要的数值。当然各参数的偏差对于 V_T 的贡献是不相同的。

令 S_A 表示因素 A 在三个位级下的平均值 y_{A_1}，y_{A_2}，y_{A_3} 与总平均值 y_0 的差的平方和，称之为 y 由 A 因素产生的变动。注意 $y_{A_1}=\frac{y_{IA}}{6}$，y_{IA} 是 y_i 在因素 A 取位级 1 时的和，因为表 2 中位级 1 共有六项，故须除以 6 才是 y_{A_1}，同理 $y_{A_2}=\frac{y_{IIA}}{6}$，$y_{A_3}=\frac{y_{IIIA}}{6}$。因此

$$S_A=6(y_{A_1}-y_0)^2+6(y_{A_2}-y_0)^2+6(y_{A_3}-y_0)^2$$

这里因素 A 取位级1，2，3 各有六项，所以需乘 6。用 $y_{A_1}=\frac{y_{IA}}{6}$，…代入

$$\begin{aligned}S_A&=6\left(\frac{y_{IA}}{6}-y_0\right)^2+6\left(\frac{y_{IIA}}{6}-y_0\right)^2+6\left(\frac{y_{IIIA}}{6}-y_0\right)^2\\&=\frac{(y_{IA})^2}{6}+\frac{(y_{IIA})^2}{6}+\frac{(y_{IIIA})^2}{6}+18y_0{}^2-6\times2\times y_0\times\left(\frac{y_{IA}}{6}+\frac{y_{IIA}}{6}+\frac{y_{IIIA}}{6}\right)\\&=\frac{(y_{IA})^2}{6}+\frac{(y_{IIA})^2}{6}+\frac{(y_{IIIA})^2}{6}-18y_0{}^2=43200\end{aligned} \tag{3}$$

用同样的方法可以求出因素 B，C，…，x 的变动 S_B，S_C，…，S_x。当正交表存在空列时，S_T 不等于各个因素变动之和，其差称为误差项变动 S_e

$$S_e=S_T-(S_A+S_B+S_C+\cdots+S_x) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_T&=S_A+S_B+S_C+\cdots+S_x+S_e=S_T\left(\frac{S_A}{S_T}+\frac{S_B}{S_T}+\frac{S_C}{S_T}+\cdots+\frac{S_e}{S_T}\right)\\&=S_T(P_A+P_B+P_C+\cdots+P_e)\end{aligned}$$

式中 $P_A=\frac{S_A}{S_T}\times100\%$，$P_B=\frac{S_B}{S_T}\times100\%$ …… $P_e=\frac{S_e}{S_T}\times100\%$ (5)

分别表示因素 A，B,… 的偏差对于 y 总变动的贡献，当然 P 值大的就表示该因素对于 y 的总变动的影响大，P 值小的表示该因素对 y 的总变动的影响小，当参数的容差在所规定的偏离值的附近变动时，P_A，P_B,… 都将变动，这时 y 的总变动可以写作

$$S=S_T(P'_A+P'_B+\cdots+P'_e) \tag{6}$$

显然当参数取表 1 的三个位级时 $S=S_T$

因为按表 2，共进行了 18 次测定，y 的均方偏差 $V=\frac{S}{18-1}$，根据(2)式 $V_T=\frac{S_T}{18-1}$，所以

$$V=V_T(P_A'+P_B'+\cdots\cdots+P_e') \tag{7}$$

表 3 因素偏离对总变动的影响

因 素	S	P	素 因	S	P	因 素	S	P
A	43200	0.333	D	0	0	x	148	0.001
B	43200	0.333	E	0	0	e	0	0
C	43200	0.333	F	0	0	T(总变动)	129748	1

