第23卷 第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 23, No. 4
1994年12月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Dec. , 1994

分次环上的一些结果

俞耀明
(上海师范高等专科学校)

提 要 本文分两部分对分次环进行讨论. 第一部分的主要结果是: R 是分次环, $M \in R$-gr 是 R-gr 的分次上生成子, 当 $|G|^{-1} \in R$ 时, M 也是 Mod-R 的上生成子; 第二部分的主要结果是 Artin 环 R 是 G-分次, 且 G 有限, 则 R 是 serial$\Leftrightarrow$Smash 积 $R\#G^*$ 是 serial.

关键词 分次上生成子; 分次拟投射模; serial 环
中图法分类号 O153.3

R 是 G-分次环, G 是群, 则定义 $R[G] \equiv \left\{\sum\limits_{g\in G}\lambda_g g \mid \lambda_g \in R\right\}$ 是自由 R-模, 并且 $R[G]$ 还是 G-分次环, 其中 $(R[G])_\delta = \sum\limits_{\lambda\mu=\delta} R_\lambda \mu = \bigoplus\limits_{\tau\in G} R_{\delta\tau^{-1}}\tau$, $(\lambda_\delta\tau)\cdot(\lambda_{\delta'}\tau') = \lambda_\delta\lambda_{\delta'}(\delta^{g^{-1}}\tau\delta'\tau')$, $\lambda_\delta \in R_\delta$, $\lambda_{\delta'} \in R_{\delta'}$.

$M = \bigoplus\limits_{\delta\in G} M_\delta$ 是左分次 R-模, 定义 $M[G] = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g g$, 这里 $M_g = M$, $\forall\, g \in G$, 再定义: $(a_\delta\tau)(m_g h) = (a_\delta m_g)(g^{-1}\tau g h)$, $a_\delta \in R_\delta$, $m_g \in M_g$, 则 $M[G]$ 是分次 $R[G]$-模, 其中 $(M[G])_\delta = \sum_{\lambda\mu=\delta} M_\lambda \mu$ (见[1])

1 分次上生成子

任意 $M \in R$-gr 可定义一个 $M[G] \in R[G]$-gr, 这样由映射 $M \to M[G]$ 定义一个函子 H: R-gr $\to R[G]$-gr; 其中 $\forall\, f \in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M, N)$, $H(f): M[G] \to N[G]$: $\sum m_g g \to \sum f(m_g) g$. 显然 $H(f) \in \mathrm{Hom}_{R[G]\text{-gr}}(M[G], N[G])$,

定理 1 函子 H 是正合加法函子

证 显然 H 是加法函子, 在 R-gr 中, 对任一正合列: $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \to 0$

为证: $0 \to M[G] \xrightarrow{H(\alpha)} N[G] \xrightarrow{H(\beta)} K[G] \to 0$ 在 $R[G]$-gr 中正合, 只需证 $\mathrm{Im}H(\alpha) = H(\mathrm{Im}\alpha)$ 和 $\ker H(\beta) = H(\ker\beta)$.

$\forall\, x \in (\mathrm{Im}H(\alpha))_\delta$, $\exists\, y = \sum\limits_{\lambda g=\delta} m_\lambda g \in (M[G])_\delta$ 使得 $H(\alpha)(y) = x$, 故 $x = \sum\limits_{\lambda g=\alpha} \alpha(m_\lambda) g \in H(\mathrm{Im}(\alpha))$, 所以 $\mathrm{Im}H(\alpha) \subseteq H(\mathrm{Im}(\alpha))$. 反之, $\forall\, x \in (H(\mathrm{Im}(\alpha))_\delta$, $x = \sum\limits_{gh=\delta} n_g h$, $n_g \in \mathrm{Im}\alpha$,

本文于1992年6月30日收到.

$\exists\ m_g \in M_g$ 使 $\alpha(m_g) = n_g$，所以有 $y = \sum_{gh=\delta} m_g h \in (M[G])_\delta$ 使 $H(\alpha)(y) = \sum_{gh=\delta} \alpha(m_g)h = x \in \mathrm{Im}H(\alpha)$，故 $H(\mathrm{Im}(\alpha)) \subseteq \mathrm{Im}H(\alpha)$，于是 $\mathrm{Im}H(\alpha) = H(\mathrm{Im}(\alpha))$.

