

串联漏电电容的研究

黄东有, 朱炯明

(上海师范大学数理信息学院, 上海 200234)

摘要: 通过对两个串联的漏电电容器暂态过程的分析计算, 研究此过程中两个电容的电压、电流及能量的变化规律.

关键词: 漏电; 电容; 串联

中图分类号: O441.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2004)02-0024-04

0 引言

电容器是电路系统中的重要器件. 一般大学物理教材都会涉及, 但仅限于研究理想电容器, 即从实际中抽象出的一种不存在任何损耗的理想化元件. 然而, 在实际电路中所使用的电容器, 有时会存在着一定的漏电损耗. 当电容漏电时, 相当于在理想电容两端并联了一个电阻, 这一问题虽然在有些电磁学或电工, 电路教材中略有提及^[1, 2], 但对电容两端的电压及流经它的电流满足怎样的规律讨论得并不深入, 尤其是当两个漏电电容串联在一起时, 电压、电流和能量又将怎样分配的问题并未得到系统的研究. 这是会遇到的现实问题, 但要解决它们却并不是很简单的. 本文通过对两个串联漏电电容充电过程的分析 and 计算来研究这些问题.

1 理想电容的简单回顾

对电容充电时, 其两端的电压 u 的变化率与充电电流 i 之间的关系^[3]为

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (1)$$

电容储存的能量与其电压的平方成正比

$$W = \frac{1}{2} Cu^2. \quad (2)$$

当两个理想电容串联时, 由于不存在漏电, 它们的电量 Q 必定相同, 所以根据电容的定义 $C = Q / U$, 两个电容的电压分配与其电容量成反比.

如果电容是漏电的, 则问题变得比较复杂, 此时相当于在理想电容上并联了一个电阻^[4], 电荷就会经这一电阻流过电容. 于是, 两个串联漏电电容的电量就不再是必然相同的, 因而, 两个电容的电压分配也不

收稿日期: 2003-11-18

基金项目: 上海市教委课程建设项目(K200135).

作者简介: 黄东有(1977-), 男, 上海师范大学数理信息学院课程与教学论硕士研究生; 朱炯明(1948-), 男, 上海师范大学数理信息学院物理系教授.

再与其电容量成反比了.那么两个电容的电压是怎样分配的呢?现分析图1所示的电路.

2 串联的漏电电容与直流电源接通的过程

图1所示的电路由直流电源 ε ,电阻 R_0 ,电容 C_1 及其漏电电阻 R_1 ,电容 C_2 及其漏电电阻 R_2 和电键K构成,当合上电键K后,电源对电容 C_1 和 C_2 充电,同时有漏电电流流经电阻 R_1 和 R_2 .

设电容 C_1 和 C_2 的电压分别为 u_1 和 u_2 ;充电电流分别为 i_1' 和 i_2' ;流经电阻 R_1 和 R_2 的电流分别为 i_1 和 i_2 .

充电电流的大小与电容电压的变化率成正比,即

$$i_1' = C_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_2' = C_2 \frac{du_2}{dt} \quad (3)$$

流经电阻 R_1 和 R_2 的电流为其电压与电阻之比,即

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_2}{R_2}, \quad (4)$$

流经电阻 R_0 的总电流为

$$i_0 = i_1 + i_1' = i_2 + i_2'. \quad (5)$$

将(3),(4)式代入(5)式,得

$$\frac{u_1}{R_1} + C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{u_2}{R_2} + C_2 \frac{du_2}{dt}, \quad (6)$$

对于整个回路,根据环路定理可得

$$\varepsilon - \left(\frac{u_1}{R_1} + C_1 \frac{du_1}{dt} \right) R_0 - u_1 - u_2 = 0. \quad (7)$$

将(7)式两边对时间 t 求导,再与(6)式联立,解得

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{C_1 R_1 R_2 + C_1 R_0 R_1 + C_2 R_0 R_2 + C_2 R_1 R_2}{C_1 C_2 R_0 R_1 R_2} \frac{du_1}{dt} + \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 C_2 R_0 R_1 R_2} \left(u_1 - \frac{\varepsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2} \right) = 0 \quad (8)$$

这是一个标准的二阶常系数齐次微分方程,可写成

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (9)$$

其中 $y = u_1 - \frac{\varepsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2}$, $p = \frac{C_1 R_1 R_2 + C_1 R_0 R_1 + C_2 R_0 R_2 + C_2 R_1 R_2}{C_1 C_2 R_0 R_1 R_2}$, $q = \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 C_2 R_0 R_1 R_2}$.

