

不完全驱动船舶直线航迹控制稳定性研究

周 岗¹ 姚琼荟¹ 陈永冰¹ 周永余¹ 李文魁¹

摘 要 基于输入输出线性化的技术, 针对不完全驱动水面船舶直线航迹控制系统的非线性数学模型, 给出了一种重定义输出变量和采用该输出变量的状态反馈控制律. 文中基于 Lyapunov 直接法, 得到了保证系统全局渐近稳定的充分条件. 数值仿真和模拟试验结果证明了该充分条件的正确性.

关键词 Lyapunov 函数, 重定义输出变量, 输入输出线性化, 船舶航迹控制
中图分类号 TP273; U661.33

A Study of Stability of Straight-line Tracking Control System for Underactuated Ship

ZHOU Gang¹ YAO Qiong-Hui¹ CHEN Yong-Bing¹ ZHOU Yong-Yu¹ Li Wen-Kui¹

Abstract Based on the input-output linearization technique, a class of redefinition output variables are presented for the ship's straight-line tracking control system. At the same time, the state feedback control law is developed. In this paper, the sufficient conditions for global asymptotical stability are given by means of Lyapunov's direct method. The results of numerical simulation and experiments on a simulator show the validity of the sufficient conditions.

Key words Lyapunov function, redefinition output variable, input-output linearization, ship's tracking control

1 引言

为节省时间、缩短距离和降低油耗, 直线航迹控制作为船舶航行过程中常用到的一种航迹控制方式正在受到广泛地关注^[1]. 文献 [2~4] 在直线航迹控制的工程实践方面作了大量的研究, 取得了一些成果, 但是在稳定性方面只能实现直线航迹控制局部渐近稳定, 这在工程实践中是不够的. 近年来, 文献 [5~12] 等应用非线性反馈控制、Backstepping 技术以及反馈线性化等技术对不完全驱动船舶航迹控制问题进行研究, 期望获得船舶航迹全局稳定的控制效果. 可见, 应用新的控制方法研究不完全驱动船舶航迹全局稳定性问题已经成为研究的热点.

本文针对不完全驱动船舶直线航迹控制非线性模型, 基于输入输出线性化技术, 对直线航迹控制的全局稳定性进行了研究.

文中给出一种重定义输出变量 $z = k(\phi + f(y)) + r$. 同时指出基于该重定义输出变量设计的控制律将使航迹闭环系统收敛于状态空间中一个过零点的曲面.

在进一步的稳定性分析中, 基于 Lyapunov 直

接法得到了保证航迹控制系统全局渐近稳定的充分条件:

- 1) 重定义输出变量 z 全局渐近收敛于零;
- 2) 当 $y \neq 0$ 时, $\sin(f(y))y > 0$;
- 3) 当 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^y \sin(f(y))dy \rightarrow \infty$;
- 4) 对任意 $y \in \mathcal{R}$, 存在 $M > 0$, 使得 $f'(y) < M$.

数值仿真和模拟实验结果表明, 所给出的充分条件能够保证不完全驱动船舶航迹控制全局渐近稳定. 并且由于此充分条件易于达到, 因此该结论对进一步的工程实践具有明显的指导意义和理论参考价值.

2 系统数学模型及控制器设计

船舶直线航迹控制的非线性数学模型^[12] 为

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin \phi \\ \dot{\phi} = r \\ \dot{r} = -\frac{1}{T}r - \frac{\alpha}{T}r^3 + \frac{K}{T}\delta \end{cases} \quad (1)$$

其中, y 为横偏位移, U 为船舶前进速度, ϕ 为航向角, r 为艏摇角速度, δ 为控制舵角, K 、 T 、 α 为船舶操纵参数.

针对上述模型, 采用输入输出线性化方法进行控制器的设计, 为此须构造系统的输出函数. 重定义输出变量

$$z = k(\phi + f(y)) + r \quad (2)$$

式中 $f(y)$ 为关于 y 的连续可导函数, $k > 0$.

收稿日期 2005-10-10 收修改稿日期 2006-10-10
Received October 10, 2005; in revised form October 10, 2006
国家自然科学基金 (40376011) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (40376011)
1. 海军工程大学电气与信息工程学院导航工程系 武汉 430033
1. Department of Navigation Engineering, College of Electrical and Information Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033
DOI: 10.1360/aas-007-0378

为了得到线性输入输出关系, 对式 (2) 定义的输出变量沿式 (1) 的轨迹求时间导数直至出现输入 δ , 得到以下微分方程

$$\dot{z} = k(r + f'(y)U \sin \phi) - \frac{1}{T}r - \frac{\alpha}{T}r^3 + \frac{K}{T}\delta \quad (3)$$

这时, $L_f^1 h = k(r + f'(y)U \sin \phi) - \frac{1}{T}r - \frac{\alpha}{T}r^3$, $L_g L_f^0 h = \frac{K}{T} \neq 0$, 输入 δ 被导出, 可见系统的关系度 R (也称相对阶) 为 1.

