# 直线加速器非心对称椭圆束流相空间的包络线方程

陈银宝 谢羲

（中国原子能科学研究院，北京）

本文提出直线加速器非心对称椭圆束流相空间的包络线方程，并解具体例子以示理论之实际应用。

关键词 非心对称椭圆束流相空间，包络线方程。

## 一、任务的提出

包含有外加微波场、聚焦磁场、静电场以及束流本身的空间电荷场、束流负载场和初始发散度等效应在内的能量可变的相对论束流的直线加速器横向包络线方程已经解决[1]。但一般均假定束流相空间为相对于坐标原点的心对称椭圆。而实测的束流相空间则更接近于椭圆心偏离坐标原点的非心对称椭圆，关于非心对称椭圆束流相空间的包络线方程，至今尚未见过讨论。本文的任务是：提出直线加速器非心对称椭圆束流相空间的包络线方程，并解具体例子以示理论之实际应用。

## 二、非心对称椭圆束流相空间的束流包络

设直线加速器的作用场为轴对称，束流相空间矢量取傍轴的径向坐标 $r$ 与归一化径向动量：

$$p_r=\beta\gamma\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}Z},$$

其中 $Z$ 为轴向坐标，则可得束流中单粒子径向运动方程为：

$$\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}Z}+N(Z)r=0, \tag{1}$$

其中$N(Z)$描写外加微波场、聚焦磁场、静电场以及束流自身的空间电荷场与束流负载场。

设方程 (1) 有线性无关的两个实数解 $C(Z)$ 和 $S(Z)$，则一般解为它们的线性组合：

$$r(Z)=r(0)C(Z)+p_r(0)S(Z),$$

根据归一化动量定义得

$$p_r(Z)=\beta\gamma r'(Z)=r(0)\beta\gamma C'(Z)+p_r(0)\beta\gamma S'(Z),$$

或用矩阵描写相空间矢量$\begin{bmatrix} r \\ p_r \end{bmatrix}$的变换关系：

$$\begin{bmatrix} r(Z) \\ p_r(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(Z) & S(Z) \\ \beta\gamma C'(Z) & \beta\gamma S'(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ p_r(0) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

根据（1）式，可证传输矩阵的行列式为常数[1]，选择初始条件，令：

$$\begin{vmatrix} C(Z) & S(Z) \\ \beta\gamma C'(Z) & \beta\gamma S'(Z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(0) & S(0) \\ \beta\gamma C'(0) & \beta\gamma S'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

由（2）式得传输矩阵：

$$M(Z) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(Z) & S(Z) \\ \beta\gamma C'(Z) & \beta\gamma S'(Z) \end{bmatrix},$$

其元素间关系为：

$$m_{21} = \beta\gamma m_{11}', \quad m_{22} = \beta\gamma m_{12}'. \tag{3}$$

设初始束流相空间为椭圆心位于$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$，以归一化$\sigma_0 = \begin{bmatrix} B_0 & -A_0 \\ -A_0 & \Gamma_0 \end{bmatrix}$矩阵描写的椭圆：

$$[r(0)-\lambda_0 \quad p_r(0)-\mu_0] \begin{bmatrix} B_0 & -A_0 \\ -A_0 & \Gamma_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r(0)-\lambda_0 \\ p_r(0)-\mu_0 \end{bmatrix} = \varepsilon, \tag{4}$$

其中$|\sigma_0| = 1$，$\varepsilon$为束流发散度。

根据束流传输理论，经过以传输矩阵$M(Z)$描写的场区的传输，（4）式所描写的初始束流相空间变换成：

$$[r(0)-\lambda_0 \quad p_r(0)-\mu_0]\, \widetilde{M}\widetilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} B_0 & -A_0 \\ -A_0 & \Gamma_0 \end{bmatrix} M^{-1} M \begin{bmatrix} r(0)-\lambda_0 \\ p_r(0)-\mu_0 \end{bmatrix} = \varepsilon.$$

考虑到（2）式，有：

$$[r(Z)-\lambda(Z) \quad p_r(Z)-\mu(Z)] \left\{ M \begin{bmatrix} B_0 & -A_0 \\ -A_0 & \Gamma_0 \end{bmatrix} \widetilde{M} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} r(Z)-\lambda(Z) \\ p_r(Z)-\mu(Z) \end{bmatrix} = \varepsilon,$$

