第31卷第1期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 31, No. 1
2002年3月　　Journal of Shanghai Teachers University (Natural Sciences)　　Mar. 2002

非奇异相对本原环

郭善良

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 给出了一个非奇异环何时有本原分式环的一个充分必要条件. 从而推广了 JOHNSON 和 SANDOMIERISKI 等人的著名定理.

关键词: 非奇异模; 相对本原环; $\mathscr{F}$-coritical 模

中图分类号: O153.3　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(2002)01-0021-03

在[3]中 JOHNSON 证明了这样一个著名定理: 一个环的极大分式环是一个完全右线性变换环当且仅当这个环含有一个忠实的右非奇异一致右模. 如果将此定理用非交换环上的局部化语方来叙述的话可表述如下: 设 $\mathscr{D}$ 环是 R 上的右稠密拓扑. 则 $\mathscr{D}$ 是一个 R 上的忠实拓扑并且 $R_{\mathscr{D}}$ 是一个具有非零基座的右本原环的充分必要条件是 R 有一个忠实 $\mathscr{D}$-coritical 非奇异右模. 因此, 这就很自然地引出了这样的一个问题: 如果 $\mathscr{F}$ 是环 R 上的一个忠实的右 Gabriel 拓扑, 那么当 R 有一个忠实的 $\mathscr{F}$-coritical 非奇异右模时 $R_{\mathscr{F}}$ 是否是一个具有非零基座的右本原环? 在本文中将给出此问题的正面回答, 同时也推广 JOHNSON[3] 和 SANDOMIERISKI[3] 等人的著名定理.

在本文中所有的环是有单位元的幺正环, 所有的模都是幺正模. 如果 $\mathscr{F}$ 是一个环 R 上的一个右 Gabriel 拓扑, 当一个右 R-模 M_R 满足: M_R 是 $\mathscr{F}$-torsionfree 的并且对 M_R 的任何非零子模 N_R 都有 M_R/N_R 是 $\mathscr{F}$-torsion 的, 则此模被称为 $\mathscr{F}$-coritical 模. 有关非交换环上的局部化的更详细的资料请参看[1]和[5].

引理1　设 P_R 是一个忠实的有限生成的投射模, $S=\mathrm{End}_R(P)$ 和 $Q=\mathrm{Hom}_R(P,R)$, 可以构造一个 Morita Context$(R,S,{}_SP_R,{}_RQ_S,\tau,\mu)$, 令 T 是 P 在 R 中的迹理想. 则存在一个格同构

$$\begin{cases} \text{right ideals of } S \rightleftharpoons (\text{right submodules of } P_R)\ T \\ \qquad\qquad I \xrightarrow{\eta} IP \\ \qquad [A,Q] \xleftarrow[\xi]{} A \end{cases}$$

证明　由于 P_R 是一个忠实的有限生成投射模, 故 P 是一个 S-Mod 上的生成元, 所以 μ 是一个满射. 令 I 和 I' 为两个 S 右理想, 且 $IP=I'P$, 则 $[IP,Q]=[I'P,Q]$, 故有 $I[P,Q]=I'[P,Q]$, 则于 μ 是满态, 所以 $[P,Q]=S$. 从而 $I=I'$, 也就是说 η 是一个单射. 另一方面令 N_R 是 P_R 的一个满足条件: $NT=N$ 的子模, 所以 $N=N(Q,P)=[N,Q]P\in$ (right submodules of P_R) T. 所以 η 是一个满态, 显然 η 保持包含关系. 所以 η 是一个格同构.

引理2　设 $\mathscr{F}$ 是一个环 R 上的一个右 Gabriel 拓扑, 则

(i) 任意 $\mathscr{F}$-内射 $\mathscr{F}$-cocritical 模之间的非零同态都是同构的,

收稿日期: 2001-05-23

作者简介: 郭善良(1961-), 男, 上海师范大学数理信息学院副教授, 博士.

(ii) $\mathscr{F}$-内射 $\mathscr{F}$-cocritical 模上的自同态环是一个除环.

证明 (i)令 N_R 和 M_R 是两个 $\mathscr{F}$-内射 $\mathscr{F}$-cocritical 模. α: $N_R \to M_R$ 是一个非零的同态, 则 $N_R/\ker(\alpha)$ 同构于 M_R 的一个子模. 所以 $N_R/\ker(\alpha)$ 是一个 $\mathscr{F}$-torsionfree 模, 但又 N_R 是一个 $\mathscr{F}$-cocritical 模, 故知: 只可能是 $\ker(\alpha)=0$; 从而有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & N_R & \\
0 \arrow[r] & N_R \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\alpha"] & M_R \arrow[ul, dashed, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

又由于 N_R 是一个 $\mathscr{F}$-内射模, 故 α 可提升至满态 β, 由上面的证明知 β 只能是单态, 故 N_R 和 M_R 为同构.

(ii)是(i)的直接推论.

定理 设 $\mathscr{F}$ 是一个环 R 上的一个右 Gabriel 拓扑. 则 $\mathscr{F}$ 是忠实的并且 R_r 是一个有右非零基座的本原环的充分必要条件是 R 有一个忠实的 $\mathscr{F}$-cocritical 右非奇异模.