取状态反馈控制律

$$\delta = \frac{1}{L_g L_f^0 h} (-L_f^1 h + \nu) = \frac{T}{K} (-k(r + f'(y)U \sin \phi) + \frac{1}{T}r + \frac{\alpha}{T}r^3 + \nu) \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3), 得到一阶线性微分方程 $\dot{z} = \nu$, 如果取

$$\nu = -k_1 z \quad (5)$$

可得闭环系统

$$\dot{z} + k_1 z = 0 \quad (6)$$

式中 k_1 为大于零的实数, 由设计者选定.

将式 (5) 代入式 (4), 得

$$\delta = \frac{T}{K} (-k_1 k(\phi + f(y)) - (k + k_1 - \frac{1}{T})r - kf'(y)U \sin \phi + \frac{\alpha}{T}r^3) \quad (7)$$

式 (7) 即为所求控制律. 根据前面控制器的设计可知, 针对式 (1) 描述的直线航迹控制问题, 控制律 (7) 将原系统收敛到新状态空间的零平衡点 $z = 0$, 也即

$$k(\phi + f(y)) + r = 0 \quad (8)$$

在 y, ϕ, r 构成的 3 维状态空间中, 式 (8) 描述的是一个过零点的曲面 (详见附录 A). 因函数 $f(y)$ 由设计者选定, 所以可称该曲面为预设曲面.

为了保证上述输入输出线性化控制方法能够实现系统全局渐近稳定, 必须解决以下三个问题:

- 1) 设计的控制器是否可以保证状态空间中的所有点收敛到预设曲面上;
- 2) 在预设曲面上的所有状态点能否收敛到零平衡点;
- 3) 状态空间中的所有点是否能够稳定到预设曲面并沿该曲面收敛到零平衡点.

输入输出线性化的设计方法应用微分几何精确线性化理论以及线性控制理论, 可以保证状态空间中的所有点当 $t \rightarrow \infty$ 时, 收敛到预设曲面上. 因此输入输出线性化设计方法直接解决了问题 1), 但不能解决问题 2) 和 3), 必须根据稳定性理论找出限制条件.

3 稳定性分析

在稳定性分析之前, 先给出引理 1.

引理 1. 当 $a > 0$ 时, 对任意 $x \in \mathfrak{R}$ 下列不等式成立:

$$-ax^2 + bx \leq -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b^2}{2a}$$

证明. 下式显然成立

$$\frac{ax^2}{2} - bx + \frac{b^2}{2a} = \frac{1}{2}(\sqrt{ax} - \frac{b}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$$

由上式立即可得引理 1. \square

依据第 2 节的阐述, 针对式 (7) 与式 (1) 构成的闭环系统, 其稳定性分析将涉及以下三个问题.

问题 1. 针对式 (1) 和式 (2) 构成的组合系统, 设计的反馈控制律 (7) 是否使状态空间中的所有点全局渐近收敛于预设曲面 $z = 0$.

问题 2. 如果控制律 (7) 使 $z = 0$, 可否保证 z 中组合元素 y, ϕ, r 的收敛性, 即曲面上的所有状态点能否收敛到零平衡点.

问题 3. 控制律 (7) 可否保证系统 (1) 全局渐近收敛于零平衡状态.

针对问题 1, 提出定理 1.

定理 1. 针对式 (1) 和式 (2) 构成的组合系统, 控制律 (7) 可以使闭环系统 (6) 全局渐近稳定, 即状态空间中的所有点全局渐近收敛于曲面 $z = 0$.

证明. 由线性系统理论可知, 式 (7) 中系数 k_1 大于零是该一阶系统全局渐近稳定的充分必要条件, 所以闭环系统 (6) 是全局渐近稳定的, 即状态空间中的所有点全局渐近收敛于曲面 $z = 0$. \square

针对问题 2, 提出定理 2.

定理 2. 针对式 (1) 和式 (2) 构成的组合系统, 当控制律 (7) 使得 z 全局渐近收敛于零时, 若函数 $f(y)$ 满足条件:

- 1) 当 $y \neq 0$ 时, $\sin(f(y))y > 0$;
- 2) 当 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^y \sin(f(y))dy \rightarrow \infty$;
- 3) 对任意 $y \in \mathfrak{R}$, 存在 $M > 0$, 使得 $f'(y) < M$.

则可保证 z 中组合元素 y, ϕ, r 的收敛性, 即在曲面上的所有状态点收敛到零平衡点.

