产品的参数设计

朱鸿鹗　陈海强　陈柏孙

提　　要

本文介绍产品三次设计中的参数设计法。对于不可计算性能的产品,可以通过正交设计方法建立外表和内表,算出均方偏差,从而确定最好参数组合。对于可计算性能的产品,利用性能与参数之间的函数关系,省去内表直接建立外表,使计算工作量大大减少,结果更加准确。

产品的设计,一般可分三个阶段进行,它们是:系统设计、参数设计和容差设计,总称为三次设计。

系统设计是由专业人员根据产品的性能要求,确定整个系统和结构,並选定一组能满足要求的参数。这组参数並不一定是最好的参数。在生产过程中或者在使用阶段,由于参数的偏差或者由于元件老化,环境影响等因素使参数产生变化,都将引起产品性能的变化。选用不同的参数组时,由于相同的原因产生的性能变化,将是各不相同的。参数设计就是在系统设计的基础上,寻找一组好的参数,使生产或使用时产品性能最为稳定,波动最小。本文主要用正交设计法来进行参数设计。在产品的性能指标可以计算的情况下,可以通过计算机迅速求出设计结果。参数设计完成之后,还要根据产品性能所容许的偏差来确定各个参数容许的偏差,以便采用适当的元件来组装产品,使产品的成本最低。我们用惠斯登电桥来说明参数设计的方法,但这种方法不仅适用于电子产品,也适用于其它产品。

一、产品的参数设计

图1是惠斯登电桥,A, B, D, F 是已知电阻,y 是待测电阻,调节电阻 C 使电流计 G 的读数为零,则根据

$$y=\frac{B\cdot C}{A} \tag{1}$$

可以求出 y 的阻值。

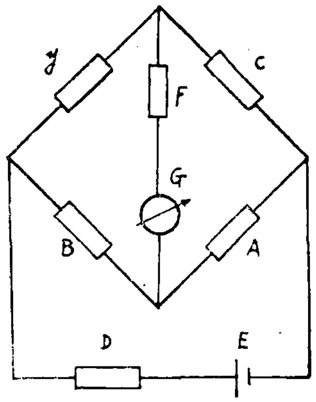

图1　惠斯登电桥

由于电流计的精度限制,当电流计的读数为零时,仍可能有小量的电流流过,假定电流计读数为零时的最大电流为 x 安培。同时,电阻的阻值 A, B, C, D, F 以及电动势E也都存在误差。如果按某一组 $A, B, C\cdots$ 测出的 y 是正确的,考虑到这些误差后,y就产生了误差。待测电阻 y 真正的数值与 x 及 A, B, C, D 等参数的实际值有关。

假定流过 G 的电流 x 及元件的偏差都已知道,为了求得 y

本文1981年7月14日收到

的误差可能有两种方法。一种是根据实际的元件值及电流值,用模拟电路测出 y 的正确值,即通过测量求得 y;另一种方法是产品性能 y 可以通过某种关系式来计算的场合,这时 y 的真正值可以通过参数 $A, B, C, \cdots x$ 等的确切数值来进行计算。参数设计所考虑的问题就是在元件偏差确定的情况下,如何寻找参数 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等,使得到的 y 的误差最小。当产品性能无法计算时,我们只能用实测的方法求得 y,由此寻找最佳参数组,这是本节讨论的方法。当产品性能可以计算时,采用改进的方法进行参数设计,可使计算工作量大为减少,这一方法在下节讨论。

假定图 1 中电桥要测量的电阻是 20000Ω,在 G 的读数为零时,流过 G 的电流可能有 $\pm 10^{-7}A$ 的偏差,所有电阻都有 ±0.3% 的偏差,电动势有 ±5% 的偏差,並且假定 E 的值不允许超过 15V,电阻 D 不小于 15Ω,F 不小于 200Ω,我们可以用两种方法来设计其参数:

第一种方法的设计步骤是:

第一步:确定因素的位级

我们把电桥的参数 A, B, D, E, F 称为因素,任取一组数值作初始条件,定为位级 2。然后以位级 2 的 $\frac{1}{K_n}$ 倍作为位级 1,以位级 2 的 K_n 倍作为位级 3。假定 $K_n = 1 + \frac{K_0}{2^{n-1}}$,$K_0 = 4$,令 $n = 1, 2, 3, \cdots$,则当第一轮 $n=1$ 时 $K_1 = 5$,第二轮 $n=2$ 时 $K_2 = 3, \cdots$。K_n 随着 n 的增大逐步减小,关于 K_n 选择的物理意义将在下面说明。当 $K_1 = 5$ 时,可以得到下面的位级表:

表 1 $K_1=5$ 的因素位级表

因　素	A(Ω)	B(Ω)	D(Ω)	E(v)	F(Ω)
位　级　1	200	200	200	0.4	200
位　级　2	1000	1000	1000	2	1000
位　级　2	5000	5000	5000	10	5000

$A=B=D=F=1000$,$E=2$ 是我们选取的初始条件。

第二步:建立外表

表 1 中共有五个因素,每个因素有三个位级。把因素 $A, B, \cdots$ 等分裂成三个位级的目的,就是要在因素的这一范围内,优选出一组好的参数。由于 A 有三种选法,B 有三种选法,$C\cdots$,因此在这一范围内优选共有 3^5 种搭配方法,通过这些参数的组合,寻找好的参数组。为了减少试验的次数,采用正交试验法,选用 $L_{18}(3^7)$ 的正交表来进行优选。$L_{18}(3^7)$ 是从 $L_{18}(2^1 \times 3^7)$ 中舍去二位级后得到的。我们将 A, B, D, E, F 五个因素,填入正交表的五列中,得到表 2,称为外表。外表的第 1 列表示试验次数,这里共进行 18 次,外表的最右一列及下面四行将在第三步内表建立之后进行填写。

第三步:建立误差因素位级表和内表並寻找直接看到的好条件

外表的第一行,称为第 1 号条件,就是选 A 因素的位级 1,B 因素的位级 1,D 因素的位级 1,…… 进行一次试验,也就是取 $A=200$,$B=200$,$D=200$,$E=0.4$ $F=200$ 进行一次试验。因为要确定 y 除了 A, B, D, E, F 之外还必须知道 x 及 c,所以我们取 $x=0$ 及 $c=\frac{Ay}{B}$(这时 $y=20000$),又因为电阻有 ±0.3% 的偏差,电动势有 ±5% 的偏差,电流 x 有 $\pm 10^{-7}$ 安培的偏差,所以我们把 $A=200$,$B=200$,$C=20000$,$D=200$,$E=0.4$,

表 2　$K_1=5$ 的外表

	A	B	D	E	F	V
1	1	1	1	1	1	71279
2	1	2	2	2	2	9660·37
3	1	3	3	3	3	10559·7
4	2	1	3	2	2	305351
5	2	2	1	3	3	7325·16
6	2	3	2	1	1	31254
7	3	1	3	1	3	2·82497E+7
8	3	2	1	2	1	18798·5
9	3	3	2	3	2	7298·41
10	1	1	1	3	2	7319·07
11	1	2	2	1	3	226659
12	1	3	3	2	1	10388·5
13	2	1	2	3	1	8560·36
14	2	2	3	1	2	470626
15	2	3	1	2	3	10351
16	3	1	2	2	3	421866
17	3	2	3	3	1	8722·58
18	3	3	1	1	2	58260·3
1	335866	2·90641E+7	173333	2·91078E+7	149003	
2	833467	741791	705293	776415	858514	
3	2·87646E+7	128112	2·90554E+7	49785·3	2·89265E+7	
R	2·84288E+7	2·8936E+7	2·8882E+7	2·9058E+7	2·87775E+7	