或

$$[r(Z)-\lambda(Z) \quad p_r(Z)-\mu(Z)]\, \sigma^{-1}(Z) \begin{bmatrix} r(Z)-\lambda(Z) \\ p_r(Z)-\mu(Z) \end{bmatrix} = \varepsilon, \tag{5}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \lambda(Z) \\ \mu(Z) \end{bmatrix} = M(Z) \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(Z) = M(Z)\sigma(0)\widetilde{M}(Z).$$

即经过场区$M(Z)$的作用，由（4）式描写的初始束流相空间传输到$Z$点，变换成为椭圆心位于$\begin{bmatrix} \lambda(Z) \\ \mu(Z) \end{bmatrix}$，以归一化 $\sigma(Z) = \begin{bmatrix} B(Z) & -A(Z) \\ -A(Z) & \Gamma(Z) \end{bmatrix}$矩阵描写的椭圆（5）。

根据（3）式与（5）式，得椭圆心坐标的关系为：

$$\mu(Z) = \beta\gamma\lambda'(Z). \tag{6}$$

根据$|M(Z)| = 1$与（5）式，得$\sigma$矩阵的关系为：

$$|\sigma(Z)| = |\sigma(0)| = 1. \tag{7}$$

又因为

$$\sigma(Z)=M(Z)\begin{bmatrix}B_0 & -A_0\\ -A_0 & \Gamma_0\end{bmatrix}\tilde{M}(Z)$$

$$=\begin{bmatrix} m_{11}^2B_0-2m_{11}m_{12}A_0+m_{12}^2\Gamma_0 & m_{11}m_{21}B_0-(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})A_0+m_{12}m_{22}\Gamma_0\\ m_{11}m_{21}B_0-(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})A_0+m_{12}m_{22}\Gamma_0 & m_{21}^2B_0-2\,m_{21}m_{22}A_0+m_{22}^2\Gamma_0\end{bmatrix}$$

或写成：

$$\begin{bmatrix}B(Z)\\ A(Z)\\ \Gamma(Z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C^2 & -2\,CS & S^2\\ -\beta\gamma CC' & \beta\gamma CS'+\beta\gamma SC' & -\beta\gamma SS'\\ (\beta\gamma C')^2 & -2\,\beta\gamma C'\beta\gamma S' & (\beta\gamma S')^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\ A_0\\ \Gamma_0\end{bmatrix}. \tag{8}$$

于是，根据（3）式与（8）式，可得 $\sigma$ 矩阵的元素间的关系为：

$$A(Z)=-\frac{\beta\gamma}{2}B'(Z). \tag{9}$$

根据文献[2]，束流相空间（5）对其一维子空间 $r$ 的投影方程为：

$$[r(Z)-\lambda(Z)][B(Z)]^{-1}[r(Z)-\lambda(Z)]=\varepsilon.$$

该一维子空间的两个边界点为：

$$r(Z)=\lambda(Z)\pm\sqrt{\varepsilon B(Z)}.$$

其绝对值最大者代表束流的包络 $R(Z)$，即

$$\begin{cases}R(Z)=\lambda(Z)+\sqrt{\varepsilon B(Z)}, & \lambda(Z)>0\\ R(Z)=-\lambda(Z)+\sqrt{\varepsilon B(Z)}. & \lambda(Z)<0\end{cases} \tag{10}$$

## 三、非心对称椭圆束流相空间的包络线方程

根据第二节的讨论，现在可以着手来求非心对称椭圆束流相空间的包络线方程。

微分束流包络（10）式，并注意到（9）式，得：

$$[R(Z)\mp\lambda(Z)]'=-\frac{\varepsilon A(Z)}{\beta\gamma\sqrt{\varepsilon B(Z)}}=-\frac{\varepsilon A(Z)}{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]}. \tag{11}$$

对（5）式两边各乘以束流发散度 $\varepsilon$，得：

$$\varepsilon\Gamma(Z)[r(Z)-\lambda(Z)]^2+2\,\varepsilon A(Z)[r(Z)-\lambda(Z)][p_r(Z)-\mu(Z)]+\\ +\varepsilon B(Z)[p_r(Z)-\mu(Z)]^2=\varepsilon^2. \tag{12}$$