证明. 由定理 1 知控制律 (7) 可使 $z = 0$. 将 $z = 0$ 代入式 (2) 可得

$$r = -k(\phi + f(y)) \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (1) 中的第二个方程, 得

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin \phi \\ \dot{\phi} = -k(\phi + f(y)) \end{cases} \quad (10)$$

令 $\xi = \phi + f(y)$, 式 (10) 变换为

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin(\xi - f(y)) \\ \dot{\xi} = -k\xi + f'(y)U \sin \phi \end{cases} \quad (11)$$

由中值定理可知, 必存在 $\theta \in [-f(y), -f(y) + \xi]$, 使得 $U \sin(\xi - f(y)) = -U \sin(f(y)) + U \cos \theta \cdot \xi$, 由此可将式 (11) 进一步写为如下形式

$$\begin{cases} \dot{y} = -U \sin(f(y)) + U \cos \theta \cdot \xi \\ \dot{\xi} = -k\xi + f'(y)U \sin \phi \end{cases} \quad (12)$$

针对式 (12) 描述的非线性闭环系统, 很难找到一个统一的 Lyapunov 函数证明系统全局渐近稳定. 研究表明, 可以在 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域中找到一个 Lyapunov 函数, 证明系统是大范围渐近稳定的, 同时也可以证明必然存在时刻 T_0 , 当 $t \geq T_0$ 时, 系统的状态点将进入到 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域内, 并且不会离开此区域. 由此本文将分两步对闭环系统 (10) 的稳定性进行分析.

第一步证明必存在某个时刻 T_0 , 当 $t \geq T_0$ 时, ϕ 将进入到 $(-\pi, \pi)$ 区域内, 并且不会离开该区域.

首先, 由条件 2) 可知 $|f(y)| < \pi$ 必成立. 并且由式 (10) 中第二个方程可得

$$\phi(t) = e^{-kt} \phi_0 - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} k f(y) d\tau \quad (13)$$

由式 (13) 可得到以下不等式

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq |e^{-kt} \phi_0| + \left| \int_0^t e^{-k(t-\tau)} k f(y) d\tau \right| \\ &\leq |e^{-kt} \phi_0| + \sup |f(y)| (1 - e^{-kt}) \end{aligned} \quad (14)$$

由 $|f(y)| < \pi$ 可知必存在一个正数 $\varepsilon \in (0, \pi)$, 使得下式成立

$$\sup |f(y)| < \pi - \varepsilon \quad (15)$$

将式 (15) 代入不等式 (14) 可得

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq |e^{-kt} \phi_0| + (\pi - \varepsilon)(1 - e^{-kt}) \\ &\leq |e^{-kt} \phi_0| + (\pi - \varepsilon) \end{aligned} \quad (16)$$

又因当 $t \rightarrow \infty$ 时, $|e^{-kt} \phi_0| \rightarrow 0$, 所以必然存在时刻 T_0 , 当 $t \geq T_0$ 时有 $|e^{-kt} \phi_0| < \varepsilon$, 代入式 (16) 可得

$$|\phi(t)| < \pi \quad (17)$$

不等式 (17) 表明, 当 $t \geq T_0$ 时 ϕ 将进入到 $(-\pi, \pi)$ 区域内, 并且不会离开该区域.

第二步证明在 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域内, 式 (12) 描述的非线性闭环系统是大范围渐近稳定的.

选取 Lyapunov 预选函数 $V = V_1 + V_2$, 取

$$V_1 = \int_0^y 2 \sin(f(y)) dy + \frac{U}{2k} \xi^2$$

沿式 (12) 的轨迹对 V_1 求时间导数并根据引理 1 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -2U \sin^2(f(y)) + 2U \sin(f(y)) \cdot \cos \theta \cdot \xi - \\ &U \xi^2 + \frac{1}{k} U f'(y) \sin \phi \xi \\ &\leq -2U \sin^2(f(y)) + U(\sin^2(f(y)) + \cos^2 \theta \cdot \xi^2) - \\ &U \xi^2 + \frac{1}{k} U f'(y) \sin \phi \xi \\ &= -U \sin^2(f(y)) - U(1 - \cos^2 \theta) \xi^2 + \\ &\frac{1}{k} U f'(y) \phi \sin \phi + \frac{1}{k} U f'(y) f(y) \sin \phi \end{aligned}$$

取

$$V_2 = \frac{1}{k} \int_0^y (M - f'(y)) f(y) dy + \frac{M}{k^2} U \int_0^\phi \sin \phi d\phi$$

沿式 (10) 的轨迹对其求时间导数, 并根据式 (9) 有

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{k} U f'(y) f(y) \sin \phi - \frac{M}{k} U \phi \sin \phi$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq -U \sin^2(f(y)) - \\ &U(1 - \cos^2 \theta) \xi^2 - \frac{M - f'(y)}{k} U \phi \sin \phi \end{aligned} \quad (18)$$

由于参数 $U > 0, k > 0$, 同时由条件 2) 和 3) 可知 V 正定.