$F=200$，$x=0$ 作为位级 2，而以 (电阻位级 1)$=(1-0.003)$ (电阻位级 2)，(电阻位级 3)$=(1+0.003)$ (电阻位级 2)，$E_1=(1-0.05)\ E_2$，$E_3=(1+0.05)E_3$，$x_1=-10^{-7}$，$x_3=10^{-7}$，作出外表第 1 号条件的误差因素位级表 (表 3)。

表 3　外表第 1 号条件的误差因素位级表

因　　素	A	B	C	D	E	F	X
位　级　1	199.4	199.4	19940	199.4	0.38	199.4	-10^{-7}
位　级　2	200	200	20000	200	0.4	200	0
位　级　3	200.6	200.6	20060	200.6	0.42	200.6	10^{-7}

对于外表的 18 号条件，都应该根据因素可能出现的偏差，列出相应的误差因素位级表。显然在每一号条件下假定元件只能取位级 1，2，3 三种数值，这跟实际发生的情况是存在一定距离的。並且，对于每一号条件的误差因素位级表中的因素要进行 3^7 次组合，才能求出在各种情况下的电阻 y，然后计算 y 的平均值及其均方偏差 v，这样的计算工作量也是很大的。为了简化计算，仍采用正交设计的方法，根据正交表 $L_{18}(3^7)$ 的 18 种均匀搭配，求出 18 个 y 值，並以 20000 作为平均值，按照下式计算均方偏差 v 的近似值

$$v=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(y_i-20000)^2 \tag{2}$$

显然 y_i 越接近 20000，均方偏差 v 越小。因此 v 可以作为惠斯登桥设计性能优良程度的指标，我们称为目标函数。

表 4　$K_1=5$ 的外表第一号条件的内表

	A	B	C	D	E	F	X	yi
1	1	1	1	1	1	1	1	20264.4
2	1	2	2	2	2	2	2	20060.2
3	1	3	3	3	3	3	3	19380.7
4	2	1	1	2	2	3	3	19573.2
5	2	2	2	3	3	1	1	20295.5
6	2	3	3	1	1	2	2	20120.2
7	3	1	2	1	3	2	3	19588
8	3	2	3	2	1	3	1	20326.7
9	3	3	1	3	2	1	2	19940
10	1	1	3	3	2	2	1	20372
11	1	2	1	1	3	3	2	20000
12	1	3	2	2	1	1	3	19791
13	2	1	2	3	1	3	2	19948
14	2	2	3	1	2	1	3	19748.5
15	2	3	1	2	3	2	1	20294.5
16	3	1	3	2	3	1	2	19940
17	3	2	1	3	1	2	3	19557.2
18	3	3	2	1	2	3	1	20308.4

$$v=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(yi-20000)^2\approx 71279$$

表 4 是根据表 3 中各个因素的三个位级，再利用 $L_{18}(3^7)$ 建立的正交表，称为 $K_1=5$ 外表中第 1 号条件的内表，並由 (2) 式计算均方偏差 v，把它记在表 2 第一行，即第 1 号条件的右边。对 $K_1=5$ 外表中其余的十七号条件，仿照表 3 及表 4，算出相应的均方偏差 v 填入表 2 右侧相应各列中，最后从表 2 可以看出第 9 号条件的 v 值最小，我们将此条件称为**直接看到的好条件**，因为采用这一条件时，均方偏差最小。

在表 2 的每个因素下面，根据各个条件的 v 求出和 I, II, III 与极差 R，对于因素 A 来说，A_I 是因素 A 在取位级 1 时，所有 v 之和，A_2 是取位级 2 时所有 v 之和，……因此有：

$$A_I=71279+9660.37+10559.7+7319.07+\cdots\cdots=335866$$

$$A_{II}=305351+7325.16+31254+8560.36+\cdots\cdots=833467$$

$$A_{III}=2.82497\times10^7+18798.5+7298.41+421866+\cdots\cdots=2.87646\times10^7$$

$$A_R=A_{III}-A_I=2.84288\times10^7$$

……………………………

第四步：寻找计算得到的好条件

从表 2 看到第 9 号条件的目标函数最小，是直接看到的好条件，利用正交设计，还能进一步算出目标函数值更小的好条件，称为**计算得到的好条件**。为此先把表 2 最后四行重写于下：

