

有限单元法计算扇形聚焦回旋加速器 三维磁场

赵小凤

(上海原子核研究所)

给出了扇形聚焦回旋加速器主磁体三维磁场有限单元法(标量势)的一系列计算公式及周期边界条件在程序中的实现方法。对于采用三棱柱等参单元剖分的一般三维静磁问题, 本文的公式和方法仍然有效。

关键词 有限元方法, 三维磁场

一、基本方程和定解条件

恒定磁场遵从方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = 1.25664 \vec{j}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (1)$$

式中 \vec{B} 是磁通密度(G), \vec{H} 是磁场强度(Oe), μ 是磁导率(真空中 $\mu_0=1$), \vec{j} 是激磁电流密度(A/cm²)。对于不存在电流的求解域有 $\nabla \times \vec{H} = 0$, 此时可引入计算量 ϕ (标量势), 使之满足:

$$\vec{H} = -\text{grad}\phi$$

这样在三维直角坐标系中有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

方程(2)的定解条件如下: 由于实际磁体的磁轭是H型(图1), 故引入等效磁体模型为一个具有环形柱和圆盘形横梁的磁体, 其 L_k 和 h 由下式决定:

$$\begin{cases} \pi(L_k^2 - L_0^2) = 2 S_B, \\ \pi \left(L_k + \frac{d}{2} \right) h = 2 S_A \end{cases} \quad (3)$$

式中 d 是磁极直径, L_0 是实际磁体的主柱内侧到加速器中心O的距离, S_A 和 S_B 分别为实际磁体横梁、主柱的横截面积。计算中认为环形立柱和圆盘形横梁的外侧没有漏磁; 同时加速器磁体磁场沿方位角呈三扇周期分布并对中心平面 S_1 呈镜对称, 故求解域缩小到等效磁体的 1/6 区域(如图2)。这样在镜对称边界面 S_1 上有 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, 即

$$\begin{cases} \phi_{\pm} + \phi_{\text{漏}} = 1.25664 \text{ NI}, \\ \phi_{\text{ABCD}} = \phi_{\pm}, \\ \phi_{\text{OEF}} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

式中 ϕ_{\pm} 、 $\phi_{\text{漏}}$ 分别为加速器主磁通和漏磁通所消耗的磁势, NI 为激磁总安匝数。在周期

边界面 S_2 和 S_3 上有:

$$\phi_{s_2} = \phi_{s_3} \quad (5)$$

在底横梁外侧边界面 S_4 上有 $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, 在环形立柱外侧面 S_5 上有 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

二、单元剖分及其基函数

本文采用六节点三棱柱等参单元对求解域作剖分, 这样无论是待求函数 ϕ 还是位置坐标 (x, y, z) , 均可由同一基函数 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ 的线性组合来表示, 即对于单元 e 有

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta, \zeta) \phi_i \\ x = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \\ y = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \\ z = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \end{array} \right. \quad (6)$$

式中 (ξ, η, ζ) 是局部坐标系。六节点三棱柱等参单元在局部坐标系中是一个正三棱柱, 其高为 2, 上下底的直角边长为 1, 坐标原点在直角棱边的中点, 其基函数的具体表达式可以被唯一地确定为:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\xi-\eta), \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1-\xi)\xi, \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1-\xi)\eta, \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\xi-\eta), \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)\xi, \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)\eta, \end{array} \right. \quad (7)$$

三、变分原理和代数方程组

有限单元法运用变分法中的原理, 即使某泛函取得极值的函数必是该泛函所对应的 Euler 方程的解^[1], 这样方程(2)的定解问题就转化为求解如下的变分问题:

$$\begin{cases} W(\phi) = \iiint_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \min, \\ \phi_{\text{ABCD}} = \phi_{\text{主}}, \\ \phi_{\text{OEF}} = 0, \\ \phi_{s_2} = \phi_{s_3}. \end{cases} \quad (8)$$

