Geodetic 图的几个定理

施永兵

(上海师范大学 数学科学学院,上海 200234)

摘　要:若图 G 中任一对不同顶点都有唯一的一条最短路,则称图 G 是 geodetic 图. 在此条件下构造了几类 geodetic 图和讨论了具有 Hamilton 圈的 geodetic 图.

关键词:路;geodetic 图;Hamilton 圈

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-5137(2001)04-0021-03

本文仅讨论2连通的简单图. 若图 G 中任一对不同顶点都有唯一的一条最短路连接,则称 G 是 geodetic 图. G 的一条边 $e=uv$ 的一个初等剖分是指 G 中用一条新的长为2的 (u,v) 路 P 代替边 e. G 的一条边 e 的 m 次初等剖分是指 G 中用一条新的长为 $m+1$ 的 (u,v) 路 P 代替边 e. 这条路 P 上不是端点的顶点称为边 e 的剖分点. 本文不定义的概念和记号见文[1].

定理1　一个 geodetic 图 G 的每条边同时进行 $2m$ 次初等剖分得到的图 $G^{(2m)}$ 仍是一个 geodetic 图. 这里 $m\geqslant 1$ 是整数.

证明　设 u,v 是 $G^{(2m)}$ 的两个不同的顶点. 以下分三种情形讨论.

情形1　u,v 是 G 的两个不同的顶点. 令 k 是 G 的唯一最短 (u,v) 路的长,则显然 $G^{(2m)}$ 有唯一最短 (u,v) 路,其长为 $(2m+1)k$.

情形2　u 和 v 之一是 G 的顶点. 不妨设 u 是 G 的顶点,v 是 G 的边 xy 的剖分点. 根据情形1,$G^{(2m)}$ 中恰有一条最短 (u,x) 路 P_1 和恰有一条最短 (u,y) 路 P_2. 令 w 是 P_1 和 P_2 的最后1个公共顶点. 由于 u 是在 $P_1\cap P_2$ 上,因此 w 是存在的(可能 $w=u$). 显然 w 是 G 的顶点. 令 Q_1 是 P_1 的 (w,x) 节,Q_2 是 P_2 的 (w,y) 节. 由于 G 是 geodetic 图,因此圈 $C=Q_1\cup x,\cdots,v,\cdots,y\cup Q_2^{-1}$ 是 $G^{(2m)}$ 的奇圈. 于是 C 恰有一条最短 (w,v) 路 P,从而 P 是 $G^{(2m)}$ 的唯一最短 (w,v) 路. 由此推出 $G^{(2m)}$ 有唯一最短 (u,v) 路.

情形3　u,v 都不是 G 的顶点. 不妨设 u 和 v 分别是 G 的边 e_1 和 e_2 的剖分点,且设 $e_2=xy$. 根据情形2,$G^{(2m)}$ 恰有一条最短的 (u,x) 路 P_1 和恰有一条最短的 (u,y) 路 P_2. 若 P_1 和 P_2 的最后一个公共顶点是 G 的顶点设为 w,则类似于情形2的证明推出 $G^{(2m)}$ 恰有一条最短的 (u,v) 路. 否则 $P_1\cap P_2=\{u\}$,由于 G 是 geodetic 图,易知 $C=P_1\cup x,\cdots,v,\cdots,y\cup P_2^{-1}$ 是 $G^{(2m)}$ 的一个奇圈,从而 C 恰有一条最短 (u,v) 路 P. 显然 P 也是 $G^{(2m)}$ 的唯一最短 (u,v) 路. □

文[2]指出 Peterson 图 $G_{5,2}$ 和 Hoffman-Singleton 图 G_{50} 是 geodetic 图. 以下从这两个图出发构造两类 geodetic 图.

用 $G_{5,2}^{(m)}$ 表示从 Peterson 图 $G_{5,2}$ 通过对它的每条幅同时进行 m 次初等剖分得到的图.

定理2　对每个 $m\geqslant 1$,图 $G_{5,2}^{(m)}$ 是 geodetic 图.

收稿日期:2001-01-12

作者简介:施永兵(1947-),男,上海师范大学数学科学学院教授.