	A(Ω)	B(Ω)	D(Ω)	E(v)	F(Ω)
I	335866	2.90641×10^7	173333	2.91078×10^7	149003
II	833467	741791	705298	776415	858514
III	2.87646×10^7	128112	2.90544×10^7	49785.3	2.89265×10^7
R	2.84288×10^7	2.8936×10^7	2.8882×10^7	2.9058×10^7	2.87775×10^7

从 F 来看，F_I 最小，因此取 F 的位级 1 最为有利，而且 $F_{III}>F_{II}>F_I$，因此 F 的取值越小，越是有利，至少在 F 从 5000 到 200 这段是这样。

从 E 来看，E_{III} 最小，因此取 E 的位级 3 最有利，而且 $E_I>E_{II}>E_{III}$，所以 E 值越大越有利。

对 D 来说，D_I 最小，因此取 D 的位级 1 最有利。

但从物理条件来看，F 是电流计内阻，D 是电源内阻，不可能任意取得很小，它要受到电流计和电源的限制。E 也不能任意取得很大，在本例中，F 不小于 200Ω，D 不小于 15Ω，E 不大于 15V。

对 A 来说，A_I 最小，因此取 A 的位级 1；对 B 来说，B_{III} 最小，因此取 B 的位级 3。在我们现在所考虑的范围之内，A 越小，B 越大，越是有利。

从以上的分析可以看到，如果 A，B，D，E，F 的位级，按照 1，3，1，3，1 来选取比较有利。这个条件称为第一种方法**计算得到的好条件**。一般说来，计算得到的好条件比直接看到的条件来得好一些，但是由于各个因素之间的交互作用，计算得到的好条件也可能比直接看到的好条件差，所以必须把这个条件再次利用类似于表 4 的内表，计算它的目标函数，将结果和直接看到的好条件进行比较，取其中较好的条件作为参数设计的好条件。在本例中由 A，B，D，E，F 的位级 1，3，1，3，1 算得的目标函数 $v=7228.87$，比直接看好条件算出的 $v=7298.41$ 更好。

以上过程称为第一轮参数设计，第一轮参数设计的好条件是位级 1，3，1，3，1。如果第一轮的参数还不够理想，可以重复以上四个步骤进行第二轮，第三轮…的设计。每一轮的设计均以上一轮设计的好条件作为基础，利用分析得到的各因素的变化趋势，确定新的因素位级表。

表 5　$K_2=3$ 的因素位级表

因　素	A	B	D	E	F
位 级 1	(22)	5000	(22)	(1.7)	200
位 级 2	(67)	(15000)	(67)	(5)	(600)
位 级 3	200	(45000)	200	15	(1800)

表 5 是令 $n=2$，$K_2=3$ 的因素位级表。因为 A 的趋势越小越好，所以取上一轮的好条件 $A_1=200$ 作为位级 3；B 越大越好，取 $B_3=5000$ 作为位级 1；D 越小越好，取 $D_1=200$ 作位级 3；E 越大越好，应取 $E_3=10$ 作位级 1，但按设计条件，E 不大于 15V，所以取 15V 为位级 3；F 越小越好，应取 $F_1=200$ 作为位级 3，但 F 不小于 200，所以只能取 $F=200$ 作位级 1。