把（10）式与（11）式代入（12）式得：

$$\varepsilon\Gamma(Z)[r(Z)-\lambda(Z)]^2-2\,\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)][R(Z)\pm\lambda(Z)]'[r(Z)-\lambda(Z)][p_r(Z)-\\ -\mu(Z)]+[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2[p_r(Z)-\mu(Z)]^2=\varepsilon^2. \tag{13}$$

根据（7）式，并利用（10）式和（11）式得：

$$\varepsilon\Gamma(Z)=\frac{\varepsilon^2}{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}+(\beta\gamma)^2[R'(Z)\mp\lambda'(Z)]^2. \tag{14}$$

以（14）式代入（13）式，得：

$$\{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]'[r(Z)-\lambda(Z)]-[R(Z)\mp\lambda(Z)][p_r(Z)-\mu(Z)]\}^2+\\ +\frac{\varepsilon^2[r(Z)-\lambda(Z)]^2}{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}=\varepsilon^2.$$

再微分、整理，可得：

$$\{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]'\}'[r(Z)-\lambda(Z)]-[R(Z)\mp\lambda(Z)][p_r(Z)-\mu(Z)]'-$$
$$-\frac{\varepsilon^2[r(Z)-\lambda(Z)]}{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0. \tag{15}$$

根据（5）式得：

$$\begin{cases}\lambda(Z)=C(Z)\lambda_0+S(Z)\mu_0,\\ \mu(Z)=\beta\gamma C'(Z)\lambda_0+\beta\gamma S'(Z)\mu_0,\end{cases}$$

其中 $C(Z)$ 与 $S(Z)$ 为满足运动方程（1）的两个线性无关 $r(Z)$ 的解，因此：

$$\frac{\mathrm{d}\beta\gamma\lambda'(Z)}{\mathrm{d}Z}+N(Z)\lambda(Z)=0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\mu(Z)}{\mathrm{d}Z}+N(Z)\lambda(Z)=0. \tag{16}$$

以（1）式减去（16）式，得：

$$\frac{\mathrm{d}[p_r(Z)-\mu(Z)]}{\mathrm{d}Z}+N(Z)[r(Z)-\lambda(Z)]=0.$$

代入（15）式，得：

$$\{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]'\}'+N(Z)[R(Z)\mp\lambda(Z)]-\frac{\varepsilon^2}{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0.$$

再利用（16）式，可简化成：

$$R''(Z)+\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}R'(Z)+\frac{N(Z)}{\beta\gamma}R(Z)-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0. \tag{17}$$

这就是我们所要求的非心对称椭圆束流相空间的包络线方程。

包络线方程（17）中的相空间椭圆心 $r$ 坐标 $\lambda(Z)$ 满足运动微分方程（16），初始条件为：

$$\lambda(0)=\lambda_0,\quad \lambda'(0)=\frac{\mu_0}{\beta\gamma}.$$

自（16）式解出 $\lambda(Z)$ 为已知函数，代入方程（17），如果 $\lambda(Z)>0$，取负号；如果 $\lambda(Z)<0$，则取正号。

所以根据给定的束流包络的初始条件 $R(0)=R_0$，$R'(0)=R'_0$，通过包络线方程(17)，可解出所要求的非心对称椭圆束流相空间的整个束流包络。

假设束流的发散度 $\varepsilon=0$，则自（17）式得边缘粒子径向 $R(Z)$ 的微分方程：

$$R''(Z)+\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}R'(Z)+\frac{N(Z)}{\beta\gamma}R(Z)=0. \tag{18}$$

与椭圆心坐标 $\lambda(Z)$ 无关，这是预期的结果。

## 四、非心对称椭圆束流相空间的包络线方程与 $\sigma$ 矩阵的关系

根据前面推导的公式，$\sigma$ 矩阵的元素可以通过束流包络 $R$ 及其微分 $R'$，以及束流发散度 $\varepsilon$ 来表示。

由（10）式可得：

$$B(Z)=\frac{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}{\varepsilon}.$$

由（9）式可得：

$$-A(Z)=\frac{\beta\gamma}{2}B'(Z)=\frac{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)][R(Z)\mp\lambda(Z)]'}{\varepsilon}.$$

