直线加速器粒子运动包络线方程

宋 忠 恒

关键词 包络线，发散度，相空间，相空间匹配。

一、问 题 的 提 出

在文献[1 2]里已经根据各自的情况，用不同的方法独立导出了电子直线加速器圆对称系统考虑加速过程的粒子横向运动包络线方程。这对于解决象强流短脉冲电子直线加速器、电子直线感应加速器之类的横向运动问题是很有意义的。

但是，在某些情况下，象质子直线加速器，螺旋波导直线加速器，中、高能电子直线加速器等，在加速段上没有磁聚焦线圈，而在加速段间放置四极透镜之类的非圆对称系统，束流截面是椭圆。这时，研究横向运动必须知道 x、y 两个方向的状态，并且不能从[1,2]的表达式中直接导出。

而对于纵向运动，有时需要讨论粒子相对于平衡相位的运动，纵向粒子运动包络线方程可提供一种研究粒子纵向运动的方法，而这在文献上尚未见到过。

为此，本文将以解电子直线加速器里的问题为具体内容，导出直角座标系里的粒子运动包络线方程。对于其它类似情况的加速器，只要将加速场以及其它场的形式具体化，就可写出相应的粒子运动包络线方程。在没有加速场的情况下，方程退化为解决束流输运系统的粒子运动包络线方程。

二、单粒子运动方程

取行波加速场和磁四极透镜场，在真空中，直角座标系，取高斯单位制时，粒子的运动方程是：

$$\begin{cases} x''+\dfrac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}x'+\dfrac{Q_x(z)}{\beta\gamma}x=0, & (1)\\[2mm] y''+\dfrac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}y'+\dfrac{Q_y(z)}{\beta\gamma}y=0, & (2)\\[2mm] (z-z_c)''+\dfrac{(\gamma_c^3\beta_c)'}{\gamma_c^3\beta_c}(z-z_c)'+\dfrac{Q_z(z)}{\beta_c\gamma_c^3}(z-z_c)=0. & (3)\end{cases}$$

(3)式也可写成：

$$(\varphi-\varphi_c)''+\frac{(\gamma_c^3\beta_c^3)'}{\gamma_c^3\beta_c^3}(\varphi-\varphi_c)'+\frac{Q_\theta(z)}{\gamma_c^3\beta_c^3}(\varphi-\varphi_c)=0. \tag{4}$$

式中，

$$\begin{cases} Q_x(z)=\dfrac{-e}{m_0c^2}\left[\dfrac{1}{2}E_0k\left(\dfrac{1}{\beta_\omega\beta}-1\right)\sin\theta+\dfrac{1}{2\beta}\dfrac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}\cos\theta-\dfrac{\mathrm{d}\,B_y}{\mathrm{d}x}\right], \\ Q_y(z)=\dfrac{-e}{m_0c^2}\left[\dfrac{1}{2}E_0k\left(\dfrac{1}{\beta_\omega\beta}-1\right)\sin\theta+\dfrac{1}{2\beta}\dfrac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}\cos\theta+\dfrac{\mathrm{d}\,B_x}{\mathrm{d}\,y}\right], \\ Q_z(z)=\dfrac{eE_0}{m_0c^2}\,\dfrac{2\pi}{\lambda\beta_c^2}\sin\dfrac{\pi(z+z_c)}{\beta_c\lambda}, \\ Q_\theta(z)=\dfrac{eE_0}{m_0c^2}\,\dfrac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_c. \end{cases} \tag{5}$$

上面各式中的符号都是大家所熟悉的，仅需说明的是，脚标 c 是表示平衡相位，在纵向方程中“$'$”是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z_c}$。

需要指出的是，为了不失讨论的一般性，式中没有涉及到强流效应，因为我们是在线性力下讨论问题，故只要强流诸效应能提供线性力，不改变上述关系式所描述的问题的本质，或者说可导出类似的关系式。

三、粒子运动包络线方程

上节三个方向的单粒子运动方程形式相同，可以写成标准形式：

$$q''+\frac{p'}{p}q'+\frac{Q}{p}q=0, \tag{6}$$

我们仅就上式进行讨论就可以了。

(6)式是二阶齐次线性微分方程，设它有线性无关的两个实数解 $u(z)$、$v(z)$，其朗斯基行列式为常数，并且通过选择适当的初始条件：

$$u(0)=1,\ v(0)=0,\ pu'(0)=0,\ pv'(0)=1,$$

使其

$$\begin{vmatrix} u(z) & v(z) \\ u'(z) & v'(z) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix}=\frac{1}{p}. \tag{7}$$

