Einstein 场方程的新解及其生成解

朱世昌　　沈文达　　朱莳通
（上海师范大学）　（上海科技大学）　（上海光机所）

摘　要

本文求得了在理想流体状态方程$p=\alpha\rho$情况下的Einstein 场方程的一簇新的静态精确内解，并利用生成技术找到了它们的生成解.

一、引　言

Einstein 场方程在各种特定状态方程下的特解已被许多作者讨论过，Kramer [1] 等人已总结了 1980 年以前已知的静态球对称特解。然而在理想流体的状态方程 $p=\alpha\rho$ 情况下的普适方程是一组十分复杂的非线性方程，求解十分困难。只有在某些假定下被求解过。例如，1981 年 Gonzalez-Diaz[2] 求得了 $p=-\rho$ 状态方程下的特解，1982 年 Ibanez & Sanz [3] 在$p'=-\rho$ 假定下求得了一组特解。

本文在某些假定下，使非线性场方程化为线性场方程，从而求得了一簇新的理想流体的精确解。此外，从这些新解出发，利用 Heintzmann 生成技术，得到了它们的生成解。

在标准球对称度规下，线元为

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

Einstein 场方程和状态方程为

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=-8\pi p \tag{2}$$

$$\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)=-8\pi p \tag{3}$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{1}{2}\nu''-\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right]=-8\pi p \tag{4}$$

$$p=\alpha\rho \qquad\qquad \alpha\in[-1,1] \tag{5}$$

(5) 式中α在 -1 与 $+1$ 之间，因而满足主能量条件。由此可见，共有四个方程和五个变量，即(2)～(5)式，其中包含 e^{λ}，e^{ν}，p，α，ρ 共五个变量，任意选定其中某一变量，则其它变量可从上述方程组解得。

我们已知(2)式的一般形式解为

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2\mu(r)}{r} \tag{6a}$$

本文于1984年3月7日收到

$$\mu(r)=4\pi\int\rho r^2 dr \tag{6b}$$

将(3)式求导，然后利用(2)、(3)和(4)式，可得

$$v'=-\frac{2\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{\rho'}{\rho} \tag{7}$$

$$e^{v}=c\rho^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} \tag{8}$$

然而(8)式度规中两变量α和ρ之间存在依赖关系，其中只有一个是独立的，故(8)式仅仅是一个形式解。

将(7)式代入(3)式，可得

$$2\mu\rho+(r^2-2\mu r)\frac{2\alpha}{1+\alpha}\rho'=-8\pi\alpha\rho^2 r^2 \tag{9}$$

从(6b)式和(9)式，可得

$$r(2\mu-r)\mu''-(1+\alpha)\mu'^2 r-\frac{1+5\alpha}{\alpha}\mu\mu'+2\mu' r=0 \tag{10}$$

令$2\mu-r=u$。(10)式可化为下列方程

$$ruu''-\frac{1+\alpha}{2}ru'^2-\frac{1+5\alpha}{\alpha 2}uu'-\left(\frac{3}{2}+\alpha+\frac{1}{2\alpha}\right)ru'-\frac{1+5\alpha}{2\alpha}u-\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2\alpha}\right)r=0 \tag{11}$$

显然，上述非线性微分方程的求解十分困难，只有在某些简化假定下，可获得某些精确解，下面分述之。

二、$\alpha=-1$情况下的解及其生成解

在状态方程$p=-\rho$的极端情况下，场方程的解具有非常特殊的性质，它可作为描述Schwarzschild黑洞的无奇性静态内部解。

从(6a)式和(3)式，可得下列度规的一般形式

$$e^{v}=c\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^{-\alpha}exp(1+\alpha)\int\frac{2\mu/r dr}{1-2\mu/r} \tag{12}$$