由于 $p^2 - 4q > 0$, 所以方程的通解为

$$y = A_1 e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} + B_1 e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}}, \quad (10)$$

其中 $\Delta^2 = p^2 - 4q$, 而 A_1 与 B_1 为待定系数. 代入 $y = u_1 - \frac{\varepsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2}$ 可得

$$u_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2} (1 + A e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} + B e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}}) \quad (11)$$

其中 A 与 B 是新的待定系数. 因为在 K 闭合的瞬间, 即 $t = 0$ 时, 电容 C_1 上的电压 $u_1 = 0$, 而且 $i_0 = i_1' = C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_0}$, 所以

$$1 + A + B = 0, \quad (12)$$

以及

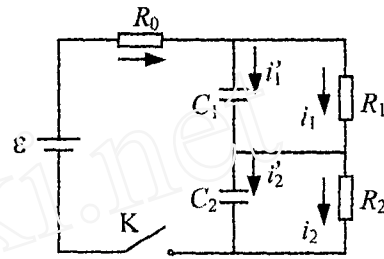


图1 串联漏电电容与直流电源连接

$$\frac{R_1 C_1 \epsilon}{R_0 + R_1 + R_2} \left[-\frac{(p+\Delta)}{2} A - \frac{(p-\Delta)}{2} B \right] = \frac{\epsilon}{R_0}, \quad (13)$$

将(12),(13)两式联立可以解得两个新的待定系数分别为

$$A = \frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta}, \quad B = -\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} + \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta},$$

再将求得的 A、B 值代入(11)式,得 t 时刻电容 C₁ 上的电压

$$u_1 = \frac{\epsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2} \left[1 + \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} - \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right]. \quad (14)$$

由对称关系可得电容 C₂ 上的电压

$$u_2 = \frac{\epsilon R_2}{R_0 + R_1 + R_2} \left[1 + \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} - \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right]. \quad (15)$$

从(14),(15)两式可以看出,漏电电容的电压是按指数规律连续渐变的.初始时刻(t=0时), $u_{10} = 0$ 和 $u_{20} = 0$,达到新的稳态后(t→∞时)的电压为 $u_{1\infty} = U_1 = \frac{\epsilon R_1}{R_0 + R_1 + R_2}$ 和 $u_{2\infty} = U_2 = \frac{\epsilon R_2}{R_0 + R_1 + R_2}$.另外还可以看出,达到稳态后,电容电压的大小与漏电阻成正比.

将(14)式代入(3)式可得电容 C₁ 的充电电流

$$i_1' = \frac{\epsilon R_1 C_1}{R_0 + R_1 + R_2} \left[-\frac{(p+\Delta)}{2} \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} + \frac{(p-\Delta)}{2} \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right]. \quad (16)$$

可见电容 C₁ 的充电电流是逐渐减小的,初始时最大,在 t 趋近 ∞ 时,电流趋近 0.但电阻 R₁ 的漏电电流为

$$i_1 = \frac{\epsilon}{R_0 + R_1 + R_2} \left[1 + \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} - \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_1 R_0 R_1 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right]. \quad (17)$$