$u(z)$，$v(z)$是方程的两个独立解，则可由它们来组成复数解：

$$\begin{cases} q=u+jv=\sigma(z)\mathrm{e}^{j\psi(z)}, \\ q^*=u-jv=\sigma(z)\mathrm{e}^{-j\psi(z)}. \end{cases} \tag{8}$$

这对复数共轭解也是线性无关的，因为它的朗斯基行列式不为零。可以证明：

$$\begin{vmatrix} u+jv & u-jv \\ u'+jv' & u'-jv' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{vmatrix}=-\frac{2j}{p}. \tag{9}$$

既然这样，方程(6)的任一解都可由这对复数共轭解的线性组合来实现。

$$q(z)=aq+a^*q^*=A\sigma(z)\cos[\psi(z)+\Theta]. \tag{10}$$

式中 a 与 A、Θ 的关系是：

$$a=\frac{1}{2}A\mathrm{e}^{j\Theta}. \tag{11}$$

将(8)代入(10)，得：

$$\begin{cases} \psi'(z)=\dfrac{1}{\sigma^2(z)p}, \\ \psi''(z)=-\dfrac{p'}{\sigma^2(z)p^2}-\dfrac{2}{p}\dfrac{\sigma'(z)}{\sigma^3(z)}. \end{cases} \tag{12}$$

由(10)考虑到(12)，得：

$$\begin{cases} q'(z)=A\sigma'(z)\cos[\psi(z)+\Theta]-\dfrac{A}{p\sigma(z)}\sin[\psi(z)+\Theta], \\ q''(z)=A\sigma''(z)\cos[\psi(z)+\Theta]-\dfrac{A}{p^2\sigma^3(z)}\cos[\psi(z)+\Theta]+\dfrac{Ap'}{p^2\sigma(z)}\sin[\psi(z)+\Theta]. \end{cases} \tag{13}$$

将(10)、(13)代入(6)，经过运算整理，得：

$$A\sigma''(z)+A\frac{p'}{p}\sigma'(z)+A\frac{Q}{p}\sigma(z)-\frac{A}{\sigma^3(z)p^2}=0. \tag{14}$$

令

$$\begin{cases} \sigma=A\sigma(z), \\ \sigma'=A\sigma'(z), \\ \sigma''=A\sigma''(z). \end{cases} \tag{15}$$

将(15)代入(14)，得：

$$\sigma''+\frac{p'}{p}\sigma'+\frac{Q}{p}\sigma-\frac{A^4}{\sigma^3p^2}=0. \tag{16}$$

(16)就是包络线方程，或分别写成下述形式：

$$\sigma_x''+\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\sigma_x'+\frac{Q_x(z)}{\beta\gamma}\sigma_x-\frac{A_x^4}{\sigma_x^3(\beta\gamma)^2}=0, \tag{17}$$

$$\sigma_y''+\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\sigma_y'+\frac{Q_y(z)}{\beta\gamma}\sigma_y-\frac{A_y^4}{\sigma_y^3(\gamma\beta)^2}=0, \tag{18}$$

$$\sigma_z''+\frac{(\beta_c\gamma_c^3)'}{\beta_c\gamma_c^3}\sigma_z'+\frac{Q_z(z)}{\beta_c\gamma_c^3}\sigma_z-\frac{A_z^4}{\sigma_z^3(\beta_c\gamma_c^3)^2}=0. \tag{19}$$

(19)或写成：

$$\sigma_\theta''+\frac{(\beta_c^3\gamma_c^3)'}{\beta_c^3\gamma_c^3}\sigma_\theta'+\frac{Q_\theta(z)}{\beta_c^3\gamma_c^3}\sigma_\theta-\frac{A_\theta^4}{\sigma_\theta^3(\beta_c^3\gamma_c^3)^2}=0. \tag{20}$$

下面看参数 A 的物理意义。由(13)中 $q'(z)$的平方，经过变换得：

$$[p\sigma(z)q'(z)-p\sigma'(z)q]^2+\left[\frac{q}{\sigma(z)}\right]^2=A^2, \tag{21}$$

或写成

$$\left[\frac{1}{A^2\sigma^2(z)}+\frac{p^2\sigma'^2(z)}{A^2}\right]q^2-\frac{2p\sigma(z)\sigma'(z)}{A^2}q(pq')+\frac{\sigma^2(z)}{A^2}(pq')^2=1. \tag{21'}$$