从(12)式和Darmois式连接条件可见，当$\alpha=-1$时

$$e^{v}=e^{-\lambda}=1-\frac{2\mu}{r} \tag{13}$$

将$\alpha=-1$代入(11)式，可得下列方程

$$ruu''-2uu'-2u=0 \tag{14}$$

上述微分方程有两个解、其一是奇性解

$$e^{v}=e^{-\lambda}=0$$

其二是从(14)式可得

$$ru''-2u'-2=0 \tag{15}$$

上述微分方程的解为

$$u=b_2-r+\frac{b_1}{3}r^3$$

$$\mu = \frac{b_1}{6} r^3 + \frac{b_2}{2}$$

若要求度规在 $r=0$ 处正规，则令 $b_2=0$。另外，从 Darmois 连接条件和(3)式和(5)式，可得度规张量

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - R_s^{-2} r^2 \tag{16}$$

式中 $R_s^{-2} = \frac{8\pi}{3}\rho$，上述解即 Gonzalez-diaz 解，这是均匀密度的 Schwarzschild 黑洞内部的静态无奇性内解，且满足主能量条件，可认为在物理上是合理的。

从上述无奇性的均匀密度内部解可生成新解，为此采用 Heintzmann 生成技术[4]。从已知的老解(16)式出发可通过求解下列方程获得新的生成解。

$$\hat{p} = 4(1-2xW)\frac{y'}{y} - 2W \tag{17}$$

$$\hat{p} = 4W'x + 6W \tag{18}$$

$$(2xy'+y)W' + (2y'+4xy'')\hat{w} = 2y'' \tag{19}$$

式中 $x=r^2$，$y=e^{\frac{\nu}{2}}$，$e^{-\lambda}=1-2xW$，$W=W_0+kW_H$，其中 W_0 为老解中的量，k 为待定常数，W_H 为

$$W_H = (2xy'+y)^{-2} \exp 4\int (2xy'+y)^{-1} y' dx \tag{20}$$

以上各量中带有"∧"标记的表示生成解的对应量。

将(16)式代入(17)～(20)式，可求得下列新的生成解

$$\hat{e}^{-\lambda} = 1 - R_s^{-2} r^2 - 2kr^2 (1 - R_s^{-2} r^2)(1 - 2R_s^{-2} r^2)^{-1} \tag{21}$$

$$\hat{e}^{\nu} = e^{\nu} \tag{22}$$

$$8\pi\hat{p} = 8\pi\rho + 6k(1-R_s^{-2}r^2)(1-2R_s^{-2}r^2)^{-1} + 4kR_s^{-2}r^2(1-2R_s^{-2}r^2)^{-2} \tag{23}$$

$$8\pi\hat{p} = -8\pi\rho - 2k(1-3R_s^{-2}r^2)(1-2R_s^{-2}r^2)^{-1} \tag{24}$$

从(23)式和(24)式，可得生成解满足下列状态方程

$$8\pi\hat{p} = -8\pi\hat{\rho} + 4k\frac{1-R_s^{-2}r^2}{(1-2R_s^{-2}r^2)^2} \tag{25}$$

由此可见，在 $k \neq 0$ 时，新解的状态方程必不同于老解的状态方程（$p=-\rho$）。生成解不再是均匀密度解，且包含有不同的坐标奇点。

如果此新的生成解(21)～(24)式仍用于描述黑洞内部，则从视界 $r=2M$ 可确定

$$k = -\frac{1}{2} R_s^{-2} \tag{26}$$

於是生成解的黑洞内部度规为

$$\hat{e}^{-\lambda} = (1 - R_s^{-2} r^2)[1 + R_s^{-2} r^2 (1 - 2R_s^{-2} r^2)^{-1}] \tag{27}$$

可以证明，从已知的老解(16)式只能用 Heintzman 生成技术生成一个新解，上述生成技术不可能再次被应用来获得两个以上的新解。

三、μ' = const 的解及其生成解

非线性微分方程(11)式可化为线性方程的另一可能是 $\mu'=c$，$\mu''=0$ 的情况，此时由于

$u''=0$，方程(11)式可化为

$$\left[\frac{1+\alpha}{2}ru'+\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2\alpha}\right)r+\frac{1+5\alpha}{2\alpha}u\right](u'+1)=0 \tag{28}$$