式中 Ω 为求解域。在有限单元法中，只要单元剖分时保证单元有一界面落在介质交界面上，则空气与铁的交界面条件在变分中自动满足，而界面 S_4 和 S_5 为齐次第二类边界条件，也无须在变分问题(8)中列出。

经过一系列的数学推导，在求解域 Ω 内完成变分问题(8)后，就得到关于待求函数 ϕ 在各节点上的代数方程组

$$\sum_{j=1}^{N_0} k_{ij} \phi_j = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, N_0 \quad (9)$$

式中 N_0 是求解域的总节点数，而三棱柱单元 e 对(9)式有系数的“贡献”为：

$$k_{ij}^e = \iiint \mu \left[[J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right]^T \left[[J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right] |J| d\xi d\eta d\xi, \quad (10)$$

式中 $[J]^{-1}$ 是雅可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵； $[J]$ 的各元素为：

$$\begin{cases} J_{11} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(x_2-x_1) + (1+\xi)(x_5-x_4)], \\ J_{12} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(y_2-y_1) + (1+\xi)(y_5-y_4)], \\ J_{13} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(z_2-z_1) + (1+\xi)(z_5-z_4)], \\ J_{21} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(x_3-x_1) + (1+\xi)(x_6-x_4)], \\ J_{22} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(y_3-y_1) + (1+\xi)(y_6-y_4)], \\ J_{23} = \frac{1}{2} [(1-\xi)(z_3-z_1) + (1+\xi)(z_6-z_1)], \\ J_{31} = \frac{1}{2} [(1-\xi-\eta)(x_4-x_1) + (x_5-x_2)\xi + (x_6-x_3)\eta], \\ J_{32} = \frac{1}{2} [(1-\xi-\eta)(y_4-y_1) + (y_5-y_2)\xi + (y_6-y_3)\eta], \\ J_{33} = \frac{1}{2} [(1-\xi-\eta)(z_4-z_1) + (z_5-z_2)\xi + (z_6-z_3)\eta]. \end{cases} \quad (11)$$

由三维二点高斯积分公式可进一步得到(10)式的数值积分式：

$$k_i^j = \frac{\mu}{32} \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \sum_{h=1}^2 (A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3}) / |J|, \quad (12)$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \xi = \xi_s, \eta = \eta_t, \zeta = \zeta_h$$

式中:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(1-\xi)(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} + J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33}) - (1-\xi-\eta)(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{12} &= -(1-\xi)(J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} + J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) - (1-\xi-\eta)(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{13} &= -(1-\xi)(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31} + J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32}) - (1-\xi-\eta)(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ A_{21} &= (1-\xi)(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) - \xi(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{22} &= (1-\xi)(J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}) - \xi(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{23} &= (1-\xi)(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}) - \xi(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ A_{31} &= (1-\xi)(J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33}) - \eta(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{32} &= (1-\xi)(J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) - \eta(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{33} &= (1-\xi)(J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32}) - \eta(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ A_{41} &= -(1+\xi)(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} + J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33}) + (1-\xi-\eta)(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{42} &= -(1+\xi)(J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} + J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) + (1-\xi-\eta)(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{43} &= -(1+\xi)(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31} + J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32}) + (1-\xi-\eta)(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ A_{51} &= (1+\xi)(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) + \xi(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{52} &= (1+\xi)(J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}) + \xi(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{53} &= (1+\xi)(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}) + \xi(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ A_{61} &= (1+\xi)(J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33}) + \eta(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}), \\ A_{62} &= (1+\xi)(J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) + \eta(J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23}), \\ A_{63} &= (1+\xi)(J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32}) + \eta(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}), \\ \xi_s &= \eta_t = \zeta_h = 0.57735026919, \\ |J| &= J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) - J_{12}(J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}). \end{aligned}$$

四、周期边界条件的实现

对于周期边界条件(5)必须在计算机程序中作专门处理。为叙述方便,以如图3的平面问题为例:设求解域为图中实线所示的三角形单元的集合,共有25个节点,32个单元,其中1—2—3—4—5和21—22—23—24—25组成两条对应的周期边界,即有: $\phi_i = \phi_{i+20} (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。显然计算中可省略对节点21—25的求解,降阶到20个节点。注意到周期边界条件的实质是该两条边界周围的单元对其边界上对应节点的“贡献”是相等的,因而在程序设计要设法把单元25—32对节点21—25的“贡献”累加到对应的周期节点1—5上去。具体实现方法如下:

1. 在节点1—5的左侧增设“虚拟单元”33—40,这些“虚拟单元”完全和单元25—32一一对应(形状、大小、方位及节点编号——除已有的1—5节点编号外)。
2. 在程序对系数矩阵[K]的元素作一维紧缩存储的元素地址编号时,单元总数应包括“虚拟单元”,即单元总数应是40个。
3. 在形成[K]矩阵时,单元总数不应包括“虚拟单元”,即仅在原来的求解域内进行

(1—32单元)。

4. 当[K]矩阵形成后,再用单元 25—32 对节点 21—25 的“贡献”分别一一对应去替代“虚拟单元”33—40对节点 1—5 的“贡献”,并累加到 1—5 节点的有关[K]元素上去,即在程序中实现如下的把箭头左端标识符的内存值累加到箭头右端标识符的内存值上去:

$$\begin{aligned}
 &K_{21,21} \rightarrow K_{1,1}; \quad K_{22,22} \rightarrow K_{2,2}; \quad K_{23,23} \rightarrow K_{3,3}; \\
 &K_{24,24} \rightarrow K_{4,4}; \quad K_{25,25} \rightarrow K_{5,5}; \quad K_{25,20} \rightarrow K_{20,5}; \\
 &K_{25,19} \rightarrow K_{19,5}; \quad K_{24,19} \rightarrow K_{19,4}; \quad K_{23,19} \rightarrow K_{19,3}; \\
 &K_{23,18} \rightarrow K_{18,3}; \quad K_{23,17} \rightarrow K_{17,3}; \quad K_{22,17} \rightarrow K_{17,2}; \\
 &K_{21,17} \rightarrow K_{17,1}; \quad K_{21,16} \rightarrow K_{16,1}; \quad K_{25,24} \rightarrow K_{5,4}; \\
 &K_{24,23} \rightarrow K_{4,3}; \quad K_{23,22} \rightarrow K_{3,2}; \quad K_{22,21} \rightarrow K_{2,1};
 \end{aligned}$$

5. 对对应于节点 1—20 的代数方程组作求解。

五、小增量牛顿拉斐逊迭代法

如果加速器磁体仅工作在铁磁材料磁化曲线的线性段,那么(9)式仅是线性代数方程组;对于可变能量回旋加速器,磁体的某些部分将工作在磁化曲线的非线性段,即 μ 也是场量的函数,这时(9)式是一组非线性代数方程组。

本文采用小增量牛顿拉斐逊(Newton-Raphson)迭代法来处理非线性问题,它的迭代格式是^[2]:(第 $n+1$ 次)

$$\{\phi^{(n+1)}\} = \{\phi^{(n)}\} + \{\Delta\phi^{(n)}\},$$

其中 $\{\Delta\phi^{(n)}\}$ 满足下列方程组:

$$[P(\phi^{(n)})]\{\Delta\phi^{(n)}\} = -\{F(\phi^{(n)})\}, \tag{13}$$

而

$$\{F(\phi^{(n)})\} = [K(\phi^{(n)})]\{\phi^{(n)}\},$$

$$[P(\phi)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial \phi_2}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{N_0}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \phi_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_2}, & \dots, & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_{N_0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{N_0}}{\partial \phi_1}, & \frac{\partial F_{N_0}}{\partial \phi_2}, & \dots, & \frac{\partial F_{N_0}}{\partial \phi_{N_0}} \end{bmatrix}$$

$[P(\phi)]$ 称为雅可比矩阵。三棱柱单元 e 对 $[P(\phi)]$ 有关元素的“贡献”为:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial \phi_j}\right)_e = k_{ij}^e + \frac{F_i^e F_j^e}{\mu_0^2 B_e \nabla_e} \left(\frac{\partial \mu_e}{\partial B}\right)_e,$$