与充电电流不同,漏电电流是逐渐增大的,初始时为 0,在 t 趋近 ∞ 时,达到最大值 $\frac{\epsilon}{R_0 + R_1 + R_2}$.同样也可得到 i_2' 与 i_2

$$i_2' = \frac{\epsilon R_2 C_2}{R_0 + R_1 + R_2} \left[-\frac{(p+\Delta)}{2} \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} + \frac{(p-\Delta)}{2} \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right] \quad (18)$$

$$i_2 = \frac{\epsilon}{R_0 + R_1 + R_2} \left[1 + \left(\frac{p}{2\Delta} - \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p+\Delta)t}{2}} - \left(\frac{p}{2\Delta} + \frac{1}{2} - \frac{R_0 + R_1 + R_2}{C_2 R_0 R_2 \Delta} \right) e^{-\frac{(p-\Delta)t}{2}} \right]. \quad (19)$$

电容 C₂ 的充电电流 i_2' 和漏电电流 i_2 随时间变化的规律与电容 C₁ 的 i_1' 和 i_1 是相仿的,而且 i_2 的最大值与 i_1 是相同的.这是因为达到稳态后,电容电压不再变化,充电电流为零,整个电路变成 3 个电阻与电源的串联回路,所以流过每个电阻的电流都是相同的.

3 串联漏电容的能量

在串联漏电容与直流电源接通的过程中,电容储存的能量逐渐增多,直至到达新的稳态,而漏电阻则不断散发焦耳热,但总能量应该是守恒的^[5].

在图1所示电路中,由(7)式可知,电源电动势满足

$$\varepsilon = i_0 R_0 + u_1 + u_2, \quad (20)$$

等式两边乘以 $i_0 dt$ 积分,并将(5)式、(6)式代入,得

$$\int_0^{\infty} \varepsilon i_0 dt = \int_0^{\infty} i_0^2 R_0 dt + \int_0^{\infty} u_1 \left(C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} \right) dt + \int_0^{\infty} u_2 \left(C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2} \right) dt. \quad (21)$$

(21)式左边即为直流电源输出的功,可以写成

$$W_{\text{输出}} = \int_0^{\infty} i_0^2 R_0 dt + \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \int_0^{\infty} \frac{u_1^2}{R_1} dt + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 + \int_0^{\infty} \frac{u_2^2}{R_2} dt. \quad (22)$$

(22)式右边第1,3,5项分别为电源等效内电阻 R_0 , 电容 C_1 和 C_2 的漏电阻 R_1, R_2 产生的焦耳热,而第二、四项则是电容 C_1 和电容 C_2 上储存的能量,所以(22)式可表为

$$W_{\text{输出}} = Q_0 + W_{C_1} + Q_1 + W_{C_2} + Q_2, \quad (23)$$

即电源输入的能量有一部分储存在电容内,而另一部分则转化为3个电阻上的焦耳热,总能量保持守恒.另外,从(22)式的第2,4项还可以看出两个电容储存的能量不仅与其电容量有关,而且还与其漏电阻的平方有关.

4 结论

通过对串联漏电容充电过程的分析 and 计算可以看出:(1)由于漏电流的存在,在到达新的稳态后,串联电容的电压并不与电容量大小成反比,而是与其漏电阻的大小成正比;(2)在充电过程中两个电容的充电电流逐渐减小直至零,而漏电流却由零开始逐渐增大,最后达到同一恒定值;(3)直流电源输入的能量有一部分储存在2个电容内,另一部分转化为3个电阻上的焦耳热,总能量保持守恒.

参考文献:

- [1] 梁灿彬. 电磁学 [M]. 北京:高等教育出版社,1980.
- [2] 郑玉祥,刘桂君. 电路基础 [M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1999.
- [3] 马文蔚. 物理学(中册)[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
- [4] 王忠亮,封小超. 电磁学讨论 [M]. 成都:四川教育出版社,1998.
- [5] 哈蒙往 P[英]. 电磁学中的能量法 [M]. 武汉:华中工学院出版社,1984.

A note on the capacitors with leakage current in series

HUANG Dong-you, ZHU Jiong-ming

(Mathematical and Science College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The voltages, the electric currents and the energies of two capacitors with leakage current connected in series are studied by the means of the qualitative analysis and the quantitative calculations.

Key words: leakage current; capacitors; in series