上述线性微分方程有两种解。其一是

$$u'+1=0, \qquad u=c_1-r$$

$$e^{\nu}=e^{-\lambda}=1-\frac{2M}{r} \tag{29}$$

显然，上述解为具有中心奇点的内部解，亦即通常意义下的黑洞解。

其二是求解下列方程

$$ru'+\frac{1+5\alpha}{\alpha(1+\alpha)}u+\frac{1+\alpha}{\alpha}r=0 \tag{30}$$

上述微分方程具有下列一般解

$$u=\begin{cases} c_2 r^{-\frac{1+5\alpha}{\alpha(1+\alpha)}}-\dfrac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2+6\alpha+1}r & \alpha\neq-3+2\sqrt{2} \quad (31a) \\ r^{-\frac{1+5\alpha}{\alpha(1+\alpha)}}\left(c_3-\dfrac{1+\alpha}{\alpha}\ln r\right) & \alpha=-3+2\sqrt{2} \quad (31b) \end{cases}$$

下面我们来判别上式的各种解的可能性：首先分析(31a)式的解、从 $\mu'=c$ 可见

$$\mu=cr+D \tag{32}$$

从 Darmois 连接条件，可确定

$$e^{-\lambda}=1-2\left(\frac{M}{r_b}-\frac{D}{r_b}\right)+\frac{2D}{r} \tag{33}$$

另外，从(31a)式可得

$$e^{-\lambda}=\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2+6\alpha+1}-c_2 r^{\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{\alpha(1+\alpha)}} \tag{34}$$

於是从(33)式和(34)式可分析解可能存在于下列两种情况

(1) $D\neq 0$，此时 $c_2=2D$，於是从(33)式和(34)式可得

$$\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2+6\alpha+1}=1-\frac{2M}{r_b}+\frac{2D}{r_b} \tag{35a}$$

$$\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{\alpha(1+\alpha)}=1 \tag{35b}$$

(35b)式的解为

$$\alpha=-\frac{1}{5} \tag{36}$$

将(36)式代入(35a)式，可得

$$2D=-5r_b+2M \tag{37}$$

於是从(33)式、(37)式以及(12)式，可得度规为

$$e^{-\lambda}=-4-\frac{2M}{r}+\frac{5r_b}{r} \tag{38a}$$

$$e^{\nu}=\frac{r_b}{r}-\frac{2M}{r} \tag{38b}$$

(2) $D=0$，从(33)式和(34)式可见，必须有 $c_2=0$，和

$$\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2+6\alpha+1}=1-\frac{2M}{r_b} \tag{39}$$

求解上式，可得

$$\alpha=\left(\frac{r_b}{M}-3\right)\pm\left[\left(\frac{r_b}{M}-3\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

α 要成为实数，必须满足

(a) $\frac{r_b}{M}-3\geqslant 1,\qquad r_b\geqslant 4M,$

$$\alpha=\left(\frac{r_b}{M}-3\right)-\left[\left(\frac{r_b}{M}-3\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}}\qquad \alpha\in[0,1] \tag{41}$$

(b) $\frac{r_b}{M}-3\leqslant -1,\qquad r_b\leqslant 2M,$

$$\alpha=\left(\frac{r_b}{M}-3\right)+\left[\left(\frac{r_b}{M}-3\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}},\qquad \alpha\in[-1,0] \tag{42}$$

对于 $r_b=2M$ 之黑洞，从(39)式可见，必对应于 $\alpha=-1$，这是Schwarzschild黑洞对应于 $p=-\rho$ 状态方程的又一次证明。由于 $r_b<2M$ 情况不具有明显的物理意义，故 $\alpha\in[-1,0]$ 的(42)式的情况不必讨论。

现在讨论 $r_b\geqslant 4M$，即 $\alpha\in[0,1]$ 的情况，从(33)式和(34)式，可得度规为

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2M}{r_b} \tag{43a}$$

$$e^{\nu}=\left(r_b^{-\frac{4\alpha}{1+\alpha}}-2Mr_b^{-\frac{1+5\alpha}{1+\alpha}}\right)r^{\frac{4\alpha}{1+\alpha}} \tag{43b}$$

