

# 直线加速器中电荷束团的耦合包络线方程\*

陈银宝 黄志斌

(中国原子能科学研究院电物理和激光研究所, 北京, 102413)

采用直线加速器中有限圆柱空间电荷模型, 利用电荷束团所产生的纵向和横向空间电荷力, 推导得到了直线加速器中计入纵向与横向耦合效应的电荷束团的耦合包络线方程; 通过数值计算, 给出了纵向和横向几何因子变化的计算实例。

关键词 电荷束团 耦合包络线方程 几何因子

中图法分类号 TL 501.5

束流包络线方程是束流整体运动规律的数学描述, 是研究加速器束流动力学的重要工具。关于束流包络线方程, 国内外都已发表过不少论著<sup>[1-7]</sup>。但是, 以前的工作中有的是把束流的纵向运动和横向运动分别研究, 有的只适用于非相对论和能量不变的情况, 有的虽然是计入纵向与横向的耦合效应, 但在空间电荷力的处理上, 尚未考虑波导中电荷束团的效应。强流直线加速器以及其它用到强流束的装置, 都需要通过对束流的纵向聚束来达到提高流强、增加亮度的目的。因此, 在直线加速器中的束流是以电荷束团的形式运动的。并且, 伴随着束流纵向聚束过程的进行, 相空间的耦合将导致横向发射度的急剧增长。为了研究直线加速器中束流聚束过程中的纵向和横向相空间耦合的物理机制, 搞清直线加速器中电荷束团的耦合运动规律, 需要推导出直线加速器中电荷束团的耦合包络线方程。

## 1 耦合的束流包络线方程

直线加速器中计入纵向与横向耦合效应的束流包络线方程组<sup>[1]</sup>为:

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{d(\ln(\beta\gamma))}{dz} \cdot \frac{dR}{dz} + \frac{J}{\beta\gamma} R - \frac{K_i Z_i}{R Z_m} - \frac{\epsilon^2}{\beta^2 \gamma^2 R^3} = 0 \\ \frac{d^2 Z_m}{dz^2} + \frac{d(\ln(\beta\gamma^3))}{dz} \cdot \frac{dZ_m}{dz} + \frac{H}{\beta\gamma^3} Z_m - \frac{3gN r_c}{2\beta^2 \gamma^3 Z_m^2} - \frac{\epsilon^2}{\beta^2 \gamma^6 Z_m^3} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $R$  和  $Z_m$  分别为束团的横向和纵向半包络;  $\beta, \gamma$  为相对论因子;  $J$  和  $H$  表示束团受到的

\* 核工业科学基金资助项目

陈银宝: 女, 57 岁, 加速器物理专业, 研究员

收稿日期: 1997-07-23

横向和纵向外场力;  $K_i$  表示广义导流系数的初始值;  $Z_i$  为纵向包络的初值;  $N$  为束团中的粒子总数;  $r_c$  为粒子的经典半径;  $g$  为几何因子;  $\epsilon$  和  $\epsilon'$  分别为横向和纵向的归一化发射度。

显然, 式(1)中的第 4 项是由束流本身的空间电荷力所致。必须指出, 上列方程中的横向空间电荷力是借助于束流的广义导流系数:

$$K = \frac{I}{I_0} \frac{2}{(\beta\gamma)^3} \quad (2)$$

而得到的, 这里  $I$  为束流强度,  $I_0$  为束流的特征电流。对于纵向空间电荷力, 则引入了一个几何因子  $g$  来反映加速器管道的影响, 并未给出确切表达式。因此, 为了要描述电荷束团的包络运动, 就必须将式(1)中的第 4 项, 代之以波导中电荷束团所产生的横向和纵向空间电荷力。

## 2 电荷束团的空间电荷效应

采用直线加速器中的有限圆柱空间电荷模型。在波导中令有限圆柱电荷如图 1 所示, 波导半径为  $a$ , 有限圆柱半径为  $b$ , 长度为  $2L$ , 圆柱的总电荷为  $Q$ 。