证明 设 u 和 v 是 $G_{5,2}^{(m)}$ 的任意两个不同的顶点. 若 u,v 同在一个5圈上,显然这个5圈恰有一条最短(u,v)路 P. 否则,u,v 必位于 $G_{5,2}^{(m)}$ 的同一个长为$(2m+5)$的奇圈上,此时这个$(2m+5)$圈恰有一条最短(u,v)路 P'. 显然 P 和 P' 也是 $G_{5,2}^{(m)}$ 的唯一最短(u,v)路. 因此 $G_{5,2}^{(m)}$ 是 geodetic 图. □

Hoffman-Singleton 图 G_{50} 可以描述如下:它有5个5圈 $P_j=u_{j0}u_{j2}u_{j4}u_{j1}u_{j3}u_{j0}$ $(j=0,1,2,3,4)$5个5圈 $Q_k=v_{k0}v_{k1}v_{k2}v_{k3}v_{k4}v_{k0}$ $(k=0,1,2,3,4)$使 P_j 的顶点 u_{ji} 和 Q_k 的顶点 v_{ks} 相连,其中 $S=i+jk(mod\ 5)$. i、j、$k=0,1,2,3,4$.

设 $E_1=\{e|e=uv,u\in V(P_j),v\in V(Q_k),0\leqslant j,k\leqslant 4,e\in E(G_{50})\}$. 称 E_1 的每条边是 G_{50} 的辐. 用 $G_{50}^{(m)'}$ 表示从 G_{50} 中通过对 G_{50} 的每条辐同时进行 m 次初等剖分得到的图.

定理3 对每个 $m\geqslant 1$,$G_{50}^{(m)'}$ 是 geodetic 图.

证明 对任意一对 $j,k\in\{0,1,2,3,4\}$,$G_{50}^{(m)'}$ 包含一个同构于 $G_{5,2}^{(m)}$ 的子图,该子图包含 P_j 和 Q_k. 为了方便,在此就称这个子图为 $G_{50}^{(m)'}$ 的 $G_{5,2}^{(m)}$ 子图. 设 u、v 是 $G_{50}^{(m)'}$ 的任意一对不同的顶点. 若 u、v 同在 $G_{50}^{(m)'}$ 的一个 $G_{5,2}^{(m)}$ 子图上,则这个 $G_{5,2}^{(m)}$ 子图恰有一条最短(u,v)路 P. 否则 u,v 必位于 $G_{50}^{(m)'}$ 的同一个长为$4m+5$的奇圈上,此时这个$4m+5$圈恰有一条最短(u,v)路 P'. 易证 P 和 P' 也是 $G_{50}^{(m)'}$ 的唯一最短(u,v)路. 因此 $G_{50}^{(m)'}$ 是 geodetic 图. □

易知 Hoffman-Singleton 图 G_{50} 是 Hamilton 图. 到目前为止,除了奇圈和完全图外,Hoffman-Singleton 图 G_{50} 是仅有 Hamilton geodetic 图. 因此有必要讨论含 Hamilton 圈的 geodetic 图.

为了方便,在下面的讨论中,设 C 是给定 Hamilton 图 G 的 Hamilton 圈且假定 C 被画在平面上. 在此称 $E(G)-E(C)$ 中的边为 G 的弦且全画在圈 C 的内部.

定理4 图 G 是外可平面的 Hamilton geodetic 图当且仅当 G 是奇圈.