设 $\mathbf{x} = [y \ \xi]^T$, 因函数 $f(y)$ 满足条件 1), 即 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^y \sin(f(y)) dy \rightarrow \infty$, 所以有 $V \rightarrow \infty$, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

由式 (18) 可知, 如果 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域内并且满足条件 3), 则除了点 $(y = 0, \xi = 0)$ 外, 均有 $\dot{V} < 0$. 因此在 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域内, 式 (18) 描述的非线性闭环系统是大范围渐近稳定的.

综合第一步和第二步的证明, 当 $t \geq T_0$ 时, 可取函数 V 作为 Lyapunov 预选函数, 则 V 正定, 并且当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow \infty$, 同时由式 (18) 知 \dot{V} 负定. 因此根据 Lyapunov 稳定性理论, 针对式 (12) 描述的非线性闭环系统可以断言, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$.

又因当 $\xi \rightarrow 0$ 时, 有 $\phi \rightarrow -f(y)$ 成立, 所以当 $y \rightarrow 0$ 时, $\phi \rightarrow -f(0)$, 由条件 2) 知 $f(0) = 0$, 所以 $\phi \rightarrow 0$.

同时当 $z = 0$ 时, 有 $r = -k(\phi + f(y))$ 成立, 所以当 $y \rightarrow 0$ 和 $\phi \rightarrow 0$ 时, $r \rightarrow 0$.

以上分析表明, 当控制律 (7) 使得 z 全局收敛于零时, 若函数 $f(y)$ 满足定理 2 的 3 个条件, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $y \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, r \rightarrow 0$ 成立, 即在曲面上的所有状态点收敛到零平衡点. \square

针对问题 3, 提出定理 3.

定理 3. 针对式 (1) 和式 (2) 构成的组合系统, 若定理 1 成立并且函数 $f(y)$ 满足定理 2 的 3 个条件, 则控制律 (7) 与系统 (1) 构成闭环系统的零平衡状态是全局渐近稳定的.

证明见附录 B.

注. 满足以上充分条件的函数 $f(y)$ 有无数个, 这里不一一举例, 以下仅给出两个满足该稳定条件的函数:

$$f(y) = \arctan(\zeta y), f(y) = \frac{\pi \zeta y}{2\sqrt{1 + \zeta^2 y^2}}$$

式中 ζ 为大于零的实数, 由设计者选定.

根据以上结论, 只要船舶参数和控制器参数 k_1, k, ζ 大于零, 并采用上述函数构成输出变量 $z = k(\phi + f(y)) + r$, 则控制律 (7) 就可以保证船舶航迹非线性闭环系统原点平衡状态全局渐近稳定.

4 数值仿真

以文献 [12] 提供的实习船为例进行航迹控制设计. 该船船长 L 为 126m, 船宽 B 为 20.8m, 满载吃水 d 为 8m, 方形系数 C_b 为 0.681, 船速 U 为 7.7m/s. 通过计算得 $K = 0.478/s, T = 216s$, 取 $\alpha = 30$, 各参数相应设计为 $k = 0.055, k_1 = 0.145, f(y) = \arctan(0.0017y)$, 代入式 (7) 得到船舶航迹控制算法为

$$\delta = -3.6038(\phi + \arctan(0.0017y)) - 88.2845r - 0.325 \frac{\sin \phi}{1 + (0.0017y)^2} + 62.761r^3$$

取初值 $y_0 = 3000m, \phi_0 = 160^\circ$, 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

5 模拟试验

为了进一步验证所给充分条件的正确性, 进行了船舶航迹控制的模拟试验. 如图 3 所示, 以某舰船参数为例, 采用自制的航迹航向舵模拟器模拟舰船在海上的航行情况, 以 51 系列单片机系统开发的航迹航向控制器与之构成闭环系统, 该系统中所有信号与实船一致. 在单片机中以控制律 (7) 作为基础设计船舶直线航迹控制算法. 模拟条件: 航速 20kn、初始航向 254° 、初始经纬度 ($112^\circ 22'E, 21^\circ 38.5'N$).