根据（7）式，得

$$\Gamma(Z)=\frac{1+A^2(Z)}{B(Z)}=\frac{\varepsilon^2+\{[R(Z)\mp\lambda(Z)]\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]'\}^2}{\varepsilon[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}.$$

于是，得 $\sigma$ 矩阵与束流包络的关系为：

$$\sigma(Z)=\begin{bmatrix}B(Z) & -A(Z)\\ -A(Z) & \Gamma(Z)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}{\varepsilon} & \dfrac{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)][R(Z)+\lambda(Z)]'}{\varepsilon}\\ \dfrac{\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)][R(Z)\mp\lambda(Z)]'}{\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon^2+\{[R(Z)\mp\lambda(Z)]\beta\gamma[R(Z)\mp\lambda(Z)]'\}^2}{\varepsilon[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}\end{bmatrix} \quad (19)$$

根据（11）式，得：

$$\sqrt{\varepsilon B(Z)}'+\frac{\varepsilon A(Z)}{\beta\gamma\sqrt{\varepsilon B(Z)}}=0,$$

再微分之，并利用（7）式和（9）式的关系得：

$$[\beta\gamma\sqrt{\varepsilon B(Z)}']'+\frac{A'(Z)+\Gamma(Z)/\beta\gamma}{B(Z)}\sqrt{\varepsilon B(Z)}-\frac{\varepsilon^2}{\beta\gamma[\varepsilon B(Z)]^{3/2}}=0. \quad (20)$$

微分（8）式中的元素 $A(Z)$，并注意到运动方程（1），得：

$$A'(Z)=[N(Z)C^2-\beta\gamma C'^2]B_0+[-2N(Z)CS+2\beta\gamma C'S']A_0+$$
$$+[N(Z)S^2-\beta\gamma S'^2]\Gamma_0,$$

加上（8）式中的

$$\frac{\Gamma(Z)}{\beta\gamma}=\beta\gamma C'^2B_0-2\beta\gamma C'S'A_0+\beta\gamma S'^2\Gamma_0,$$

得到：

$$A'(Z)+\frac{\Gamma(Z)}{\beta\gamma}=N(Z)[C^2B_0-2CSA_0+S^2\Gamma_0]=N(Z)B(Z). \quad (21)$$

上式最后一步是利用了（8）式中元素 $B(Z)$ 的关系式。

以(21)式代入(20)式，并利用(10)式与(16)式，可得：

$$R''(Z)+\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}R'(Z)+\frac{N(Z)}{\beta\gamma}R(Z)-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0. \quad (17)$$

这就是非心对称椭圆束流相空间的包络线方程(17)，与第三节所获得的结果完全一致。

根据(19)式，可得包络线微分方程(17)的初始条件 $R_0$，$R_0'$，$\lambda_0$，$\lambda_0'$ 与初始束流相空间的关系为：

$$\sigma_0=\begin{bmatrix}B_0 & -A_0\\ -A_0 & \Gamma_0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(R_0\mp\lambda_0)^2}{\varepsilon} & \dfrac{(R_0\pm\lambda_0)(\beta\gamma)_0(R_0'\mp\lambda_0')}{\varepsilon} \\ \dfrac{(R_0\mp\lambda_0)(\beta\gamma)_0(R_0'\mp\lambda_0')}{\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon^2+[(R_0\mp\lambda_0)(\beta\gamma)_0(R_0'\mp\lambda_0')]^2}{\varepsilon(R_0\mp\lambda_0)^2} \end{bmatrix}.$$

## 五、应　　用

下面，我们将把前面得到的非心对称椭圆束流相空间的包络线方程(17)，应用于解决非心对称椭圆束流相空间传输的两个具体问题。

### 1. 非心对称椭圆束流相空间在无场区的传输

在无场区，运动方程(1)中的 $N(Z)=0$，则束流能量守恒，即$(\beta\gamma)'=0$ 或 $\beta\gamma=(\beta\gamma)_0$。根据(17)式，非心对称椭圆束流相空间在无场区传输的包络线方程为：

$$R''(Z)-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0. \tag{23}$$

由于 $\beta\gamma=(\beta\gamma)_0=$常数，所以束流相空间的椭圆心坐标 $\lambda(Z)$所满足的微分方程(16)变为：

$$\frac{d^2\lambda(Z)}{dZ^2}=0,\qquad \frac{d\mu(Z)}{dZ}=0. \tag{24}$$

设初始椭圆心坐标为 $\lambda(0)=\lambda_0$，$\lambda'(0)=\dfrac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}=\lambda_0'$，解微分方程(24)，得已知函数：

$$\begin{bmatrix}\lambda(Z)\\ \mu(Z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \mu_0\end{bmatrix}, \tag{25}$$