表 6 是重复进行五轮的计算结果，从表中可以看到，由初始条件得到的目标函数值最大，经过第一轮设计后，获得显著的提高，以后几轮的改进就不大了。

第二种方法的设计步骤是：

第一步：用同一个初始条件，在多个 K 值下确定因素的位级，例如作

$$K_1=5\quad K_2=3\quad K_3=2\quad K_4=1.5\quad K_5=1.25$$

的五张外表，以后在进行第二，第三轮…计算时，这五个 K 值保持不变。

第二步：建立外表的方法和第一种方法相同，但进行每一轮计算，都要作五张外表。

表 6 重复五轮的计算结果

		A	B	D	E	F	v
	初 始 条 件	1000	1000	1000	2	1000	10480.7
$K_1=5$	直接看到的好条件	5000	5000	1000	10	1000	7298.41
	计算得〃〃〃〃〃	200	5000	200	10	200	7228.87
$K_2=3$	直接看〃〃〃〃〃	67	5000	67	15	200	7220.27
	计算得〃〃〃〃〃	200	5000	22	15	200	7211.8
$K_3=2$	直接看〃〃〃〃〃	400	2500	30	15	200	7209.33
	计算看〃〃〃〃〃	800	2500	15	15	200	7211.33
$K_4=1.5$	直接看〃〃〃〃〃	267	1670	15	15	300	7209.27
	计算得〃〃〃〃〃	267	2500	15	15	200	7208.87
$K_5=1.25$	直接看〃〃〃〃〃	267	2000	18.75	15	200	7208.73
	计算得〃〃〃〃〃	213.6	2000	15	15	200	7208.53
整数化后的好条件		220	2000	15	15	200	7208.53

第三步：跟第一种方法一样，建立误差因素位级表和内表。在上例中有 5 张外表，每张外表有 18 个条件，每个条件作一张内表，共作 $5\times18=90$ 张内表，计算出各个条件下的 v 值后，从五张外表中选出目标函数值小的一个条件，作为直接看到的好条件。

表 7 第 1 位级、第 3 位级与第 2 位级比较表

K	5	3	2	1.5	1.25
A_I/A_{II}	0.40	0.57	0.79	0.91	0.96
A_{III}/A_{II}	34.51	6.97	2.05	1.23	1.07
B_I/B_{II}	39.18	8.12	2.34	1.34	1.12
B_{III}/B_{II}	0.17	0.44	0.71	0.85	0.92
D_I/D_{II}	0.24	0.58	0.82	0.91	0.95
D_{III}/D_{II}	41.19	8.95	2.43	1.33	1.10
E_I/E_{II}	37.49	8.36	2.54	1.45	1.18
E_{III}/E_{II}	0.06	0.28	0.57	0.77	0.87
F_I/F_{II}	0.17	0.44	0.74	0.91	0.97
F_{III}/F_{II}	33.69	6.85	2.04	1.21	1.06

第四步：寻找计算得到的好条件

这里和第一种方法不同，对应每一张外表，求出比值：A_I/A_{II}，A_{III}/A_{II}，B_I/B_{II}，B_{III}/B_{II}，……F_{III}/F_{II}。例如表 7 中的第一列数据就是根据表 2 中 $K_1=5$ 的条件下的 A_I，A_{II}，A_{III}，……算出来的。如果 A_I/A_{II} 越小，说明 A 的位级 1 比 A 的位级 2 好，反之如果 A_I/A_{II} 大于 1，说明 A 的位级 1 不如位级 2 好，从表 7 第一、二行可以看出 A 的位级 1 比位级 2 好，而第 3 位级则不如第 2 位级，其中最小的值为 0.40，说明 $K=5$，$A=1000/5=200$ 时最好。同理可以求出 B，D，E，F 的最好条件。这就是第二种方法计算得到的好条件。

将这组条件和直接看到的好条件进行比较，就得到第一轮的好条件。再用这组条件作为

第二轮的初始条件，仿照第一、二、三、四步可求出第二轮的好条件。用第二种方法进行参数设计，每一轮都要作若干张(例如5张)外表，计算量比第一种方法大得多，但它可能求得较好的条件。让我们就二个因素的情况来作一说明。