根据文献[2], 该有限圆柱空间电荷所产生的空间电荷效应及位于任意观察点的单位电荷所感受到的力都已给出。因此, 不难求得位于观察点  $P(b, 0)$  和  $Q(0, L)$  的电荷  $q$  所受到的来自有限圆柱电荷  $Q$  的空间电荷力为:

$$(F_r)_P = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0\gamma^2 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} (1 - e^{-k_l \mathcal{L}}) \quad (3)$$

$$(F_z)_Q = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0\gamma^2 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l \mathcal{L}} \text{Sh}(k_l \mathcal{L}) \quad (4)$$

式中:  $\epsilon_0$  为介电常数;  $J_1(k_l X)$  是贝塞尔函数;  $k_l$  为满足  $J_0(k_l a) = 0$  的根。式(3)和(4)已经考虑了相对论情况, 也即为在实验室坐标系中的表达式。

## 3 直线加速器中电荷束团的耦合包络线方程

以式(3)和(4)来替代式(1)中的第 4 项空间电荷力, 就可得到直线加速器中电荷束团的耦合包络线方程。但是, 必须注意, 在把式(3)和(4)加入方程时, 要作相应的变换, 即必须考虑到在相对论情况下, 运动方程由对时间  $t$  的微分变换到对距离  $z$  的微分时, 其力项的变换:

$$f_r = \frac{F_r}{m c^2 \beta^2 \gamma} = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m c^2 \beta^2 \gamma^2 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} (1 - e^{-k_l \mathcal{L}}) \quad (5)$$

$$f_z = \frac{F_z}{m c^2 \beta^2 \gamma} = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m c^2 \beta^2 \gamma^2 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l \mathcal{L}} \text{Sh}(k_l \mathcal{L}) \quad (6)$$

将式(5)所表示的横向空间电荷力  $f_r$  取代方程组(1)中的第 1 式的第 4 项, 而以式(6)所示的纵向空间电荷力  $f_z$  取代方程组(1)中的第 2 式的第 4 项, 最后可得:

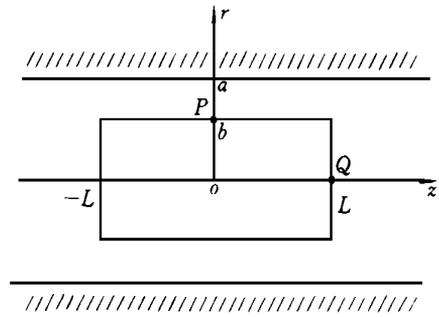


图 1 有限圆柱空间电荷模型

Fig 1 Cylinder model of space charge

$$\begin{cases} \frac{d^2R}{dz^2} + \frac{d(\ln(\beta\gamma))}{dz} \cdot \frac{dR}{dz} + \frac{I}{\beta\gamma^3R} - \frac{3}{2} \frac{N r_c g_r}{\beta^2 \gamma^3 R Z_m} - \frac{\epsilon^2}{\beta^2 \gamma^3 R^3} = 0 \\ \frac{d^2Z_m}{dz^2} + \frac{d(\ln(\beta\gamma^3))}{dz} \cdot \frac{dZ_m}{dz} + \frac{H}{\beta\gamma^3 Z_m} - \frac{3}{2} \frac{N r_c g_z}{\beta^2 \gamma^3 R Z_m} - \frac{\epsilon^2}{\beta^2 \gamma^3 Z_m^3} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中  $r_c$  为电荷束团中的粒子的经典半径:

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \quad (8)$$

几何因子  $g_r$  和  $g_z$  分别为:

$$g_r = \frac{8}{3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} (1 - e^{-k_l \mathcal{L}}) \quad (9)$$

$$g_z = \frac{8}{3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l \mathcal{L}} \text{Sh}(k_l \mathcal{L}) \quad (10)$$

方程组(7)即为直线加速器中电荷束团的耦合包络线方程。

### 4 几何因子的数值结果

由几何因子的定义公式(9)和(10), 不难看出几何因子  $g_r$  和  $g_z$  是电荷束团半径  $b$  和  $\mathcal{L}$  以及波导半径  $a$  的函数。图 2 给出了一个  $a/b=3$  的计算实例。