式中

$$\begin{cases} F_i^e = \sum_{j=1}^6 k_{ij}^e \phi_j^e, \\ F_j^e = \sum_{i=1}^6 k_{ij}^e \phi_i^e, \\ \nabla_e = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \sum_{k=1}^2 |J|, \quad \xi = \xi_s, \quad \eta = \eta_t, \quad \zeta = \zeta_k \end{cases}$$

二维计算的^[3]经验表明，当初值较好地接近于解时，牛顿迭代法的收敛速度远比其他解非线性方程组的方法快。为了避免选取初值的困难，采用小增量条件下的牛顿拉斐逊迭代法，具体作法如下：

1. 取这样的“起始载荷”主磁势 ϕ_{\pm}^0 ，使得磁体的绝大部分单元都只工作在磁化曲线的线性段，解线性方程组 (9)，将所得结果作为 ϕ_{\pm}^0 “载荷”下牛顿拉斐逊迭代法的初值，并求解 (13) 式，直到达到迭代收敛判据。

2. 然后加载 10% (或更少) 前一次的“载荷”磁势，并以前一次计算结果作为加载后牛顿迭代法的初值，重复解 (13) 式，直到满足收敛判据。

3. 重复 (2) 过程，直到加载至磁体的工作总安匝数。

六、场量计算公式

由于在任一单元内有：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \phi_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \phi_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \phi_i \end{bmatrix},$$

可求得单元内的磁感应各分量为：

$$B_x = \mu [T_1 (J_{22} J_{33} - J_{23} J_{32}) + T_2 (J_{13} J_{32} - J_{12} J_{33}) + T_3 (J_{12} J_{23} - J_{13} J_{22})] / |J|,$$

$$B_y = \mu [T_1 (J_{23} J_{31} - J_{21} J_{33}) + T_2 (J_{11} J_{33} - J_{13} J_{31}) + T_3 (J_{13} J_{21} - J_{11} J_{23})] / |J|,$$

$$B_z = \mu [T_1 (J_{21} J_{32} - J_{22} J_{31}) + T_2 (J_{12} J_{31} - J_{11} J_{32}) + T_3 (J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21})] / |J|,$$

式中：

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} [(1-\xi)(\phi_2 - \phi_1) + (1+\xi)(\phi_5 - \phi_4)], \\ T_2 = \frac{1}{2} [(1-\xi)(\phi_3 - \phi_1) + (1+\xi)(\phi_6 - \phi_4)], \\ T_3 = \frac{1}{2} [(1-\xi-\eta)(\phi_4 - \phi_1) + \xi(\phi_5 - \phi_2) + \eta(\phi_6 - \phi_3)]. \end{cases}$$

为求得单元内各特定点处的场量，可令上式中 ξ ， η 和 ζ 取表 1 中的值。

表 1 ξ , η , ζ 的值

	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4	节点 5	节点 6	单元形心	单元上底面形心	单元下底面形心
ξ	0	1	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
η	0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
ζ	-1	-1	-1	1	1	1	0	1	-1

为得到单元下底面上任意点 (x, y, z) 处场量, 则可令 $\xi = -1$ 及

$$\xi = \frac{(y-y_1)(x_3-x_1) - (x-x_1)(y_3-y_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)},$$

$$\eta = \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)},$$

为得到单元下底面上任意点 (x, y, z) 处场量, 则可令 $\xi = 1$ 及

$$\xi = \frac{(y-y_4)(x_6-x_4) - (x-x_4)(y_6-y_4)}{(y_5-y_4)(x_6-x_4) - (y_6-y_4)(x_5-x_4)},$$

$$\eta = \frac{(x-x_4)(y_5-y_4) - (y-y_4)(x_5-x_4)}{(y_5-y_4)(x_6-x_4) - (y_6-y_4)(x_5-x_4)}.$$