设初始条件位于 O 点，$O(A_2, B_2)$。令 $K=5$，于是 $A_1=\frac{A_2}{5}$ $A_3=5A_2$，$B_1=\frac{B_2}{5}$，$B_3=5B_2$。我们用第一种方法，就是在 O 点周围取九点，在这九点上比较 v 的值，如果在 A_3B_3 的 P 点 v 最小，就以 P 点为初始条件，用较小的 K 值再取九点进行比较，求出 v 更小的点，其过程如图2所示。这种方法的计算工作量小，收敛速度快，但是如果在 q 点附近，v 最小时，用这种方法的计算结果，往往就把它漏掉了。按一定规则减小 K 是为了缩小搜寻区域。

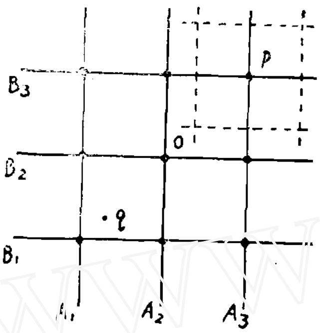

图 2

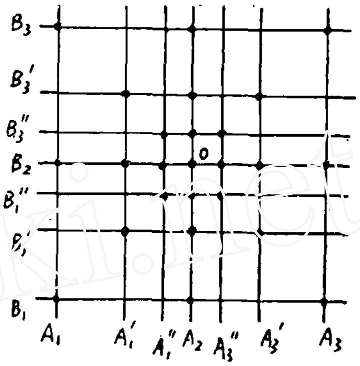

图 3

用第二种方法时，是在初始条件点附近就用几张外表进行寻找，离起点越近，点取得越密；越远，点取得越稀。于是在 O 点附近，取出了若干点，由此寻找v较小的条件。K 的数值取得越多，搜索的面越宽，漏掉的可能性越小，但工作量越大，如图3所示。

所以实际使用时，可以把两种方法结合起来，先用第二种方法求出一个好的条件，然后用第一种方法，尽快地收敛到某一最佳点。

上面我们通过电桥来说明参数设计，待测电阻 y 值是通过实际的测量求得的，事实上我们已知

$$y=\frac{B\cdot C}{A}-\frac{x}{A^2E}[F(A+B)+B(A+C)][C(A+B)+D(A+C)] \tag{3}$$

于是表4中的 y_i 也可以通过计算求出来。然后用上面的方法进行参数设计。

二、产品性能可以计算时内表的改进

通过上面分析，我们看到内表的作用是由外表选定的某一个条件下，根据因素可能产生的偏差，适当进行扰动，以求出在这个条件下的均方偏差 v，如果产品的性能是不能计算的，那么必须在扰动的情况下，通过实测，求出 y_i，最后计算 v 值。但是如果产品性能是可以计算的，那么通过内表的计算虽然可以求得 v，由于内表的计算工作量很大(以上面的例子为例，一张外表有18个条件，要作18张内表，如进行五轮，就要作 $5\times18=90$ 张内表，每张内表还要进行18次运算)因而用上面的方法是不合适的。既然产品的性能是可以计算的，则利用参数与

性能之间的函数关系，应该可以直接求出参数变动对性能的影响，这样不仅可以大大节约计算工作量，而且结果也更加准确，因为用正交试验方法，求得的结果毕竟是近似的。

设产品性能 y 是元件参数 A, B, C, D, E, F, x 的函数

$$y=f(A, B, C, D, E, F, x) \tag{4}$$

给定一组参数 $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, x_0$ 可以得到一个确定的 y_0 值。假定 $y_0=20000$。当元件的参数波动时，y 亦将随着发生波动。