$\forall\ x = \sum_{\lambda h=\delta} n_\lambda h \in \ker H(\beta))_\delta$, $H(\beta)(x) = \sum_{\lambda h=\delta} \beta(m)h = 0$，故 $\beta(n_\lambda) = 0$，所以 $n_\lambda \in \ker\beta$，因此 $x = \sum_{\lambda h=\delta} n_\lambda h \in H(\ker\beta)$. 所以 $\ker H(\beta) = H(\ker\beta)$. 反包含显然成立，所以有：$\ker H(\beta) = H(\ker\beta)$. □

引理 1 函子 H 与直和、直积可换

证 让 $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是一族分次 R-模，$(M = \Pi_A M_\alpha; (q_\alpha)_{\alpha\in A})$ 是该族分次模的分次直积，其中 $\forall\ \alpha \in A$, $q_\alpha: M \to M_\alpha$ 是投射且 $q_\alpha(M_\delta) = (M_\alpha)_\delta$, $\forall\ \delta \in G$，因而 $H(M_\alpha) \in R[G]$-gr，作 $(H(M_\alpha))_{\alpha\in A}$ 的分次直积 $(\Pi_A H(M_\alpha))$, $\forall\ \alpha \in A$，让 $\pi_\alpha: \Pi_A H(M_\alpha) \to H(M_\alpha)$ 是投射且 $\pi_\alpha(\Pi_A H(M_\alpha))_\delta = (H(M_\alpha))_\delta$, $\forall\ \delta \in G$，则 $\exists\ \eta \in \mathrm{Hom}_{R[G]\text{-gr}}(H(M), \Pi_A H(M_\alpha))$. 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
H(M) \arrow[rr, dashed, "\eta"] \arrow[dr, "H(q_\alpha)"'] & & \Pi_A H(M_\alpha) \arrow[dl, "\pi_\alpha"] \\
& H(M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

$\forall\ \gamma \in (\ker\eta)_\delta$，则 $\gamma = \sum_{gh=\delta} m_g h$, $0 = \pi_\alpha\eta(\gamma) = H(q_\alpha)(\gamma) = \sum_{gh=\delta} q_\alpha(m_g)h$，故 $q_\alpha(m_g) = 0$, $\forall\ g \in G, \alpha \in A$，于是 $\bigcap_{\alpha\in A} \ker q_\alpha \in m_g$, $\forall\ g \in G$，因为 $(M = \Pi_A M_\alpha(q_\alpha))$ 是分次直积，则存在唯一的分次同构 ψ 使 $q_\alpha\psi = q_\alpha$，并且 $\ker\psi = \bigcap_{\alpha\in A} \ker q_\alpha$. 因 $\ker\psi = 0$，故 $m_g = 0$, $\forall\ g \in G$，于是 $\gamma = 0$，即 η 是单射.

$\forall\ (r_\alpha)_{\alpha\in A} \in (\Pi_A H(M_\alpha))_\delta, \delta \in G$，则 $\pi_\alpha((r_\alpha)_{\alpha\in A}) = \sum_{gh=\delta} m_g^\alpha h \in H(M_\alpha)_\delta$, $m_g^\alpha \in (M_\alpha)_g$, $\forall\ \alpha$. 因 q_α 是投射，故存在 $n_g \in (\Pi_A M_\alpha)_g$ 使 $q_\alpha(n_g) = m_g^\alpha$, $\forall\ \alpha$. 显然 $\sum_{gh=\delta} n_g h \in (H(M))_\delta$ 而 $\pi_\alpha\eta(\sum_{gh=\delta} n_g h) = H(q_\alpha)(\sum_{gh=\delta} n_g h) = \sum_{gh=\delta} q_\alpha(n_g)h = \sum_{gh=\delta} m_g^\alpha h$, $\forall\ \alpha$，因 π_α 是投射，故 $\eta(\sum_{gh=\delta} n_g h) = (\sum_{gh=\delta} m_g^\alpha h)_{\alpha\in A} = (r_\alpha)_{\alpha\in A}$. 故 η 是满射，所以 η 是同构，即 $H(\Pi_A M_\alpha) \cong \Pi_A H(M_\alpha)$.