证明 充分性显然. 以下证明必要性. 倘若 G 不是奇圈,则设 G 是非奇圈的外可平面的 Hamilton geodetic 图. 显然不存在 $|V(G)|\leqslant 5$ 的这样的图 G. 归纳假设不存在 $|V(G)|<k$ $(k\geqslant 6)$ 的这样的图 G. 现在考虑 $|V(G)|=k$. 由于 G 不是奇圈(显然 G 也不是偶圈),G 包含弦 $e_1=uv$. 设 u,v 分圈 C 为两部分,记为 $C[u,v]$ 和 $C[v,u]$. 令 $C_1=e_1\cup C[u,v]$,$C_2=e_1\cup C[v,u]$. 若 C_1 和 C_2 之一是偶圈. 不妨设 C_1 是偶图,则由 C_1 和 C_1 内部的所有弦组成的 G 的子图是顶点数小于 k 的非奇圈的外可平面的 Hamilton geodetic 图,这与假设矛盾. 因此 C_1 和 C_2 必然都是奇圈,于是 C 是偶圈,易知 $C+e_1$ 不是 geodetic 图,即 $G\neq C+e_1$. 设 $e_2=xy\neq e_1$ 是 G 的弦. 由于 G 是外可平面图,不妨设 e_2 在 C_1 内部. 于是 e_2 的两个端点分 C_1 为两部分记为 $C_1[x,y]$ 和 $C_1[y,x]$. 令 $C_3=e_2\cup C_1[x,y]$,$C_4=e_2\cup C_1[y,x]$. 显然 C_3 和 C_4 之一必是偶圈. 在此不妨设 C_3 是偶图. 由于 G 是外可平面图,容易推出由 C_3 和 C_3 内部的所有弦组成的 G 的子图是顶点数小于 k 的非奇圈的外可平面的 Hamilton geodetic 图,这又与假设矛盾. 因此 G 是奇圈. □

在证明下面定理 5之前,先引入一个引理.

设 G 是具有2顶点割$\{u,v\}$的一个图且令 $e=uv$ 是 G 的一条边,则存在两个子图 G_1 和 G_2 使 G_1 和 G_2 恰有一条公共边 $e=uv$ 且 $G_1\cup G_2=G$.

引理 若 G 是具有2顶点割$\{u,v\}$的一个 geodetic 图,则如上描述的 G_1 和 G_2 都是 geodetic 图.

证明 倘若 G_1 和 G_2 之一不是 geodetic 图,不妨设 G_1 不是 geodetic 图,则存在两个不同顶点 x、y,使 G_1 有两条最短(x,y)路. 显然这两条(x,y)路也是 G 的最短(x,y)路,于是 G 不是 geodetic 图,矛盾. □

设 G 是 Hamilton gedetic 图,如果 G 的两条弦 e_1 和 e_2 没有公共端点且互相交叉,则称 e_1 和 e_2 是交叉弦. 如果 G 的不同交叉弦的对数为 k,则称 G 是 Hamilton geodetic (k)图.

定理5 若 G 是 Hamilton geodetic (1)图,则 $G=K_4$.

证明 设 n 是 G 的顶点数,对 n 用数学归纳法. 显然定理对 $n=4,5$成立. 假设定理对 $n<k$ $(k>5)$成立. 倘若 G 是具有 $n=k$ 的 Hamilton geodetic (1)图,令 e_1 和 e_2 是 G 的交叉弦. 显然 $G\neq C+e_1+$

e_2，否则容易证明 G 中存在两个不同的顶点 x 和 y，使 G 有两条最短 (x,y) 路，矛盾. 设 $e=uv$ 是 G 的一条弦且 $e\notin\{e_1,e_2\}$，则 $\{u,v\}$ 是 G 的2顶点割. 于是 G 含有如上述引理的描述的两个子图 G_1 和 G_2. 不妨设 G_1 含有 e_1 和 e_2. 若 $G_1=K_4$ 且 $G_2=C_p$（长为 p 的圈），则容易证明 G 不是 geodetic 图，矛盾. 于是 $G_1\neq K_4$ 或 $G_2\neq C_p$. 若 $G_1\neq K_4$，则由归纳假设 G_1 不是 geodetic 图. 由引理推出 G 不是 geodetic 图，矛盾. 若 $G_2\neq C_p$，则由定理4知 G_2 不是 geodetic 图，从而 G 不是 geodetic 图，又矛盾. 因此定理对 $n=k$ 成立. 由归纳原理，定理成立. □

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: Macmillom Press, 1976.

[2] MAO Jing-zhong. The Structure of Geodetic Blocks with Diameter Two[J]. J of Graph Theory, 1992, 16: 247-255.

Some Theorems of Geodetic Graphs

SHI Yong-bing

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: If there is only one shortest path connecting each pair of different vertices of G, then G is called a geodetic graph. We construct some classes of geodetic graphs and discuss the geodetic graphs containing Hamilton cycles.

Key words: path; geodetic graph; Hamilton cycle