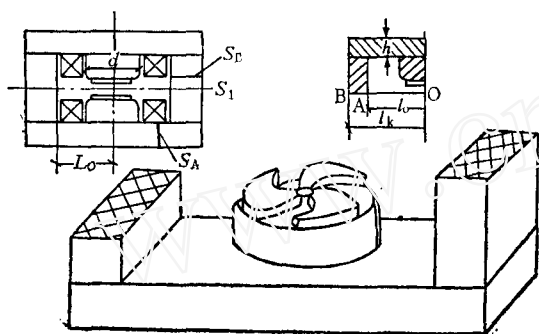


图 1 等效磁体和实际磁体 (左, 下)

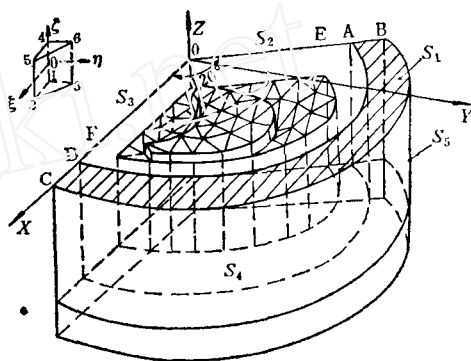


图 2 等参三棱柱单元剖分示意图

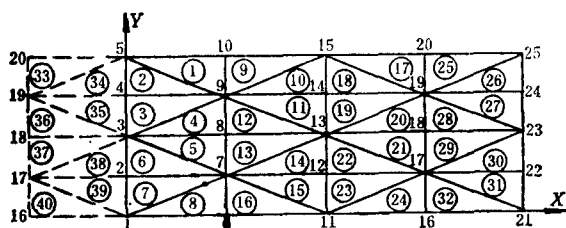


图 3 周期边界条件中的虚拟单元

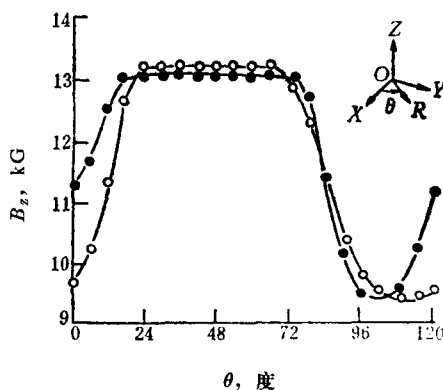


图 4 计算值与实测值的比较

○——计算值; △——实测值 $R = 50 \text{ cm}$.

七、结 果

由于代数方程组 (9) 和 (13) 的系数矩阵具有对称、正定和稀疏性, 本文采用变带宽一维紧缩存储系数矩阵以大量减小内存量, 采用 LDL^T 分解法求解方程组以减少计算工作量。由 ALGOL 60 算法语言编制的程序已在 TQ 16 机上获得了試算结果 (1980 年)。图 4 给出了在 $Z = 0$ 平面上磁场分量 B_z 沿方位角分布的计算结果与实测结果的比较 (在磁铁半径 $R = 50 \text{ cm}$ 处), 测量值是在 1:5 模型磁铁上获得。计算的 B_x, B_y 分量均为零。

为了获得满足工程设计要求的计算精度,有必要扩大计算机的内存容量并改善非线性迭代的收敛速度。

参 考 文 献

- [1] 朱伯芳,有限单元法的基本原理及其应用,水利电力出版社(1978)。
- [2] I.霍拉德和K.贝尔著,凌复华译,有限单元法在应力分析中的应用,国防工业出版社,p. 243,1972年。
- [3] 赵小凤,核技术,(5),7(1982)。

(编辑部收到日期:1984年3月24日)

A FINITE ELEMENT METHOD FOR CALCULATING THE 3-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELDS OF CYCLOTRON

ZAO XIAOFENG

*(Institute of Nuclear Research, Academia Sinica, P. O.
Box 8204, Shanghai)*

ABSTRACT

A series of formula of the finite element method (scalar potential) for calculating the three-dimensional magnetic field of the main magnet of a sector focused cyclotron, and the realization method of the periodic boundary conditions in the code are given.

Key words Finite element method, Three-dimensional magnetic fields.