同理可证 $$H(\oplus_A M_\alpha) \cong \oplus_A H(M_\alpha)$$ □

定义 1 $C \in R$-gr 叫做分次上生成子，如果 $\forall\ M \in R$-gr 有：$0 \to M \xrightarrow{f} \Pi_A C_\alpha, C_\alpha = C$ 且 $f(M_\delta) \subseteq (\Pi_A C_\alpha)_\delta$, $\forall\ \delta \in G$.

定理 2 $M \in R$-gr 是分次上生成子，若 $|G|^{-1} \in R$，则 M 是 R-Mod 的上生成子.

证 $\forall\ N \in R[G]$-gr，显然 $N \in R$-gr，则 $N[G] \in R[G]$-gr.

定义 ψ $N[G] \to N$; $n_\delta g \to \delta g\delta^{-1}$, $n_\delta \in N_\delta, \delta, g \in G$. 显然 $\psi((N[G])_\tau \subseteq N\tau$, $\tau \in G$, $\forall\ \delta_\lambda \in R_\lambda, \lambda \in G$，则 $\psi((a_\lambda\tau)(n_\delta g)) = \psi(a_\lambda n_\delta \delta^{-1}\tau\delta g) = \lambda\delta(\delta^{-1}\tau\delta g)\delta^{-1}\lambda^{-1} \cdot (a_\lambda n_\delta) = (\lambda\tau\delta g\delta^{-1}\lambda^{-1})$

$\cdot(a_\lambda n_\delta)$，而 $(a_\lambda\tau)\cdot\psi(n_\delta g)=(a_\lambda\tau)\cdot(\delta g\delta^{-1}\cdot n_\delta)=(a_\lambda\tau\delta g\delta^{-1})\cdot n_\delta=(\lambda\tau\delta g\delta^{-1}\lambda^{-1})\cdot(a_\lambda n_\delta)$. 故 $\psi((a_\lambda\tau)(n_\delta g))=(a_\lambda\tau)\cdot\psi(n_\delta g)$. 所以 ψ 是 $R[G]$-同态.

定义 $\varphi\quad N\to N[G], n_\delta\to n_\delta 1, 1\in G$. 显然 $\varphi(N_\tau)\subseteq(N[G])_\tau, \tau\in G$，并且是 R-同态. ψ 作为 R-同态，显然有 $\psi\varphi=1_N$，这里 $1_N\in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(N,N)$.

由[1,引理4.1]，$\tilde{\varphi}(x)\equiv|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}\varphi(g\cdot x)\in \mathrm{Hom}_{R[G]\text{-gr}}(N,N[G])$，而 $\forall x\in N$，$\psi\tilde{\varphi}(x)\equiv|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot\psi(\varphi(g\cdot x))=|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}\cdot(g\cdot x)=1\cdot x=x$，故 $\psi\tilde{\varphi}=\tilde{1}_N$，这里 $\tilde{1}_N\in \mathrm{Hom}_{R[G]\text{-gr}}\cdot(N,N)$. 故 $\tilde{\varphi}$ 是单射.

$\forall W\in R$-Mod，显然可看作 $W\in(R[G])_1$-Mod，则 $\exists P\in R[G]$-gr 使 $P_1=W$，因 $P\in R$-gr，故有：

$$0\to P\to\Pi_A M_a, M_a=M, f(P_\delta)\subseteq(\Pi_A M_a)_\delta, \forall\delta\in G$$

由引理1得 $$0\to p[G]\xrightarrow{H(f)}\Pi_A M_a[G]$$

因为 $$0\to P\to P[G]$$

所以 $$0\to P\to\Pi_A M_a[G],$$

于是有　$0\to P_1\to\Pi_A(M_a[G])_1$，即 $0\to W\to\Pi_A M_a$. 因此 M 是 R-Mod 的上生成子.