令各个参数的偏差为 $\xi_i (i=1, 2, 3, \cdots 7)$，且设 ξ_i 服从三点分布，如 ξ_1 取值为 $\Delta A, 0, -\Delta A$，其概率各为 1/3，ξ_2 的取值为 $\Delta B, 0, -\Delta B$，其概率也各为 1/3，……。而且各个 ξ_i 是相互独立的，因此：

$$y=f(A_0+\xi_1, B_0+\xi_2, C_0+\xi_3, \cdots x_0+\xi_7)$$

是一个随机变量，它的取值有 3^7 个。采用正交试验法就是在 3^7 个 y 中，抽取 18 个典型数值，进行计算。令 $\Delta y=y-y_0$，並将 y 依泰勒级数展开，同时略去高次项后得：

$$\begin{aligned}\Delta y=y-y_0&=f(A_0+\xi_1, B_0+\xi_2, \cdots\cdots)-f(A_0, B_0, \cdots x_0)\\&=\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0 \xi_1+\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0 \xi_2+\frac{\partial f}{\partial C}\Big|_0 \xi_3+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 \xi_7\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0, \frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0, \cdots\cdots$ 分别是 $\frac{\partial f}{\partial A}, \frac{\partial f}{\partial B}, \cdots\cdots$ 在 $(A_0, B_0, C_0, \cdots\cdots x_0)$ 处的值，用计算助设计的术语来说，它们就是该点的灵敏度。表 2 中的均方偏差 v 应该是

$$v=\frac{1}{3^7}\sum_{i=1}^{3^7}\Delta y_i^2$$

而使用内表求 v，只取了其中 18 项。

显然 Δy 的数学期望 $E(\Delta y)=0$，这是因为

$$\begin{aligned}E(\Delta y)&=E\left(\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0 \xi_1\right)+E\left(\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0 \xi_2\right)+E\left(\frac{\partial f}{\partial C}\Big|_0 \xi_3\right)+\cdots+E\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 \xi_7\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0 E(\xi_1)+\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0 E(\xi_2)+\frac{\partial f}{\partial C}\Big|_0 E(\xi_3)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 E(\xi_7)\\&=\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0\left(\Delta A\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}-\Delta A\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0\left(\Delta B\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}-\Delta B\cdot\frac{1}{3}\right)+\cdots=0\end{aligned}$$

y 的方差 $v=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-y_0)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y^2$ 记作 $v=D(\Delta y)$。因为各个 ξ_i 互相独立，所以

$$\begin{aligned}v=D(\Delta y)&=D\left(\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0 \xi_1\right)+D\left(\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0 \xi_2\right)+\cdots\cdots+D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 \xi_7\right)\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial A}\Big|_0\right)^2 D(\xi_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\Big|_0\right)^2 D(\xi_2)+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0\right)^2 D(\xi_7)\end{aligned}$$

又因为 $D(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$(注)

$$\therefore \quad D(\xi_1)=E(\xi_1^2)=\frac{1}{3}(\Delta A)^2+\frac{1}{3}\cdot(0)^2+\frac{1}{3}(-\Delta A)^2=\frac{2}{3}\Delta A^2,$$

注：见南京大学数学系编《概率统计基础和概率统计方法》79 页

$$D(\xi_2)=E(\xi_2^2)=\frac{2}{3}\Delta B^2,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\qquad v=\left(\frac{\partial f}{\partial A}\bigg|_0\right)^2\cdot\frac{2}{3}\Delta A^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\bigg|_0\right)^2\cdot\frac{2}{3}\Delta B^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial A}\bigg|_0\Delta A\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\bigg|_0\Delta B\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_0\Delta x\right)^2\right]=\frac{2}{3}v_0 \tag{6}$$

式中

$$v_0=\left(\frac{\partial f}{\partial A}\bigg|_0\Delta A\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\bigg|_0\Delta B\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_0\Delta x\right)^2 \tag{7}$$