要减小产品性能 y 的均方偏差，就必须减小参数的容差，例如因素 A 原来的波动幅度为 $H_A=0.66\Omega$ 变动后波动的幅度 $H'_A=0.33\Omega$（即 A 的容差减到 $\pm0.15\%$），那末由因素 A 对均方偏差 V 的贡献，将从 $V_T\cdot P_A$ 减小到 $V_T P_A'$，$P'_A=P_A\left(\frac{H'_A}{H_A{}^2}\right)$，理由将在下节给出。同理因素 B，C，…的波动幅度差由 H_B, H_C，… 分别降到 H'_B H'_c，…，变动后均方偏差将是

$$V=V_T(P'_A+P'_B+P'_c+\cdots\cdots+P_e)=V_T\left[P_A\left(\frac{H'_A}{H_A}\right)^2+P_B\left(\frac{H'_B}{H_B}\right)^2+P_C\left(\frac{H'_C}{H_C}\right)^2+\cdots+P_e\right] \quad (8)[4]$$

从这个关系式明显可见，如果要减小 y 的均方偏差，以减小 P 值较大的因素的容差，比较有利。

在上面的例子中我们如果将因素 A，B 的容差由 $\pm0.3\%$ 减到 $\pm0.01\%$，C 的容差由 $\pm0.3\%$ 减到 $\pm0.03\%$；则

$$\left(\frac{H'_A}{H_A}\right)=\left(\frac{A\times0.01\%}{A\times0.3\%}\right)^2=\left(\frac{1}{30}\right)^2,\quad \left(\frac{H'_B}{H_B}\right)^2=\left(\frac{B\times0.01\%}{B\times0.3\%}\right)=\left(\frac{1}{30}\right)^2,$$

$$\left(\frac{H'_c}{H_c}\right)^2=\left(\frac{C\times0.03\%}{C\times0.3\%}\right)^2=\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

容差减小以后，y 的均方偏差将是

$$V=V_T\left[P_A\left(\frac{1}{30}\right)^2+P_B\left(\frac{1}{30}\right)^2+P_C\left(\frac{1}{10}\right)^2+P_D+\cdots+P_e\right]=38.69$$

因此用方差分析法进行容差设计的步骤可归纳如下：

1．当系统的参数确定之后，根据因素初步选定的容差，作误差因素位级表。

2．根据因素的数目和位级，列出正交试验表，同时安排实验，求得数据，並从这些测得的数据求出性能的总变动 S_T 和均方偏差 V_T

3．通过正交试验表的每一列，求出各个因素的变动 $S_{因}$，及 $S_{因}$ 在总变动 S_T 中占的百分比 $P_{因}$。

4．如果 $3\sqrt{V_T}$ 不能满足性能指标 y 的容差要求，根据实际情况，调整因素的变动幅度 $H_{因}'$，並用(8)式求得调整后的均方偏差，或者根据 V_T 的要求确定各因素的容差。

二、产品性能可以计算时，直接计算的方法

以上讨论了用正交试验表及方差分析求得各因素对产品性能 y 影响的大小，实质上就是求因素对性能 y 的灵敏度。在指定的一组参数下，$\left|\frac{\partial y}{\partial A}\right|$ 大的，灵敏度高，参数变化对 y 的影响大，$\left|\frac{\partial y}{\partial A}\right|$ 小的，灵敏度低，参数变化对 y 的影响也小。对于性能不可计算的产品，我们只能通过上面的方法来求得其均方偏差及参数对它的影响，但是如果产品性能 y 可以计算的话，完全可以省去繁琐的正交试验而直接用下面的方法进行设计。

我们需要求的性能 y 的均方偏差

$$V=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-y)^2 \quad (9)$$

对于七因素三位级的情况，原则上应取 $N=3^7$。但当 y 与因素 A，B，C，……x 之间存

在函数关系

$$y=f(x,\ A,\ B,\ c,\cdots)$$

时，根据前文[1]的证明，其均方偏差

$$V_T=\frac{2}{3}V_0=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x\right)^2\right]$$

$$=\frac{2}{3}V_0\left[\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2}{V_0}+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2}{V_0}+\cdots\cdots+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x\right)^2}{V_0}\right]$$

$$=\frac{2}{3}V_0\left[P_A+P_B+P_C+\cdots\cdots+P_x\right]=V_T\left[P_A+P_B+P_C+\cdots\cdots+P_x\right]$$