□

2　Serial 环

定义 2　模叫做 uniserial，若它的子模关于包含关系是线性有序的. 环 S 叫做左 serial，若 S 是 uniserial 模的直和. S 叫做 serial，若 S 既是左又是右 serial.

定义 3　$L\in R$-gr 叫做分次拟投射模，如果对于每个同态 $\tau: L\to M, \tau(L_g)\subseteq M_g (g\in G)$ 存在 R-同态 $\bar{\tau}: L\to L, \bar{\tau}(L_g)\subseteq L_g (g\in G)$ 使图交换.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\tau"] \arrow[dl, dashed, "\bar{\tau}"'] & \\ L \arrow[r] & M \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

下面的性质是[2,定理5.3]：

性质　S 是左 Artin 环，则 S 是 serial $\Leftrightarrow$ 每个不可分的 S-模是拟投射模.

引理 2　R 是左分次 Artin 环，G 有限，若 R 的每个分次不可分 R-模是分次拟投射模，则 Smash 积 $R\# G^*$ 是 serial 环，反之也成立.

证　显然 $R\# G^*$ 是 Artin.

任何不可分的 $R\# G^*$-模 M 是分次 R-模，并且显然 M 是分次不可分的. 故 M 是分次拟投射模，显然作为 $R\# G^*$-模 M 也是拟投射模. 故 Smash 积 $R\# G^*$ 是 serial 环. 反之同理.

□

定理 3　$M\in R$-gr，若 M 是分次拟投射模，则 M 是拟投射模.

证　因为 $M[G]\cong\bigoplus_{\delta\in G}M(\delta)$（作为分次 R-模），这里 $M(\delta)$ 是 M 的 δ-同伟映象，即 $M(\delta)_\lambda=M_{\lambda\delta}, \lambda\in G$. 故 $M[G]$ 是分次拟投射 R-模. $\forall N\in R[G]$-gr，$\varphi, f\in \mathrm{Hom}_{R[G]\text{-gr}}(M[G],N)$，有下图：

其中 $\pi: M[G]\to M, \pi(\sum_{g\in G}m_g g)=m, m_g\in M, i: M\to M[G], i(m)=m\cdot 1, 1\in G$，显然 $\pi\in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M[G],M), i\in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M,M[G])$. 则 $fi\pi\in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M[G],N)$. 故 $\exists\psi\in$

$$
\begin{tikzcd}
M[G] \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"] & O \\
 & M[G] \arrow[d, "f"] & \\
M[G] \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & O
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M[G],M[G])$ 使 $\varphi\psi = fi\pi$ 由[1,引理4.1]存在 $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M[G],M[G])$，$\tilde{\psi}(x) = \sum_{\delta\in G}\delta^{-1}\psi(\delta x)$，$\forall x = \sum_{gh=\tau} m_g h \in (m[G])_\delta$，则

$$\varphi(\tilde{\psi}(x)) = \sum_{\delta\in G}\delta^{-1}(\psi(\delta(x)) = \sum_{\delta\in G}\delta^{-1}fi\pi(\delta x) = \sum_{\delta\in G}\delta^{-1}fi\pi(\sum_{gh=\tau}m_g g^{-1}\delta g h) = \sum_{\delta\in G}\delta^{-1}fi(m_{\delta\tau}) = \sum_{\delta\in G}f(\delta^{-1}m_{\delta^{i}}\cdot 1) = f(\sum_{\delta\in G}m_{\delta\tau}\tau^{-1}\delta^{-1}\tau) = f(x),$$

故 $\varphi\tilde{\psi} = f$，所以 $M[G]$ 是分次拟投射 $R[G]$- 模. 因为 $R[G]$ 是强分次，函子 $\underset{R[G]_1}{\otimes} R[G]$ 是右正合的和函子 $(\cdot)_1: R[G]\text{-gr} \to (R[G])_1\text{-Mod}, M \to M_1$. 是正合的. 故易证 $(M[G])_1$ 是拟投射 $(R[G])_1$- 模，故 M 是拟投射 R- 模. □

定理 4 Artin 环 R 是 G- 分次，G 有限，则 R 是 serial 环 $\Leftrightarrow$ Smash 积 $R\#G^*$ 是 serial 环.