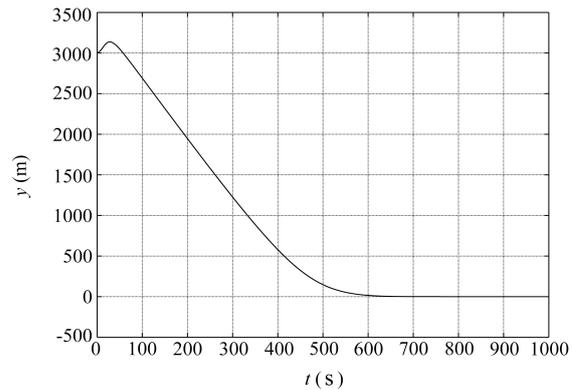


图 1 横偏位移历时曲线

Fig. 1 Time response of y

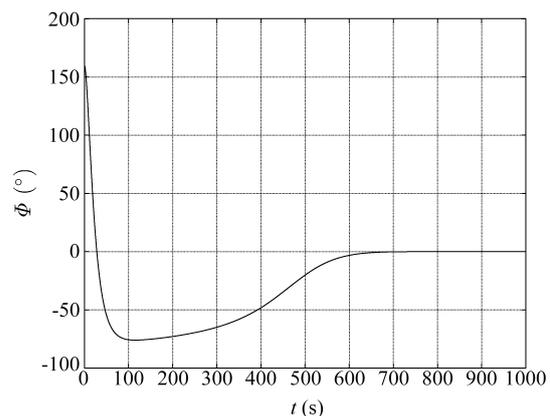


图 2 艏偏角历时曲线

Fig. 2 Time response of ϕ



图 3 船舶航迹控制模拟系统

Fig. 3 The simulation system of tracking control

图 4 为船舶运动轨迹. 船舶在初始偏离设定航线约 4300m 和初始偏离设定航迹向 227° 的条件下, 首先转向并迅速接近航线 W033 至 W034, 然后沿着预定的航线 W034 至 W037 航行. 模拟试验表明,

依据文中给出的充分条件设计的控制器能够保证船舶直线航迹控制全局渐近稳定。

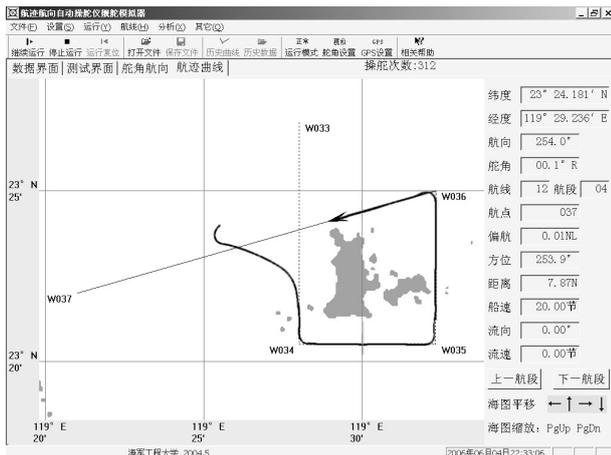


图 4 船舶运动轨迹

Fig. 4 Ship path by the simulation system

6 结论

本文针对船舶直线航迹控制系统全局渐近稳定性问题,利用输入输出线性化方法和 Lyapunov 直接法,得到了闭环系统全局稳定的充分条件.理论分析、数值仿真和模拟实验均证明了本文所得到的结论的正确性.

References

- 1 Fossen T I. Recent developments in ship control systems design. *World Superyacht Review*, Sterling Publications Limited, 2000. 115~116
- 2 Amerongen J V. Adaptive steering of ships - A model reference approach. *Automatica*, 1984, **20**(1): 3~14
- 3 Holzhuter T. LQG approach for the high-precision track control of ships. *IEE Proceedings*, 1997, **144**(2): 121~127
- 4 Holzhuter T, Schultze R. Operating experience with a high precision track controller for commercial ships. *Control Engineering Practice*, 1996, **4**(3): 343~350
- 5 Reyhanoglu M. Exponential stabilization of an underactuated autonomous surface vessel. *Automatica*, 1997, **33**(12): 2249~2254
- 6 Godhavn J M, Fossen T I, Berge S P. Nonlinear and adaptive backstepping designs for tracking control of ships. *International Journal of Adaptive Control Signal Processing*, 1998, **12**(8): 649~670
- 7 Mazenc F, Pettersen K Y, Nijmeijer H. Global uniform asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada, 2002, 510~515
- 8 Jiang Z P. Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov's direct method. *Automatica*, 2002, **38**(2): 301~309
- 9 Do K D, Jiang Z P, Pan J. Underactuated ship global tracking under relaxed conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(9): 1529~1536
- 10 Do K D, Jiang Z P, Pan J. Robust global stabilization of underactuated ships on a linear course: state and output feedback. *International Journal of Control*, 2003, **76**(1): 1~17

- 11 Lefeber E, Pettersen K Y, Nijmeijer H. Tracking control of an underactuated ship. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2003, **11**(1): 52~61
- 12 Li Tie-Shan, Yang Yan-Sheng, Zheng Yun-Feng. Input-output linearization designs for straight-line tracking control of underactuated ships. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, **26**(3): 945~948
(李铁山, 杨盐生, 郑云峰. 不完全驱动船舶航迹控制输入输出线性化设计. *系统工程与电子技术*, 2004, **26**(3): 945~948)



周 岗 海军工程大学导航工程系博士研究生. 研究方向为非线性系统控制理论及其在船舶控制系统中的应用. 本文通信作者. E-mail: jyzgzst@163.com
(**ZHOU Gang** Ph.D. candidate in Department of Navigation Engineering at Naval University of Engineering. His research interest covers nonlinear systems control theory and its applications to marine control systems. Corresponding author of this paper.)