(21′)式就是在$(q,\ pq')$相平面上的椭圆方程。相应于椭圆方程

$$aq^2+2bq(pq')+c(pq')^2=1,$$

其椭圆面积为$\pi/(ac-b^2)^{1/2}$。故由(21′)可知相面积是：

$$V=\pi\Bigg/\left[\left(\frac{1}{A^2\sigma^2(z)}+\frac{p^2\sigma'^2(z)}{A^2}\right)\frac{\sigma^2(z)}{A^2}-\frac{p^2\sigma^2(z)\sigma'^2(z)}{A^4}\right]^{1/2}=\pi A^2. \tag{22}$$

可以看出，A^2 是与相面积有关的一个常数，它的量纲是长度。

将(22)代入(16)，得：

$$\sigma''+\frac{p'}{p}\sigma'+\frac{Q}{p}\sigma-\frac{V^2}{\pi^2p^2\sigma^3}=0, \tag{23}$$

或分别写成

$$\begin{cases}\sigma_x''+\dfrac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\sigma_x'+\dfrac{Q_x(z)}{\beta\gamma}\sigma_x-\dfrac{V_x^2}{\pi^2(\beta\gamma)^2\sigma_x^3}=0, & (24)\\ \sigma_y''+\dfrac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\sigma_y'+\dfrac{Q_y(z)}{\beta\gamma}\sigma_y-\dfrac{V_y^2}{\pi^2(\beta\gamma)^2\sigma_y^3}=0, & (25)\\ \sigma_z''+\dfrac{(\beta_c\gamma_c^3)'}{\beta_c\gamma_c^3}\sigma_z'+\dfrac{Q_z(z)}{\beta_c\gamma_c^3}\sigma_z-\dfrac{V_z^2}{\pi^2(\beta_c\gamma_c^3)^2\sigma_z^3}=0. & (26)\end{cases}$$

或将(26)式写成：

$$\sigma_\theta''+\frac{(\beta_c^3\gamma_c^3)'}{\beta^3\gamma_c^3}\sigma_\theta'+\frac{Q_\theta(z)}{\beta_c^3\gamma_c^3}\sigma_\theta-\frac{V_\theta^2}{\pi^2(\beta_c^3\gamma_c^3)^2\sigma_\theta^3}=0. \tag{27}$$

这就是包络线方程的最后表达式。在能量不变时，$p'=0$，导出束流输运系统粒子运动的包络方程：

$$\sigma''+\frac{Q}{p}\sigma-\frac{V^2}{\pi^2p^2\sigma^3}=0, \tag{28}$$

或分别写成：

$$\begin{cases}\sigma_x''+\dfrac{Q_x(z)}{\beta\gamma}\sigma_x-\dfrac{V_x^2}{\pi^2(\beta\gamma)^2\sigma_x^3}=0, & (29)\\ \sigma_y''+\dfrac{Q_y(z)}{\beta\gamma}\sigma_y-\dfrac{V_y^2}{\pi^2(\beta\gamma)^2\sigma_y^3}=0, & (30)\\ \sigma_z''+\dfrac{Q_z(z)}{\beta_c\gamma_c^3}\sigma_z-\dfrac{V_z^2}{\pi^2(\beta_c\gamma_c^3)^2\sigma_z^3}=0. & (31)\end{cases}$$

或将(31)式写成：

$$\sigma_\theta''+\frac{Q_\theta(z)}{\beta_c^3\gamma_c^3}\sigma_\theta-\frac{V_\theta^2}{\pi^2(\beta_c^3\gamma_c^3)^2\sigma_\theta^3}=0. \tag{32}$$

包络线方程描述粒子运动的包络线，便于进行相空间匹配的研究，这在横向运动中是好理解的，因为束流的发散度和加速器各部件的横向相容纳似乎是较为具体的，而且 $x=y=0$ 是它的中心轴线。这类问题已有很多讨论，这里不再论述。其实，纵向运动也是一样，不同的是我们将平衡粒子作为参考粒子，研究任一粒子围绕平衡粒子的相位运动。经过聚束后的粒子是有一定的纵向发散度的，即在一定的相宽度内粒子的动量分散；没有经过聚束的脉冲束流，其纵向发散度是一水平直线($\Delta\gamma=0$，$\Delta\theta=\pi$)。由于直线加速器里的自动稳相作用，使得只有落在相位稳定区里的粒子才能得到继续加速，可以将这个相位稳定区认为是所用设备的纵向相容纳。我们也可以将某一要求化为相容纳来讨论相空间匹配问题，这无论在横向或纵向，方法上没有大的区别。

参 考 文 献

[1] 谢羲等，原子能科学技术，2.119 (1978)，

[2] E. P. Lee et al., *Particle Accelerators* 7, 1, 83(1976).

（编辑部收到日期：1980 年 8 月 25 日