证 $\rightarrow$：$\forall N \in R$-gr 是分次不可分的. 由[3,定理25.42]，$N = \bigoplus_i N_i$，其中每个 N_i 都是循环的只有唯一一个合成列的 R- 模. 而每个在 Artin 环上的循环模是 Artin 模，故 $\forall i, N_i = \bigoplus_j W_{i,j}$，其中每个 $W_{i,j}$ 均是不可分的. 因此每个 $W_{i,j}$ 是拟投射模，所以 $N = \bigoplus_{i,j} W_{i,j}$ 也是拟投射 R- 模. 当然 N 是分次拟投射模，由引理2得 $R\#G^*$ 是 serial.

"$\leftarrow$" N 是 R-Mod 中不可分的 R- 模，显然 N 看作 $(R[G])$- 模，显然 $M \equiv R[G]N \in R[G]\text{-gr}$，自然 $M \in R\text{-gr}$，故 M 是 $R\#G^*$- 模，因为 $R\#G^*$ 是 Artin 和 serial，故类似于上述证明可得 $M = \bigoplus W_i$，其中 W_i 是不可分的 $R\#G^*$- 模，故 W_i 是拟投射 $R\#G^*$- 模，于是 M 是拟投射 $R\#G^*$- 模，因此 M 是分次拟投射 R- 模. 由定理3知，M 是拟投射 R- 模，即 M 是拟投射 $(R[G])_1$- 模，而 $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$，$M_g$ 均是 $(R[G])_1$- 模，故 M_g 均是拟投射 $(R[G])_1$- 模，特别 $N = M_1$ 是拟投射 $(R[G])_1$- 模，即 N 是拟以投射 R- 模，故 R 是 serial. □

推论 1 Artin 环 R 是 G- 分次，G 有限，

(1)若 R 是 serial 环，则 R_1 也是 serial 环，

(2)若 R_1 是 serial 环并且分次是强的，则 R 也是 Serial 环.

证 (1)[3,命题25.37]得 $R_1 \cong p_1(R\#G^*)p_1$ 是 serial 这里 p_1 是 Smash 积 $R\#G^*$ 的正交基的一个基 $(1 \in G)$，见[5].

(2)因为分次是强的，故 $R\#G^*$ 和 R_1 是 Morita 等价，又因为 Morita 等价保持模的不可分性和拟投射性. 故 $R\#G^*$ 是 serial，由定理4知 R 是 serial. □

推论 2 S 是 Artin 环，则 S 是 serial 当且仅当斜群环 $S*G$ 是 serial. (这里 G 是有限群而 S 有单位元).

证 当环 S 有单位元时，斜群环 $S*G$ 是强分次环，其中 $(S*G)_g = S_g$，而 $(S*G)_1 = S_1 = S$.

由推论1和定理4. □

由推论1和定理4. □

参 考 文 献

[1] C. Nastasecu, Group Rings of Graded Rings, Applications, *J. Pure Appl. Alg.*, 1984,33:313—335

[2] K. R. Fuller, On indecomposable injective over Artinian Rings, *Pacific J. Math.*, 1969,29(1):115—135

[3] C. Faith, Algebra II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1976

[4] C. Nastasescu and F. V. Oystaeyen, Graded Ring Theory, Math Library 28, North-Holland, Amsterdam, 1982

[5] M. Cohen and S. Montgomery, Group Graded Rings, Smash Products and Group Actions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984,282(1):237—258

Some Results on Graded Rings

Yu Yaoming

(Shanghai Teachers' College)

Abstract

Some results on graded rings are presented: 1) if $|G|^{-1} \in R$ and $M \in R$-gr is a graded cogenerator in R-gr, then M is a cogenerator in Mod-R; 2) Let R be an Artinian ring, G a finite group. Then R is a serial ring iff the Smash $R \# G^*$ is a serial ring.

Keywords graded cogenerator; serial ring; graded quasi-projective module