姚琼荟 海军工程大学智能工程系教授, 博士生导师. 研究领域为非线性系统控制理论, 变结构控制理论及应用.
(**YAO Qiong-Hui** Professor in Department of Intelligent Engineering at Naval University of Engineering. His research interest covers nonlinear systems control theory, variable structure control and its applications.)



陈永冰 海军工程大学导航工程系教授. 研究领域为计算机控制与工程应用, 自动控制理论及应用.
E-mail: hgcyb@163.com
(**CHEN Yong-Bing** Professor in Department of Navigation Engineering at Naval University of Engineering. His research interest covers computer control and engineering applications, control theory and its applications.)



周永余 海军工程大学导航工程系副教授. 研究领域为计算机控制与工程应用, 自适应控制.
(**ZHOU Yong-Yu** Associate professor in Department of Navigation Engineering at Naval University of Engineering. His research interest covers computer control and engineering applications, adaptive control.)



李文魁 海军工程大学导航工程系讲师。研究领域为计算机控制与工程应用, 自适应控制, H_∞ 控制。

(**LI Wen-Kui** Lecturer in Department of Navigation Engineering at Naval University of Engineering. His research interest covers computer control and engineering applications, adaptive control, and H_∞ control.)

附录 A

因本文研究的船舶航迹直线控制系统是一个由 y, ϕ, r 构成的 3 维系统, 所以重定义输出变量可以具有以下三种形式:

1) 取 $z = f(y)$, 设其关系度 R 为 3。经过输入输出线性化后, 再根据线性系统控制理论设计的控制器可使该 3 阶系统收敛到原点, 即 $[z \ \dot{z}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$, 也即 $[f(y) \ L_f^1 f(y) \ L_f^2 f(y)]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$, 设 $f(y) = f_1(y, \phi, r)$, $L_f^1 f(y) = f_2(y, \phi, r)$, $L_f^2 f(y) = f_3(y, \phi, r)$, 在 y, ϕ, r 构成的三维空间中, $f_1(y, \phi, r) = 0$, $f_2(y, \phi, r) = 0$, $f_3(y, \phi, r) = 0$ 分别代表的是三个曲面。因此方程 $[f_1(y, \phi, r) \ f_2(y, \phi, r) \ f_3(y, \phi, r)]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ 代表的是这三个曲面的交点。可见当 $R = 3$ 时, 不考虑特殊情况系统将收敛到状态空间中的点。

2) 取 $z = f(y, \phi)$, 设其关系度 R 为 2。同理, 经过输入输出线性化后, 设计的控制器可使该系统收敛到原点, 即 $[z \ \dot{z}]^T = [0 \ 0]^T$, 也即 $[f(y) \ L_f^1 f(y)]^T = [0 \ 0]^T$ 。同样设 $f(y) = f_1(y, \phi, r)$, $L_f^1 f(y) = f_2(y, \phi, r)$, 在 y, ϕ, r 构成的三维空间中, $f_1(y, \phi, r) = 0$ 和 $f_2(y, \phi, r) = 0$ 分别代表的是两个曲面。因此方程 $[f_1(y, \phi, r) \ f_2(y, \phi, r)]^T = [0 \ 0]^T$ 代表的是这两个曲面的交线。可见当 $R = 2$ 时, 不考虑特殊情况系统将收敛到状态空间中的一条曲线。

3) 取 $z = f(y, \phi, r)$, 设其关系度 R 为 1。同理, 经过输入输出线性化后, 设计的控制器可使该系统收敛到原点, 即 $z = 0$, 也即 $f(y, \phi, r) = 0$ 。在 y, ϕ, r 构成的三维空间中, $f(y, \phi, r) = 0$ 代表的是一个曲面。因此当 $R = 1$ 时, 不考虑特殊情况系统将收敛到状态空间中的一个曲面。

以上分析表明, 在 y, ϕ, r 构成的 3 维系统中, 采用输入输出线性化技术设计的控制器可使系统收敛到状态空间中的点、线或面。

但该方法存在如下问题: 针对系统收敛到状态空间中的点, 输入输出线性化技术不能保证该点唯一是原系统的原点; 针对系统收敛到状态空间中的线, 输入输出线性化技术不能保证在该线上的所有点收敛到原系统的原点, 也不能保证状态空间中的所有点收敛到该线并进而收敛到原系统的原点; 针对系统收敛到状态空间中的面, 输入输出线性化技术不能保证在该面上的所有点收敛到原系统的原点, 也不能保证状态空间中的所有点会收敛到该面并进而收敛到原系统的原点。