当参数的波动幅度 $\varDelta A$，$\varDelta B$，……变动时，P_A，P_B……也将随之变动，因而均方偏差也将变化。

$$V=V_T\left[P'_A+P'_B+P'_C+\cdots\cdots+P'_x\right] \tag{10}$$

跟(7)式不同的地方是这里没有误差项 P_e。

要减小输出性能指标 y 的均方偏差，就必须减小参数的容差。如果因素 A 原来的波动幅度为 $\varDelta A=H_A$，变动后的波动幅度为 $H'_A=\varDelta A'$，则 $P_A=\dfrac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2}{V_0}$，而

$$P'_A=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A'\right)^2}{V_0}=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2}{V_0}\cdot\left(\frac{\varDelta A'}{\varDelta A}\right)^2=P_A\left(\frac{H'_A}{H_A}\right)^2$$

同理 $P'_B=P_B\left(\dfrac{H'_B}{H_B}\right)^2$，　$P'_C=P_C\left(\dfrac{H'_C}{H_c}\right)^2$，……，因此

$$V=V_T\left[P_A\left(\frac{H'_A}{H_A}\right)^2+P_B\left(\frac{H'_B}{H_B}\right)^2+P_c\left(\frac{H'_C}{H_C}\right)^2+\cdots\cdots+P_x\left(\frac{H'_x}{H_x}\right)^2\right] \tag{11}$$

就是前面求得的方程(8)

为了进行验证，我们仍以上面的惠斯登桥为例来进行说明，已知图 1 中的 y 可由下式计算

$$y=\frac{B\cdot C}{A}-\frac{X}{EA^2}\left[F(A+B)+B(A+C)\right]\left[C(A+B)+D(A+C)\right] \tag{12}$$

在 $A=220\Omega$，$B=2000\Omega$，$C=2200\Omega$，$D=15\Omega$，$E=15V$，$F=200\Omega$，$x=0$ 的条件下，已知 $\varDelta A=0.66\Omega$，$\varDelta B=6\Omega$，$\varDelta C=6.6\Omega$，$\varDelta D=4.5\times10^{-2}\Omega$，$\varDelta E=0.75V$，$\varDelta F=0.6\Omega$，$\varDelta x=10^{-7}A$，同时 $\dfrac{\partial y}{\partial D}=\dfrac{\partial y}{\partial E}=\dfrac{\partial y}{\partial F}=0$，求出 $\dfrac{\partial y}{\partial A}$，$\dfrac{\partial y}{\partial B}$，$\dfrac{\partial y}{\partial C}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x}$，于是

$$V_0=\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial C}\varDelta C\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x\right)^2=10812.8$$

$$V_T=\frac{2}{3}V_0=7208.5$$

$$P_A=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2}{V_0}=0.333 \qquad P_B=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2}{V_0}=0.333$$

$$P_C=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial C}\varDelta C\right)^2}{V_0}=0.333 \qquad P_x=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x\right)^2}{V_0}=0.001$$

这样求出的结果跟用方差法得到的结果是一致的。虽然不论用上节的方法还是本节的方

法算到的结果相同,但对于性能可以计算的产品,用直接计算法是比较方便的,特别是在因素很多的情况,尤其明显。改进后的容差设计步骤如下:

1. 根据产品性能 y 与参数 A, B, C,…… 之间的函数关系,以及参数的偏差 $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$,… 求出 $\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2$, $\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2$, $\left(\frac{\partial y}{\partial C}\varDelta C\right)^2$, …,比较那些因素产生的影响较为显著。

2. 计算 $V_0=\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial C}\varDelta C\right)^2+\cdots\cdots$, $V_T=\frac{2}{3}V_0$, $P_A=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\varDelta A\right)^2}{V_0}$, $P_B=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial B}\varDelta B\right)^2}{V_0}$, ……,並建立方程(11)