其中无场区的传输矩阵为：

$$M(Z)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0}\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

根据(5)式，得无场区的 $\sigma$ 矩阵的传输为：

$$\sigma(Z)=\begin{bmatrix}B(Z) & -A(Z)\\ -A(Z) & \Gamma(Z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0 & -A_0\\ -A_0 & \Gamma_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0} & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} B_0-2A_0\dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0}+\Gamma_0\dfrac{Z^2}{(\beta\gamma)_0^2} & -A_0+\Gamma_0\dfrac{Z}{(\beta\gamma)_0}\\ -A_0+\Gamma_0\dfrac{Z}{(\beta\gamma_0)} & \Gamma_0\end{bmatrix}. \tag{26}$$

令束流包络的初始条件为 $R(0)=R_0$，$R'(0)=R_0'$，解束流包络线微分方程(23)式，并注意到(24)式，得：

$$\frac{d}{dZ}\left\{\frac{1}{2}[R'(Z)\mp\lambda'(Z)]^2+\frac{\varepsilon^2}{2(\beta\gamma)_0^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}\right\}=0.$$

于是，

$$\pm[R'(Z)\mp\lambda'(Z)]=\sqrt{(R_0'\mp\lambda_0')^2+\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2(R_0\mp\lambda_0)^2}-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}}.$$

利用(22)式得：

$$\frac{\pm\frac{\mathrm{d}[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}{\mathrm{d}Z}}{\sqrt{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{\varepsilon}{\Gamma_0}}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\Gamma_0}{(\beta\gamma)_0^2}},$$

其中当$[R(Z)\mp\lambda(Z)][R'(Z)\mp\lambda'(Z)]<0$时，取负号，否则取正号。对上式进行积分，并注意到(22)式及无场区的初始点为$Z=0$，得到：

$$\pm\sqrt{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{\varepsilon}{\Gamma_0}}\mp\sqrt{\frac{(\beta\gamma)_0^2}{\varepsilon\Gamma_0}(R_0\mp\lambda_0)^2(R_0'\mp\lambda_0')^2}=\sqrt{\frac{\varepsilon\Gamma_0}{(\beta\gamma)_0^2}}Z.$$

因式中第二个根号前的正负号与$(R_0\mp\lambda_0)(R_0'\mp\lambda_0')$的正负号一致，故

$$\pm\sqrt{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{\varepsilon}{\Gamma_0}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\Gamma_0}}A_0=\sqrt{\frac{\varepsilon\Gamma_0}{(\beta\gamma)_0}}Z,$$

或

$$\begin{aligned}[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2&=\frac{\varepsilon}{\Gamma_0}+\frac{\varepsilon A_0^2}{\Gamma_0}-2\varepsilon A_0\frac{Z}{(\beta\gamma)_0}+\varepsilon\Gamma_0\frac{Z^2}{(\beta\gamma)^2}=\\&=\varepsilon\left[B_0-2A_0\frac{Z}{(\beta\gamma)_0}+\Gamma_0\frac{Z^2}{(\beta\gamma)_0^2}\right].\end{aligned}\tag{27}$$

合併(25)—(27)三式，可得非心对称椭圆束流相空间在无场区传输的束流包络为：

$$\begin{cases}R(Z)=\lambda_0+\frac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}Z+\sqrt{\varepsilon\left[B_0-2A_0\frac{Z}{(\beta\gamma)_0}+\Gamma_0\frac{Z^2}{(\beta\gamma)_0^2}\right]}\\\quad=\lambda(Z)+\sqrt{\varepsilon B(Z)},\quad\lambda_0+\frac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}Z>0\\R(Z)=-\lambda_0-\frac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}Z+\sqrt{\varepsilon\left[B_0-2A_0\frac{Z}{(\beta\gamma)_0}+\Gamma_0\frac{Z^2}{(\beta\gamma)_0^2}\right]}\\\quad=-\lambda(Z)+\sqrt{\varepsilon B(Z)},\quad\lambda_0+\frac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}Z<0\end{cases}\tag{28}$$