为了解决上述问题, 必须根据稳定性理论找出相应的限制条件, 这正是本文的研究重点。

附录 B

定理 3 证明。

证明。将式 (7) 代入式 (1), 有

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin \phi \\ \dot{\phi} = r \\ \dot{r} = -k(r + f'(y)U \sin \phi) - k_1 z \end{cases} \quad (B1)$$

令 $\xi_1 = \phi + f(y)$, $\xi_2 = z$, 由 (2) 式, 可得 $r = \xi_2 - k\xi_1$, 代入式 (B1) 有

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin(\xi_1 - f(y)) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 - k\xi_1 + f'(y)U \sin \phi \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_2 \end{cases} \quad (B2)$$

因 $\dot{\xi}_2 = \dot{r} + k(r + f'(y)U \sin \phi)$, 将其代入式 (B2) 得

$$\begin{cases} \dot{y} = U \sin(\xi_1 - f(y)) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 - k\xi_1 + f'(y)U \sin \phi \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_2 \end{cases} \quad (B3)$$

由中值定理可知, 必存在 $\theta \in [-f(y), -f(y) + \xi_1]$ 使得 $U \sin(\xi_1 - f(y)) = -U \sin(f(y)) + U \cos \theta \cdot \xi_1$ 成立, 由此可将式 (B3) 式写为如下形式

$$\begin{cases} \dot{y} = -U \sin(f(y)) + U \cos \theta \cdot \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 - k\xi_1 + f'(y)U \sin \phi \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_2 \end{cases} \quad (B4)$$

式 (B4) 可进一步写为如下形式

$$\begin{cases} \dot{y} = -U \sin(f(y)) + U \cos \theta \cdot \xi_1 \\ \dot{\phi} = \xi_2 - k(\phi + f(y)) \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_2 \end{cases} \quad (B5)$$

与定理 2 的证明类似, 分两步对其稳定性进行分析。

第一步: 同理, 由定理 2 的条件 2) 可得 $|f(y)| < \pi$ 必成立。并且由式 (B5) 中第二个方程可得

$$\phi(t) = e^{-kt} \phi_0 - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} (kf(y) - \xi_2) d\tau \quad (B6)$$

由式 (B5) 中第三个方程可得

$$\xi_2(t) = e^{-k_1 t} \xi_{20} \quad (B7)$$

将式 (B7) 代入式 (B6) 可得

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{-kt} \phi_0 - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} (kf(y) - e^{-k_1 \tau} \xi_{20}) d\tau \\ &= e^{-kt} \phi_0 - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} kf(y) d\tau + \int_0^t e^{-k(t-\tau) - k_1 \tau} \xi_{20} d\tau \end{aligned} \quad (B8)$$

当 $k \neq k_1$ 时, 由式 (B8) 可得下列不等式

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq |e^{-kt} \phi_0| + \left| \int_0^t e^{-k(t-\tau)} kf(y) d\tau \right| + \\ &\left| \int_0^t e^{-k(t-\tau) - k_1 \tau} \xi_{20} d\tau \right| \\ &\leq |e^{-kt} \phi_0| + \sup |f(y)| (1 - e^{-kt}) + \\ &\left| \frac{\xi_{20}}{k - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-kt}) \right| \end{aligned} \quad (B9)$$

由 $|f(y)| < \pi$ 可知必存在一个正数 $\varepsilon \in (0, \pi)$, 使得下式成立

$$\sup |f(y)| < \pi - \varepsilon \quad (B10)$$

将式 (B10) 代入不等式 (B9) 可得

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq |e^{-kt} \phi_0| + (\pi - \varepsilon)(1 - e^{-kt}) + \left| \frac{\xi_{20}}{k - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-kt}) \right| \\ &\leq |e^{-kt} \phi_0| + (\pi - \varepsilon) + \left| \frac{\xi_{20}}{k - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-kt}) \right| \end{aligned} \quad (B11)$$

又 $t \rightarrow \infty$ 时, $|e^{-kt} \phi_0| \rightarrow 0$, $\left| \frac{\xi_{20}}{k - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-kt}) \right| \rightarrow 0$, 所以必然存在时刻 T_0 , 当 $t > T_0$ 时有 $|e^{-kt} \phi_0| + \left| \frac{\xi_{20}}{k - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-kt}) \right| < \varepsilon$, 将其代入不等式 (B11) 可得

$$|\phi(t)| < \pi$$

当 $k = k_1$ 时, 由式 (B8) 可得下列不等式

$$|\phi(t)| \leq |e^{-kt} \phi_0| + \sup |f(y)| (1 - e^{-k_1 t}) + |\xi_{20} t e^{-k_1 t}|$$

因 $t \rightarrow \infty$ 时, $|e^{-kt}\phi_0| \rightarrow 0, |\xi_{20}te^{-kt}| \rightarrow 0$, 所以同理可得

$$|\phi(t)| < \pi \tag{B12}$$

不等式 (B12) 表明, 必然存在时刻 T_0 , 当 $t > T_0$ 时, ϕ 将进入到 $(-\pi, \pi)$ 区域内, 并且不会离开该区域.