3. 根据给定的 H_A', H_B' ……求出 y 的均方偏差 V, 或根据给定的 V 确定 H_A', H_B' ……。

三、蒙特卡洛法

以上两节,都假定产品的参数是三点分布的,即因素 A, B,…, 只可能有 A, $A\pm\varDelta A$, B, $B\pm\varDelta B$ … 等三种数值,而且参数的三种数值的概率是相等的,这显然不符合实际情况,因而用上面分析得到的结果是近似的。根据中心极限定理,对于大量的独立变量求和,不管这些变量的实际概率分布如何,和的概率分布趋近于正态分布,若元件参数 x 符合正态分布则其分布函数 $F(x)$ 及概率密度函数 $f(x)$ 为:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{14}$$

式中平均值 x_0 可取元件的标称值,标准偏差 σ 等于元件容差的三分之一,即 $\sigma=\frac{\varDelta x}{3}$。例如 $300\Omega\pm10\%$ 的电阻, $x_0=300$ $\varDelta x=300\times10\%=30$, $\sigma=\frac{\varDelta x}{3}=10$。

蒙特卡洛法是根据元件参数的实际分布,用随机抽样的方法,抽取若干组参数,从而研究产品性能 y 的分布情况。假定产品性能 y 是 n 个参数 x_1, x_2, $\cdots x_n$ 的函数,即 $y=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, 假定这 n 个参数是相互独立的,它们的分布函数分别为 $F(x_1)$, $F(x_2)$, $\cdots F(x_n)$。首先从分布 $F(x_1)$ 中随机抽样,得到参数 x_1', 相当于在一批 x_1 的元件中,随机取出一个数值为 x_1' 的元件,然后从分布 $F(x_2)$ 中随机抽取 x_2',……直到抽出第 n 个元件 x_n',然后根据 x_1', x_2', $\cdots x_n'$ 算出 y 的一个随机值: $y_1=f(x_1', x_2', \cdots\cdots x_n')$。重复上述过程 N 次,就可以得到随机变量 y 的一个容量为 N 的样本: y_1, y_2, $y_3\cdots y_N$。根据样本 y_1, y_2, $\cdots y_N$ 就可以计算产品性能 y 的平均值 y_0 和方差 V

$$y_0=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i \tag{15}$$

$$V=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-y_0)^2 \tag{16}$$

$\sqrt{V}$ 称为 y 的标准偏差,它的三倍,即 $3\sqrt{V}$ 可以看出是 y 的容许误差,当 y 的计算出的容许偏差 $3\sqrt{V}$ 大于其设计要求的容许偏差 $\varDelta y$ 时,表示产品参数的容差不符合要求。这时应该

适当缩小某些参数的容差，重新计算y_0和 V，直到符合要求为止。

用蒙特卡洛法进行容差设计时，首先要从分布函数为 $F(x)$ 的元件中，随机抽取 x。随机抽样的方法是：先利用计算机产生一个在(0, 1)区间均匀分布的随机数 ξ_i，然后计算 $F(x)$ 的反函数得到

$$x_i = F^{-1}(\xi_i) \tag{17}$$

x_i 就是符合 $F(x)$ 分布的参数的一个随机数值[2]。具体地说，如果我们要摸拟从 $300\pm10\%\Omega$ 的一批电阻中，随机取出一个电阻的阻值，假定这批电阻是服从正态分布的，我们先从计算机中产生一个在(0, 1) 区间均匀分布的随机数，假定取得数是 $\xi_i=0.4$，求(14)式的反函数得 $x_i=F^{-1}(\xi_i)=298$ 相当于从这批电阻中取出一个阻值为 298Ω 的电阻。

用(14)式求反函数实际上並不方便，因为不同的元件有不同的标称值 x_0 和不同的标准偏差 σ，因而有不同的分布函数，对每个元件都要建立一个与之相应的分布函数是很麻烦的，为此对(14)式进行下面的变换