所以在产品性能可以计算时，利用计算机辅助设计技术，很容易根据参数的灵敏度求得均方偏差v。当然在用(6)式计算v时，我们假定参数的变化是三点分布，而且概率各为1/3。如果偏差不是这样分布而是别的分布，那么我们也可以求出 $E(\xi^2)$ 或 $D(\xi)$，从而计算v。用(6)式直接计算v值，可以省去内表的建立和运算，而且算得的结果比用内表更为精确，这样就大大地简化了计算工作量。从上面的例子来看，如果作5张外表，每张外表有18个条件，每个条件需作一张内表，每张内表还需要进行18次运算，那么就要进行$5\times18\times18=1620$次运算。但省去内表后，每张外表只需算18次，即运算$5\times18=90$次就够了。此外选用 $L_{18}(3^7)$ 正交表是在七个参数的情况下选用的。如果参数的数目很大，外表及相应的内表运算工作量还要大得多。而采用(6)式，则参数的增加，只增加若干项，计算量並不太大，由此可见，在用(6)式计算v后，计算工作量是大大地减少了。

三、结　　论

产品的参数设计是在给定一组满足要求的初始参数之后，求得一组生产或使用时产品性能最稳定，波动最小的参数。

如果产品性能是无法计算的，则可以按适当的K值建立外表，外表可以先作一张(第一种方法)，也可以同时作若干张(第二种方法)，然后按外表中的每一号条件，通过内表，求出其均方偏差或类似的目标函数，然后求出直接看到的好条件，进一步分析外表可求出计算得的好条件，从中选取一个作为好条件，並依照相同的方法，用这个好条件作初始条件，进行第二轮的计算，直到满足要求为止。

如果产品性能是可以计算的，则可略去内表，直接用(6)式计算外表，可以大大节约计算工作量。

我们在公式(6)的推导过程中得到了华东师范大学数学系梁小筠同志的帮助，在此表示感谢。

附　录

表 2 的计算程序

```
5 dim L(18,5), v(5,3), w(18), z(5,3)
10 for j=1 to 5
20 for i=1 to 18
30 read L(i, j)
40 next i
50 next j
55 print 'k':
60 input k
65 print
70 for i=1 to 5
80 read v(i,2)
90 let v(i,1)=v(i,2)/k
100 let v(i,3)=v(i,2)/k
110 next i
120 print tab (9): 'a': tab(19): 'b':
125 print tab (29): 'd': tab(39): 'e': tab(49): 'f'
130 for i=1 to 18
135 print i:
140 let a=v(1,L(i,1))
150 let b=v(2,L(i,2))
160 let d=v(3,L(i,3))
170 let e=v(4,L(i,4))
180 let f=v(5,L(i,5))
190 for j=1 to5
200 print tab(10*j-2): L(i, j):
210 next j
220 let c=20000*a/b
230 let ao=-b*c/a/a
240 let bo=c/a
250 let co=b/a
260 let p=f*(a+b)*b*(a+c)
270 let q=c*(a+b)*d*(a+c)
280 et xo=-p*q/a/a/e
290 let a1=a*·003
300 let b1=b*·003
310 let c1=c*·003
320 let x1=1e-7
330 let y0=a0*a1*a0*a1+b0*b1*b0*b1
340 let y1=c0*c1*c0*c1+x0*x1*x0*x1
350 let y=(y0+y1)/1.5
360 print tab (54): y
365 let w (i)=y
370 next i
376 for k=1 to 3
378 print k:
380 for j=1 to 5
400 let v0=0
410 for i=1 to 18
420 if L(i,j)=k goto 440
430 goto 450
440 let v0=v0+w(i)
450 next i
460 print tab (10*j-6): v0:
465 let z(j, k)=v0
470 next j
475 print
480 next k
485 print 'r':
490 for i=1 to 5
500 for j=1 to 2
510 for k=j+1 to 3
520 if z(i, j)>z(1,k) goto 560
530 let z0=z(i, j)
540 let z(i, j)=z(i,k)
550 lct z(i,k)=z0
560 next k
570 next j
580 pr int tab (10*i-6): z(i,1)-z(i,3)
590 next i
600 end
1000 data 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 3
1010 data 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3
1020 data 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3
1030 data 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3
1040 data 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 1, 2
1050 data 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1
1060 data 1, 2, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3
1070 data 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 1
1080 data 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2
1090 data 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2
1100 data 1000, 1000, 1000, 2, 1000
```