其中$B_0$、$A_0$、$\Gamma_0$为束流包络初始条件$R_0$、$R_0'$、$\lambda_0$、$\lambda_0'$与发散度$\varepsilon$的函数，如公式(22)所示。

本节通过解束流包络线方程(17)所得的无场区的束流包络(28)与第二节用$\sigma$矩阵方法解得的结果(10)完全吻合。

### 2．非心对称椭圆束流相空间在四极矩场区的传输

在四极矩场区，运动方程(1)中的$N(Z)=K=$常数，则束流能量仍守恒，即$(\beta\gamma)'=0$或$\beta\gamma=(\beta\gamma)_0$。根据(17)式，非心对称椭圆束流相空间在四极矩场区传输的包络线方程为：

$$[R(Z)\mp\lambda(Z)]''+\frac{K}{(\beta\gamma)_0}[R(Z)\mp\lambda(Z)]-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^3}=0.\tag{29}$$

相应地，束流相空间的椭圆心坐标$\lambda(Z)$所满足的微分方程(16)变成：

$$\frac{d^2\lambda(Z)}{dZ^2}+\frac{K}{(\beta\gamma)_0}\lambda(Z)=0,\quad \frac{d\mu(Z)}{dZ}+K\lambda(Z)=0. \tag{30}$$

设初始椭圆心坐标为 $\lambda(0)=\lambda_0$，$\lambda'(0)=\frac{\mu_0}{(\beta\gamma)_0}=\lambda_0'$，解微分方程(30)，得已知函数：

$$\begin{bmatrix}\lambda(Z)\\ \mu(Z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \frac{1}{(\beta\gamma)_0}\sqrt{\frac{(\beta\gamma)_0}{K}}\sin\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\\ -(\beta\gamma)_0\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}\sin\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \cos\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \mu_0\end{bmatrix}. \tag{31}$$

当 $K>0$ 时，即为聚焦四极矩场区，其传输矩阵为

$$M(Z)=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \frac{1}{(\beta\gamma)_0}\sqrt{\frac{(\beta\gamma)_0}{K}}\sin\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\\ -(\beta\gamma)_0\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}\sin\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \cos\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\end{bmatrix},$$

当 $K<0$ 时，即为散焦四极矩场区，其传输矩阵为：

$$M(Z)=\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{-K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \frac{1}{(\beta\gamma)_0}\sqrt{\frac{(\beta\gamma)_0}{-K}}\mathrm{sh}\sqrt{\frac{-K}{(\beta\gamma)_0}}Z\\ -(\beta\gamma)_0\sqrt{\frac{-K}{(\beta\gamma)_0}}\mathrm{sh}\sqrt{\frac{-K}{(\beta\gamma)_0}}Z & \mathrm{ch}\sqrt{\frac{-K}{(\beta\gamma)_0}}Z\end{bmatrix}.$$

根据(5)式，得四极矩场区的 $\sigma$ 矩阵的传输为：

$$\sigma(Z)=\begin{bmatrix}B(Z) & -A(Z)\\ -A(Z) & \Gamma(Z)\end{bmatrix}=M(Z)\begin{bmatrix}B_0 & -A_0\\ -A_0 & \Gamma_0\end{bmatrix}\tilde{M}(Z)$$

$$=\begin{bmatrix}B_0\cos^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-\frac{A_0}{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\frac{\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}\sin^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & -B_0\frac{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}{2}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-A_0\cos 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\frac{\Gamma_0}{2\sqrt{K(\beta\gamma_0)}}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\\ -B_0\frac{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}{2}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-A_0\cos 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\frac{\Gamma_0}{2\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z & B_0K(\beta\gamma)_0\sin^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-A_0\sqrt{K(\beta\gamma)_0}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\Gamma_0\cos^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\end{bmatrix}. \tag{32}$$