令
$$u=\frac{x-x_0}{\sigma} \tag{18}$$

代入(14)式得

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\, du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{19}$$

$F(u)$ 为标准正态分布函数，$F(u)$ 和 u 的关系可以通过查标准正态分布函数表求得(表4)

表4 标准正态分布函数 $F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

u	−3.0	−3.1	−3.2	−3.3	−3.4	−3.5				
$F(u)$	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002				
u	−2.0	−2.1	−2.2	−2.3	−2.4	−2.5	−2.6	−2.7	−2.8	−2.9
$F(u)$	0.0228	0.0179	0.0139	0.0107	0.0082	0.0062	0.0047	0.0035	0.0026	0.0019
u	−1.0	−1.1	−1.2	−1.3	−1.4	−1.5	−1.6	−1.7	−1.8	−1.9
$F(u)$	0.1587	0.1357	0.1151	0.0968	0.0808	0.0668	0.0548	0.0446	0.0359	0.0287
u	0.0	−0.1	−0.2	−0.3	−0.4	−0.5	−0.6	−0.7	−0.8	−0.9
$F(u)$	0.5000	0.4611	0.4207	0.3821	0.3446	0.3085	0.2743	0.2420	0.2119	0.1805
u	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(u)$	0.5000	0.5389	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881	0.8195
u	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$F(u)$	0.8413	0.9643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
u	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$F(u)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981
u	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5				
$F(u)$	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998				

抽样时先由计算机产生一个在(0，1)区间均匀分布的随机数ξ_i，如果

$$F(u_{i-1})<\xi_i\leqslant F(u_i)$$

则令 $u=u_i$，然后用(18)式求 x

$$x=x_0+u\cdot\sigma$$

得到元件随机值 x。例如元件是 $300\Omega\pm10\%$ 的电阻，则 $x_0=300$，$\sigma=\dfrac{\Delta x}{3}=\dfrac{300\times10\%}{3}=10$。