第二步: 选取 Lyapunov 预选函数 $V = V_1 + V_2$, 取

$$V_1 = \int_0^y 2 \sin(f(y))dy + \frac{U}{k}\xi_1^2 + \frac{1}{k_1k^2}U\xi_2^2$$

则沿式 (B4) 的轨迹对 V_1 求时间导数, 并根据引理 1 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -2U \sin^2(f(y)) + 2U \sin(f(y)) \cos \theta \cdot \xi_1 + \frac{2}{k}U\xi_1\xi_2 - \\ &2U\xi_1^2 + \frac{2}{k}Uf'(y) \sin \phi \xi_1 - \frac{2}{k^2}U\xi_2^2 \\ &\leq -U \sin^2(f(y)) - U(\sin^2(f(y)) - 2 \sin(f(y)) \cdot \cos \theta \cdot \xi_1 + \\ &\cos^2 \theta \xi_1^2) + U \cos^2 \theta \xi_1^2 - U\xi_1^2 + \frac{1}{k^2}U\xi_2^2 - \\ &\frac{2}{k^2}U\xi_2^2 + \frac{2}{k}Uf'(y) \sin \phi \xi_1 \\ &= -U \sin^2(f(y)) - U \sin^2 \phi - U(1 - \cos^2 \theta)\xi_1^2 - \frac{1}{k^2}U\xi_2^2 + \\ &\frac{2}{k}Uf'(y)\phi \sin \phi + \frac{2}{k}Uf'(y)f(y) \sin \phi \end{aligned}$$

取

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2}{k} \int_0^y (M - f'(y))f(y)dy + \frac{2M}{k^2}U \int_0^\phi \sin \phi d\phi + \\ &\frac{U}{4k_1}(\frac{2M}{k^2})^2\xi_2^2 \end{aligned}$$

沿式 (B5) 的轨迹对 V_2 求时间导数, 并根据引理 1 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{2(M - f'(y))}{k}Uf(y) \sin \phi - \frac{2M}{k}U(\phi + f(y)) \sin \phi + \\ &\frac{2M}{k^2}U\xi_2 \sin \phi - \frac{U}{2}(\frac{2M}{k^2})^2\xi_2^2 \\ &\leq -\frac{2}{k}Uf'(y)f(y) \sin \phi - \frac{2M}{k}U\phi \sin \phi - \frac{U}{4}(\frac{2M}{k^2})^2\xi_2^2 + U \sin^2 \phi \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq -U \sin^2(f(y)) - U(1 - \cos^2 \theta)\xi_1^2 - \\ &\frac{2(M - f'(y))}{k}U\phi \sin \phi - \frac{1}{k^2}U\xi_2^2 - \frac{U}{4}(\frac{2M}{k^2})^2\xi_2^2 \end{aligned} \tag{B13}$$

因参数 $U > 0, k > 0, k_1 > 0$, 同时由定理 2 的条件 2) 和 3) 可知 V 正定. 设 $\mathbf{x} = [y \ \xi_1 \ \xi_2]^T$, 因函数 $f(y)$ 满足定理 2 的条件 1), 即 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^y \sin(f(y))dy \rightarrow \infty$, 所以有 $V \rightarrow \infty$, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

由式 (B13) 可知, 如果 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 区域内并且满足定理 2 的条件 3), 则除了点 $(y = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$ 外, 均有 $\dot{V} < 0$. 因此在 $(-\pi, \pi)$ 区域内, 式 (B4) 描述的非线性闭环系统是大范围渐近稳定的.

综合第一步和第二步的证明, 当 $t > T_0$ 时, 取函数 V 作为 Lyapunov 预选函数, 则 V 正定, 并且当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow \infty$, 同时由式 (B13) 可知 \dot{V} 为负定. 因此针对式 (B4) 描述的非线性闭环系统, 根据 Lyapunov 稳定性理论可以断言, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0, \xi_1 \rightarrow 0, \xi_2 \rightarrow 0$.

将 $y = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ 代入方程

$$\begin{cases} \xi_1 = \phi + f(y) \\ \xi_2 = k(\phi + f(y)) + r \end{cases}$$

得到唯一解 $y = 0, \phi = 0, r = 0$, 因此如果重定义输出变量 $z = k(\phi + f(y)) + r$ 满足条件:

- 1) 重定义输出变量 z 全局渐近收敛于零;
- 2) 当 $y \neq 0$ 时, $\sin(f(y))y > 0$;
- 3) 当 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^y \sin(f(y))dy \rightarrow \infty$;
- 4) 对任意 $y \in \mathfrak{R}$, 存在 $M > 0$, 使得 $f'(y) < M$.

则控制律 (7) 与式 (1) 构成闭环系统的零平衡状态是全局渐近稳定的. □