从图中可以看到, 几何因子  $g_r$  和  $g_z$  在区间  $1 < \mathcal{L}/b < 3$  的变化很快, 当  $\mathcal{L}/b > 3$  时, 变化很小, 当  $\mathcal{L}/b = 10$  时, 趋向饱和, 这与长束流的图像吻合; 并且, 横向几何因子  $g_r$  总是大于纵向几何因子  $g_z$ , 这表明在有限圆柱空间电荷模型下, 加速器器壁对于电荷束团横向运动的影响比纵向运动更为显著。另外, 通过波导中有限圆柱空间电荷力严格求解, 得到的横向和纵向几何因子数值, 比文献[9]中基于椭球空间电荷的近似表达式所得的几何因子数值要小, 这也是预期的结果。

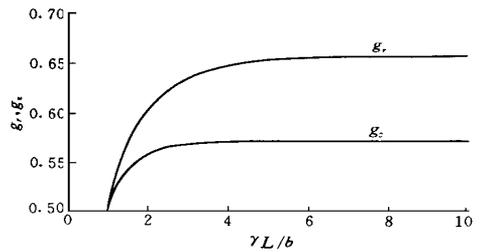


图 2 几何因子  $g_r$  和  $g_z$  随  $\mathcal{L}/b$  的变化 ( $a/b=3$ )

Fig 2 Variation of the geometry factors  $g_r$  and  $g_z$  with  $\mathcal{L}/b$  for  $a/b=3$

### 参 考 文 献

- 1 Kapchinskij M, V ladin irshij VV. L imitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing L inear A ccelerator A ssociated W ith the Beam Space Charge Proc Int Conf on High Energy A ccelerators Geneva: CERN, 1959. 274
- 2 Banford A.P. The Transport of Charged Particle Beam s London: E & FN SPON L imited, 1966. 9
- 3 Lapostolle P.M. Possible Em itittance Increase Through Filamentation due to Space Charge in Continuous Beams IEEE T rans Nucl Sci, 1971, 18(3): 1101.
- 4 Sacherer F.J. R M S Envelope Equations W ith Space Charge, IEEE T rans Nucl Sci, 1971, 18(3): 1105
- 5 Neuffer D. Longitudinal Motion in High Current Ion Beam s—A Self-consistent Phase Space Distribu-tion W ith an Envelope Equation IEEE T rans Nucl Sci, 1979, 26(3): 3031.

- 6 谢 羲, 陈银宝, 宋忠恒 电子直线加速器束流横向包络线方程 原子能科学技术, 1978, 12(2): 119
- 7 陈银宝 电子直线加速器中计入纵向与横向耦合效应的束流包络线方程组 原子能科学技术, 1992, 26(4): 93
- 8 谢 羲, 陈银宝, 宋忠恒 电子直线加速器的空间电荷效应 原子能科学技术, 1978, 12(2): 109
- 9 Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams New York: John Wiley & Sons, Inc, 1994 409

## COUPLING ENVELOPE EQUATIONS FOR BUNCHED BEAM IN LINAC

Chen Yinbao Huang Zhibin

(China Institute of Atomic Energy, P. O. Box 275-17, Beijing, 102413)

### ABSTRACT

The coupling envelope equations for bunched beam in a linac have been derived by means of the forces induced by a cylinder model of space charge of the bunched beam in waveguide. And, the variations of the geometry factors are calculated as an example.

**Key words** Bunched beam Coupling envelope equation Geometry factor

## 中国原子能科学研究院 3 位院士获“资深院士”称号

中国科学院第九次院士大会和中国工程院第四次院士大会决定, 我国从今年起在中国科学院和中国工程院院士中实行资深院士制度。年满 80 周岁的两院院士将被授予“中国科学院资深院士”或“中国工程院资深院士”称号。中国原子能科学研究院名誉院长王淦昌院士、院学术顾问委员会委员汪德熙院士、肖伦院士被授予“中科院资深院士”称号。

摘自中国原子能科学研究院《原子能院报》