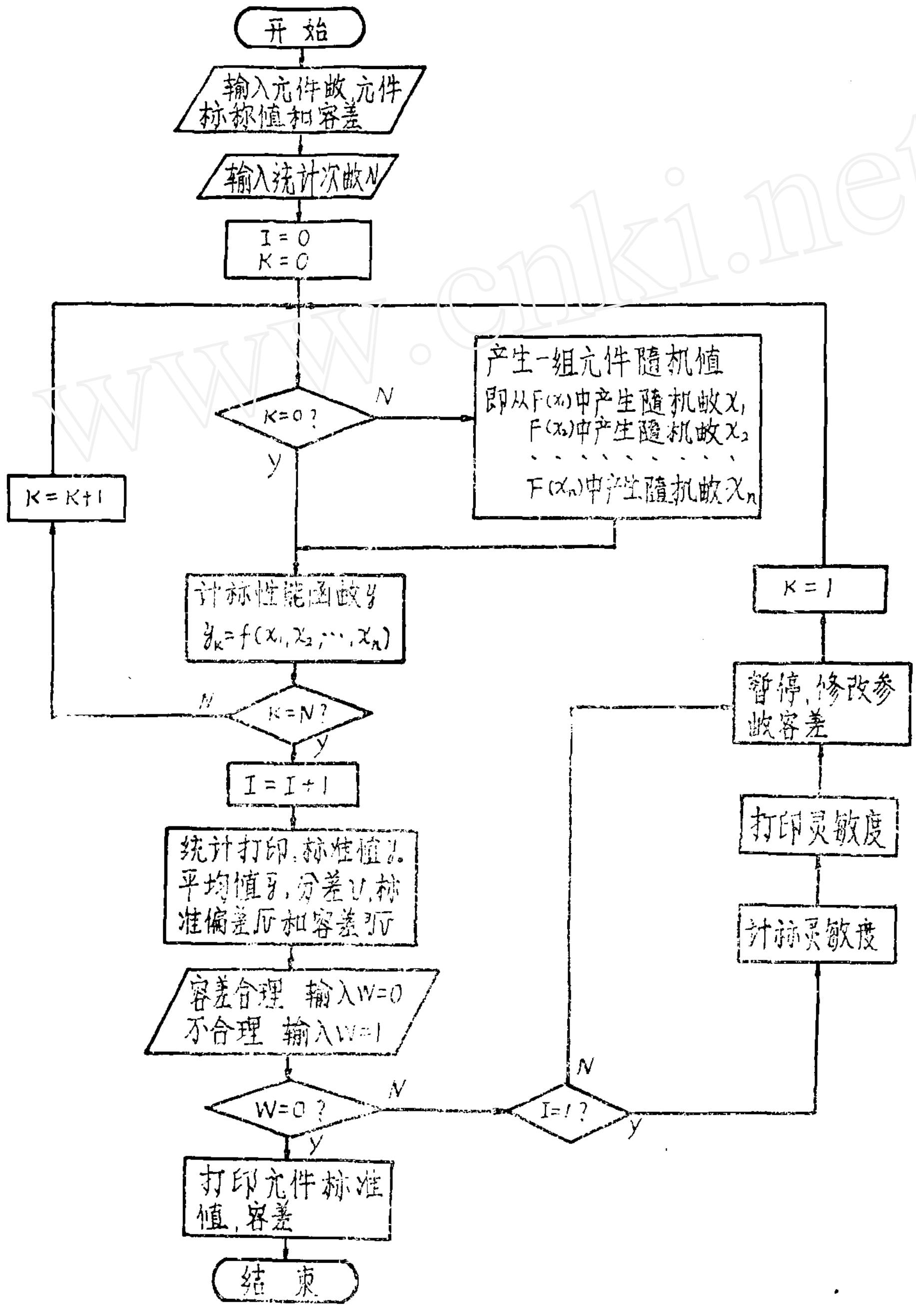

图2 蒙特卡洛容差分析程序框图

若计算机产生的随机数为 0.6910，查表四得 $u=0.5$，于是 $x=x_0+u\cdot\sigma=300+0.5\times 10=305\Omega$。

根据上述原理就可以建立蒙特卡洛分析程序，程序框图见图 2，容差设计按下述步骤进行：

1．输入元件数，元件的标准称值和元件的容差，并输入统计次数 N，一般要求 $N>10$。

2．$K=0$ 时，先用元件的标称值计算产品性能 y 的标准值 y，$K=1, 2, \cdots N$ 时，产生元件的 N 组随机抽样值(x_1，x_2，$\cdots x_n$)，并按这 N 组参数值计算产品性能函数 y_k，反复执行 N 次，共得到 y 的 N 个样本。

3．令 $I=1$，对 N 个样本计算统计，并打印出 y 的标准值 y，平均值 y_0，方差 V，标准偏差 $\sqrt{V}$ 和 y 的容许偏差 $\Delta y=3\sqrt{V}$。程序暂停。

4．根据对 y 的性能要求，判别 y 的容差是否符合要求，如果符合要求，输入 $w=0$；如不符合要求，就输入 $w=1$。

5．如 $w=0$，计算机打印元件的标称值及容差，程序结束。如 $w=1$，判断 $I=1$ 否？如 $I=1$ 表示程序第一次进入本步骤，先计算产品性能 y 对各参数的偏导数，即元件的灵敏度，将灵敏度打印输出，由设计者根据实际情况，修改元件容差，再次计算 y_k，即回到2，并令 $I=I+1$；

如 $I>1$ 表示不需要再计算灵敏度，可直接修改容差后进入 2。

我们仍以图 1 的惠斯登桥为例来进行设计，各元件的参数值和容差见表 1，假定要求电桥的测量精度是 0.05 级，即测量误差为 5/10000。若被测电阻 $y=20000\Omega$，要求偏差 $\Delta y\leqslant 10\Omega$。用蒙特卡洛程序分析，根据初步确定的元件容差，第一次执行结果是：