显然，上述解在 $\alpha=-\frac{1}{5}$ 时，可化为(38a)和(38b)式的解，上述解对除了 $\alpha=-3+2\sqrt{2}$ 以外的 $1\geqslant\alpha\geqslant 0$ 的任意 α 值均存在解。对于 $\alpha=-3+2\sqrt{2}$ 情况，从(31b)式可得

$$e^{-\lambda}=-2(1+\sqrt{2})\ln r-c_3$$

然而从(6a)式不难看出，上式将和(32)式矛盾，故 $\alpha=-3+2\sqrt{2}$ 的解是不存在的。

其次，我们来讨论 $\mu'=C$ 的解的生成解。可以将(38a)(38b)式和(43a)(43b)式的两种情况下的解写成下列通式

$$e^{-\lambda}=1-8\pi\rho r^2-\frac{2D}{r} \tag{44a}$$

$$e^{\nu}=\left(r_b^{-\frac{4\alpha}{1+\alpha}}-2Mr_b^{-\frac{1+5\alpha}{1+\alpha}}\right)r^{\frac{4\alpha}{1+\alpha}} \tag{44b}$$

$$\rho=\frac{1}{8\pi r^2}\left(\frac{2M}{r_b}-\frac{2D}{r_b}\right) \tag{44c}$$

从(44)式和(17)～(20)式，可求得 $\mu'=c$ 的解(44)式的生成解为

$$\hat{e}^{-\lambda}=e^{-\lambda}-2k\left(\frac{1+\alpha}{1+3\alpha}\right)^2\frac{r^{\frac{2(\alpha^2+6\alpha+1)}{(1+3\alpha)(1+\alpha)}}}{r_b^{\frac{-4\alpha}{1+\alpha}}-2Mr_b^{\frac{-5\alpha-1}{1+\alpha}}} \tag{45a}$$

$$\hat{e}^{v}=e^{v} \tag{45b}$$

$$8\pi\hat{P}=-\left(\frac{5\alpha+1}{1+\alpha}\right)8\pi p+\frac{4\alpha}{1+\alpha}r^{-2}-\left(\frac{10\alpha+2}{1+\alpha}\right)\frac{D}{r^3} \tag{45c}$$

$$8\pi\hat{P}=-\frac{4}{r}\left(\frac{2M}{r_b}-\frac{2D}{r_b}\right)+\frac{3}{r^2}\left(\frac{2M}{r_b}-\frac{2D}{r_b}\right) \tag{45d}$$

从上式可见，除了$\alpha=-1$和$\alpha=-3+2\sqrt{2}$不存在新的生成解外，原则上可得到新的生成解，而且生成解不再是$\mu'=C$的情况，且状态方程$\hat{P}\neq\alpha\hat{\rho}$。

四、讨　　论

非线性场方程可以化为线性方程例子还可以找到，限于篇幅，下面简述一二。

(1) $\mu''=const$的解：

$$\mu''=k_2,\qquad u'=k_2r+k_1,\qquad u=\frac{1}{2}k_2r^2+k_1r+k_0 \tag{46}$$

於是有

$$e^{-\lambda}=1-\frac{k_2r^2+2(k_1+1)r+2k_0}{r} \tag{47a}$$

$$e^{v}=c(8\pi)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}r^{\frac{4\alpha}{1+\alpha}}[k_2r+(k_1+1)]^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} \tag{47b}$$

$$\rho=\frac{k_2}{8\pi r}+\frac{k_1+1}{8\pi r^2}$$

把u,u',u''代入(11)式，此时(11)式对任何r值要成为恒等式，必须有r^0，r^1，r^2，r^3项的系数为零，於是得

$$\left(\frac{2\alpha^2+5\alpha+1}{4\alpha}\right)k_2^2=0 \tag{48}$$

$$\left(\frac{19\alpha+3}{4\alpha}k_1+\frac{4\alpha^2+11\alpha+3}{4\alpha}\right)k_2=0 \tag{49}$$

$$\frac{3\alpha+1}{2\alpha}k_0k_2+\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha}k_1^2+\frac{\alpha^3+4\alpha+1}{\alpha}k_1+\frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha}=0 \tag{50}$$

$$\frac{(5\alpha+1)k_0(k_1+1)}{2\alpha}=0 \tag{51}$$

同时，从Darmois连接条件有

$$2M=\frac{1}{2}k_2r_b^2+(k_1+1)r_b+k_0 \tag{52}$$

$$C(8\pi)^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}} r_b^{\frac{4\alpha}{1+\alpha}} [k_2 r_b + (k_1+1)]^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}} = 1 - \frac{2M}{r_b} \tag{53}$$