令束流包络的初始条件为 $R(0)=R_0$，$R'(0)=R_0'$，解束流包络微分方程(29)式，得：

$$\frac{d}{dZ}\left\{\frac{1}{2}[R'(Z)\mp\lambda'(Z)]^2+\frac{1}{2}\frac{K}{(\beta\gamma)_0}[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2+\frac{\varepsilon^2}{2(\beta\gamma)_0^2[R(Z]\mp\lambda(Z)]^2}\right\}=0.$$

$$\pm[R'(Z)\mp\lambda'(Z)]=$$

$$=\sqrt{(R_0'\mp\lambda_0')^2+\frac{K}{(\beta\gamma)_0}(R_0\mp\lambda_0)^2+\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2(R_0\mp\lambda_0)^2}-\frac{K}{(\beta\gamma)_0}[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)_0^2[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2},$$

或利用(22)式得：

$$\pm[R(Z)\mp\lambda(Z)][R'(Z)\mp\lambda'(Z)]=$$

$$\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}\sqrt{\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right][R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-[R(Z)\mp\lambda(Z)]^4-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}.$$

于是，

$$\pm\frac{\mathrm{d}[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2}{2\,\mathrm{d}Z}=$$

$$\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)}+EB_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}-\left\{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]\right\}^2}.$$

式中当$[R(Z)\mp\lambda(Z)][R'(Z)\mp\lambda'(Z)]<0$时取负号，否则取正号。对上式进行积分，并注意到(22)式及场区的初始点为$Z=0$，得到：

$$\sin^{-1}\frac{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)}+\varepsilon B_0\right]}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}}-\sin^{-1}\frac{\varepsilon B_0-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z,$$

或写成：

$$\sin^{-1}x-\sin^{-1}x_0=2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z.$$

两边取 sin 或 cos，得：

$$\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z=x\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}+xx_0.$$

于是有：

$$\cos^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}+xx_0\right],$$

$$\sin^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}+xx_0\right],$$

其中，

$$x=\frac{[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}},$$

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{\frac{-\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}+\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right][R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-[R(Z)\mp\lambda(Z)]^4}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}},$$

$$x_0=\frac{\frac{1}{2}\left[\varepsilon B_0-\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}\right]}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}},$$

$$\sqrt{1-x_0}\,\frac{\sqrt{\frac{-\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}+\frac{\varepsilon B_0\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}}=\frac{-\frac{\varepsilon A_0}{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]^2-\frac{\varepsilon^2}{K(\beta\gamma)_0}}}.$$

利用这些关系，可以演算得：

$$\varepsilon\left[B_0\cos^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-\frac{A_0}{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\frac{\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}\sin^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]+\frac{1}{2}\left[\varepsilon B_0-\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}\right][\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}+xx_0]-$$

$$-\frac{\varepsilon A_0}{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}[x\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-x^2}]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]+[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}+\varepsilon B_0\right]$$

$$=[R(Z)\mp\lambda(Z)]^2. \tag{33}$$

合併(31)—(33)三式，得非心对称椭圆束流相空间在四极矩场区传输的束流包络为：

$$R(Z)=\left|\lambda_0\cos\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\lambda_0'\sqrt{\frac{(\beta\gamma)_0}{K}}\sin\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z\right|+$$

$$+\sqrt{\varepsilon\left[B_0\cos^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z-\frac{A_0}{\sqrt{K(\beta\gamma)_0}}\sin 2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma)_0}}Z+\frac{\Gamma_0}{K(\beta\gamma)_0}\sin^2\sqrt{\frac{K}{(\beta\gamma_0)}}Z\right]}$$

$$=|\lambda(Z)|+\sqrt{\varepsilon B(Z)}, \tag{34}$$

其中 $B_0$，$A_0$，$\Gamma_0$ 为束流包络初始条件 $R_0$，$R_0'$，$\lambda_0$，$\lambda_0'$ 与发散度 $\varepsilon$ 的函数，如公式(22)所示。

本节通过解束流包络线方程(17)所得的四极矩场区的束流包络(34)，与第二节用 $\sigma$ 矩阵方法解得的结果(10)式，完全吻合。

## 参 考 文 献

[1] 谢羲等，原子能科学技术，2，119(1979)。
[2] 陈银宝，谢羲，原子核物理，3，73(1981)。

(编辑部收到日期：1983 年 10 月 24 日)