证明 令 I_{R_r} 是 R_r 的一个极小右理想. 则极易验证 I_{R_r} 是一个忠实的 $\mathscr{F}$-cocritical 右 $\mathscr{F}$-模, 而 $Z_r(R_{rR_r})=0$ 可得 $Z_r(R_{rR})=0$. 综合可得 $Z_r(I_R)=0$.

反之, 令 M_R 是一个 $\mathscr{F}$-cocritical 右模, 从 $M_R t_r(R)\subseteq t_r(M)=0$ ($M_R Z_r(R)\subseteq Z_r(M)=0$)可得出 $t_r(R)=0$ ($Z_r(R)=0$). 令 I 为 R 的任一个非零右理想. $MI\neq 0$ 意味着 M 中存在一个非零元 m 满足 $mI\neq 0$. 由于 $Z_r(M)=0$, 故 $J=\{r\in R \mid mr=0\}$ 在 I 非本质. 所以存在一个 I 的子理想 I' 使得 $I'\cong mI'$. 根据引理2 (i)我们知: $E_r(M)\cong E_r(I')$. 也就是说 $A=E_r(I')$ 是 R_r 的一个非零忠实 $\mathscr{F}$-cocritical 右理想. 所以 $A^2\neq 0$, 故 $0\neq a\in A$ 使得 $aA\neq 0$. 由于 R 是右非奇异环, 所以 R_r 也是右非奇异环. 由于 M_R 是 $\mathscr{F}$-cocritical 模故 M_R 是一个右一致模. 所以 $A=E_r(I')\cong E_r(M)$ 是一个非奇异的右一致理想. 从而可得出 a 在 A 中的右零化子一定为零. 所以 $aA\cong A$. 由于 aA 是一个 $\mathscr{F}$-内射模, 而 A/aA 是 $\mathscr{F}$-挠模. 所以可得 $aA\subseteq A$. 由于 aA 是 A 的一个分裂项, 而这又与 A 是一个一致模矛盾. 所以必有 $aA=A$. 因此有 $e\in A$ 使得 $ae=a$, 故 $ae^2=ae$, 即 $a(e^2-e)=0$, 但 a 在 A 中的零化子为零. 所以 $e^2=e$. 由于 a 在 A 中的零化子为零, 所以 e 在 A 中的零化子也为零. 同上所证: $A=eA=eR_r$. 所以 A 是一个 R_r 的有限生成的右投射模, 并极易知: $R_r eR_r$ 是 A 在 R_r 中的迹理想, 且

$$R_r eR_r \cong \mathrm{End}_{R_r}(eR_{rR_r}) \cong \mathrm{End}_R(eR_{rR}) \cong \mathrm{End}_R(M_R).$$

所以根据引理2(ii)知: $R_r eR_r$ 是一个除环. 另一方面令 B_R 是 R_r 的任一个非零右理想. 由于 R 在 R_r 中右本质, 故 $B\cap R\neq 0$, 同上面的证明可知: 存在 $0\neq I\subseteq B\cap R$ 使得

$$E_r(I)\cong E_r(M)\cong eR_r = A.$$

所以

$$I\subseteq \mathrm{Hom}_R(A, R_r)A_r = \mathrm{Hom}_{R_r}(A, R_r)A_r = R_r eR_r.$$

即 $R_r eR_r$ 是一个本质右理想, 而 $Z_r(R_r)=0$ 知: $R_r eR_r$ 是一个忠实的左理想. 令 $0\neq I\subseteq eR_r$, 则: $0\neq IR_r eR_r\subseteq eR_r R_r eR_r = eR_r$, 根据引理1及 $R_r eR_r$ 是一个除环知: 必有 $0\neq IR_r eR_r = eR_r$, 也就是说 eR_r 是 R_r 的忠实极小右理想. 所以 R_r 是一个有非零基座的本原环.

参考文献:

[1] GOLAN J S. Localization of Noncommutative Rings[M]. New York: Marcel Dekker. Inc. 1973.
[2] JACOBSON N. Basic Algebra II[M]. Y H Freeman and Company. San Francisco. 1980.
[3] JOHNSON R E. Quotient Rings of Rings with Zero Sigular Ideal[J]. Pacific j Math. 1961. 11: 1385-1389.
[4] SANDOMIERSKI F L. Semisimple Maximal Quotient Rings[J]. Trans Amer Math Soc. 1967. 128: 112-113.
[5] STENSTROM B. Rings of Quotients[M]. New York: Springer-Verlag. Berlin-Heidilberg. 1974.

Non-singular Relative Primitive Rings

GUO Shan-liang
(Mathematical and Science College. Shanghai Teachers University. Shanghai 200234. China)

Abstract: We generalize the famous theroems of Johnson and Sandomieriski and show that a non-singular ring R has a primitive quotient ring if and only if there is a faithful right Gabriel topology F on R and R has a faithful F- cocritical right module.

Key words: non-singular; relative primitive ring; $\mathscr{F}$ -coritical