标准值 y	平均值 y_0	均方偏差 v	标准偏差 $\sqrt{v}$	容差 $3\sqrt{v}$
20000	20006.8	1247.37	35.3181	105.954

从结果看到，计算得到的 y 容差 $3\sqrt{V}=105.954>10$，因此如果采用原定容差的元件组装电桥，精度是达不到 0.05 级的。为了寻找合理的元件容差，先进行一次灵敏度分析，求出 A 因素的 $\frac{\partial y}{\partial A}\cdot\frac{A}{y}$，$B$ 因素的 $\frac{\partial y}{\partial B}\cdot\frac{B}{y}$，$\cdots$，得到：

因　素	A	B	C	D	E	F	x
灵敏度	-1	1	1	0	0	0	1.79×10^4

可以看到 A、B、C 三个因素对 y 的影响较大，考虑到 C 是可变电阻，因此主要减小 A，B 因素的容差来达到电桥要求的精度。令 A 的容差为 $\pm 0.01\%$，B 为 $\pm 0.01\%$，C 为 0.05%，第二次执行结果为：

y	y_0	v	$\sqrt{v}$	$3\sqrt{v}$
20000	20001.7	25.8999	5.08919	15.2676

第二次结果仍不符合要求，因此再调整元件的容差，A、B 仍为 $\pm 0.01\%$，令 C 为 $\pm 0.03\%$，得到：

y	y_e	v	$\sqrt{v}$	$3\sqrt{v}$
20000	20000.4	5.67152	2.3815	7.14449

结果符合要求,因此最后选定元件的标称值和容差为:

元件	$A(\Omega)$	$B(\Omega)$	$C(\Omega)$	$D(\Omega)$	$E(V)$	$F(\Omega)$	$x(A)$
标称值	220	2000	2200	15	15	200	0
容差	0.01%	0.01%	0.03%	0.3%	5%	0.3%	10^{-7}

四、小 结

本文讨论了方差分析法及改进的直接计算法进行容差设计。前者适用于产品性能不可计算的场合,在一组选定的参数下,对参数适当给予扰动,建立误差因素位级表和正交试验表,並根据正交试验表的安排进行测量,得到一组结果,由此结果求出方差 V_T。然后再从正交试验表中找出各因素对方差 V_T 的贡献,即找出 P_A, P_B, P_C……, 改变参数的容差,即改变 P_A, P_B,… 重新计算符合性能要求的方差 V, 从而确定因素应取的容差。

如果产品的性能函数 y 可以根据参数来计算, 那么用第二节讨论的直接计算 P_A, P_B,… 的方法较为方便,它可以避免建立繁复的正交试验表。在因素很多的情况下,正交表的建立和计算是相当麻烦的, 而且用这种方法得到的 P_A, P_B,… 和 V_T 的精度等于用方差法得到的。在建立方程V和 V_T 的关系之后,计算的方法是一致的。表 2 中 y_i 的一组数据实际上是根据(12)式算出来的,用来对两种方法进行比较, 结果是一致的。后面这种方法虽然简单,但只适用于产品性能可以计算的情况。

上面两种方法都只计算了因素在三个位级下的方差,用蒙特卡洛法和上述方法不同,它在因素服从某种分布 (如正态分布) 的条件下随机抽样取出, 由随机抽出的一组参数进行计算性能指标 y, 求出N个样本以后,再求方差。因为因素是假定服从正态分布的,因此抽到的参数值在其标称值附近的概率是很大的,它跟方差分析法只有三点分布(A, $A\pm\Delta A$)不同, 因此用蒙特卡洛法在同样的容差下,得到的方差小得多,也更近于实际的情况。

参 考 文 献

[1] 朱鸿鹗等《产品的参数设计》上海师范学院学报(自然科学版) 1982年第1期
[2] 李惕碚《实验的数学处理》1980年科学出版社
[3] 田口玄一《实验计画法》上第三版丸善株式会社 1976年
[4] 田口玄一《质量管理教材(线外QC)》 中部品质管理协会 1979年