在上述(48)～(53)式的六个方程中包含五个量 k_0、k_1、k_2、α、C. 可以证明，对于 $k_2=0$ 情况(48)式和(49)式可以相容，故有解存在，此解即 $\mu'=c$ 的解，已在上节中叙述了。而对于 $k_2 \neq 0$ 时，(48)式和(49)式就不能相容，因而无解存在。

（2）$\mu'''=const$ 的解：由于 $\mu'''=const$ 即是 $\rho=const$ 情况。在均匀密度时从 $\rho'=0$ 和(6)式和(7)式不难得到

$$\mu = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \tag{54}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \tag{55}$$

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{56}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \tag{57}$$

显然、在均匀密度情况下，可以证明，不可能通过 Heintzman 生成技术获得新的生成解，而只能得到不同密度值而具有同样形式的均匀密度解。

（3）生成技术无疑是求得 Einstein 场方程精确解的有效数学工具。本文的结果表明：生成的新解一般具有新的质能分布，且物态方程一般不同于原有老解的物态方程，因而生成解一般对应于不同的原有解的物理状态。生成技术保证了新的生成解必满足 Einstein 场方程。然而生成技术的数学过程所对应的物理机制仍是一个尚待解开的谜。

参 考 文 献

[1] Kramer. D, Stephani. H.,MacCallum, M. A. C. and Herlt,E., Exact Solutions of Einstein's Equations. Verlag der Wissenschaften, Barlin; Cambridge U. P. (1980).

[2] Gonzalez-Diaz, P. E. Lett. Nuov. Cime. 32(1981)161.

[3] J. Ibanez, and J. L. Sanz, J. Math. Phys. 23(1982)1364.

[4] 同[1]。

New Solutions and the Generated Solutions to the Einstein Field Equations

Zhu Shichang *Shen Wenda* *Zhu Shitong*

Abstract

We give a new family of static exact interior solutions to the Einstein field equation for the case of the perfect fluid state equation $P=\alpha\rho$. Then we use the Heintzmann generating technique to derive the generated solutions concerned.

《棉花对枯萎病抗性的快速预测法》通过鉴定

由上海师范大学生物系刘士庄等教师承担的《棉花对枯萎病抗性的快速预测法》研究，在四川省农科院棉花所、上海农科院作物所、上海市宝山县农业技术推广中心的协作下，12月12日在上海市高教局主持的科研成果鉴定会上通过鉴定。

棉花枯萎病是世界棉花两大病害之一，国外称为"毁灭性病害"，国内称为棉花的"癌症"，我国棉区受害面积每年在1000万亩以上。选育棉花抗枯萎病品种，是防治棉花枯萎病的最经济有效的主要措施；而鉴定棉花品种的抗性，是选育新品种的主要环节。目前国内外一般采用的传统方法是建立人工病圃，接种后调查病株数和病级程度，亦有采用苗床病圃在苗期进行鉴定，历时都要三十多天，还要受气候条件、病原菌的代数、接菌量等因素的影响。

上海师大生物教师经过三年多时间的努力，终于研究成功了《棉花对枯萎病抗性的快速预测法》。这一新的方法根据先进的间接血凝技术原理，在棉花种子时期就能判断出棉花品种抗枯萎病能力。经由四川省农科院棉花所等三个棉花育种单位提供的不同抗性的品种，并使用这种方法测定，其结果与常规方法测定的结果基本一致。专家们认为：采用这一方法测定棉花对枯萎病的抗性具有准确、快速（二天）和比较简便的特点，可避免一般温室、田间常规鉴定方法受环境影响的局限，以及有可能导致病原菌繁殖、扩散等方面的缺点。新方法的研究成功，为选育棉花抗枯萎病品种开辟了一条新路子，是我国农业科研上取得的又一项重大科研成果。

（科研科供稿）