求解超静定结构影响线的一种方法

张 强[1],屠正国[2],袁峰雄
(1. 上海师范大学 建筑工程学院,上海 201418;2. 上海师范大学 基建规划处,上海 201418)

摘 要:利用影响线与挠度图的比拟关系作超静定力的影响线,通过对弯矩函数积分得到挠度函数,并代入相应的边界条件,得到一个具有普遍适用性的影响线函数公式.

关键词:超静定结构;影响线;挠度图
中图分类号:TU311.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2006)03-0025-05

0 引 言

影响线能够反映移动荷载的作用效果,是用来分析最不利荷载分布的基本工具.通常作影响线的方法只有两种,用力法(或称位移法、力矩分配法等),即直接求出影响系数的方法;和利用影响线与挠度图的比拟关系求解的方法,也分别称为静力法和机动法.与静力法相比,机动法可以方便地绘出影响线的形状,计算上也相对简单,但对于作超静定力的影响线仍旧显得过于繁琐复杂.文献[1]给出了一个由图乘法得到的公式:

$$y(x) = \frac{x(l-x)}{6EIl}[M_A(2l-x) + M_B(l+x)]. \tag{1}$$

此公式可通过每个杆件单元两端的弯矩以及柔度系数求得影响线函数,但只适用于杆件单元解除约束后,杆件两端没有位移的情况.

本文在机动法的基础上,利用影响线与挠度曲线的比拟关系,通过对弯矩函数积分,并代入边界条件,求得挠度曲线的表达式,给出只含有4个变量的影响线表达式.

1 公式推导

定义弯矩下部受拉为正,上部受拉为负,剪力为使脱离体发生顺时针旋转的方向为正.支座反力向上为正,向下为负.其余变形及荷载正负号以图1所示的坐标轴为准.

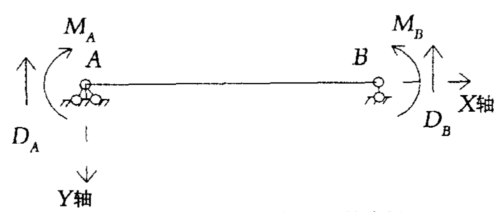


图1 超静定结构拆分后简支梁

用机动法求解超静定力的影响线时,首先撤去与所求约束力 $Z1$ 相应的约束,代入 $Z1$ 得到基本结构.求出在 $Z1=1$ 单独作用下,基本结构的弯矩图 $\bar{M}$.将 $\bar{M}$ 图进行自图乘得到在 $Z1=1$ 作用下沿 $Z1$ 方向的位移 δ_{11}.并可通过虚功原理求出每个节点处的竖向位移 Δ_{i1}.

收稿日期:2005-09-01
基金项目:上海高校选拔培养优秀青年教师后备人选科研专项基金(RE410).
作者简介:张强(1975-),男,上海师范大学建筑工程学院讲师.

为了求得单位力 $Z1=1$ 作用下,在动荷载 $P=1$ 作用点处的广义位移 δ_{p1},把超静定结构拆分为若干个两端带有弯矩和支座位移的简支梁(如图 1 所示). 然后对取出的每个简支梁单元进行单独分析,梁两端作用弯矩 M_A 和 M_B,因为梁上没有其他荷载作用,因此弯矩图为一条直线. 通过已知的 M_A 和 M_B,以 A 点为原点,$\vec{AB}$ 的正方向作为 x 轴的正方向建立坐标系,就可求出弯矩函数 $M(x)$.

设 A 点的坐标为 $(0, M_A)$,B 点为 (l, M_B),其中 l 为简支梁梁长. 因为弯矩图为直线,所以根据两点坐标得弯矩函数为:

$$M(x)=\frac{M_B-M_A}{l}x+M_A. \tag{2}$$

令 $\frac{M_B-M_A}{l}=k$,则将(2)式简化为:

$$M(x)=kx+M_A. \tag{3}$$

对弯矩函数进行两次积分求得挠度函数 $\delta(x)$ [2],

$$\delta(x)=\frac{-\frac{k}{6}x^3-\frac{M_A}{2}x^2+Ax+B}{EI}. \tag{4}$$

再将先前求得的节点位移 Δ_{i1} 作为边界条件代入,可以求出(4)式中含有的待定系数 A 和 B. 由于原结构为超静定结构,因此拆去一个约束之后得到基本结构. 取简支梁单元后对应的边界条件就只有 3 种:

(1)两端都没有初始位移

$$\begin{cases}x=0 & \Delta_A=0\\ x=l & \Delta_B=0\end{cases}.$$

(2)左端有初始位移

$$\begin{cases}x=0 & \Delta_A=\Delta_{A1}\\ x=l & \Delta_B=0\end{cases}.$$

(3)右端有初始位移

$$\begin{cases}x=0 & \Delta_A=0\\ x=l & \Delta_B=\Delta_{B1}\end{cases}.$$

将上述边界条件代入式(4)可得到 3 组方程,得:

$$\begin{cases}A=\frac{k}{6}l^2+\frac{M_A}{2}l\\ B=0\end{cases}. \tag{5}$$

$$\begin{cases}A=\frac{k}{6}l^2+\frac{M_A}{2}l-\frac{EI\Delta_{A1}}{l}\\ B=EI\Delta_{A1}\end{cases}. \tag{6}$$

$$\begin{cases}A=\frac{k}{6}l^2+\frac{M_A}{2}l+\frac{EI\Delta_{B1}}{l}\\ B=0\end{cases}. \tag{7}$$

将待定系数代入挠度函数,可得到在 $Z1=1$ 作用下动荷载 P 作用点处的广义位移 δ_{p1}. 因为动荷载 P 的作用点位置能在 x 方向上移动,因此 δ_{p1} 也是一个关于 x 的函数. 由位移互等定理,$\delta_{p1}=\delta_{1p}$.

把求得的系数代入式(4)得:

$$\delta_{1p}=\frac{-\frac{k}{6}x^3-\frac{M_A}{2}x^2+\frac{k}{6}l^2x+\frac{M_A}{2}lx}{EI}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A=0\\ \Delta_B=0\end{cases}. \tag{8}$$

$$\delta_{1p} = \frac{-\dfrac{k}{6}x^3 - \dfrac{M_A}{2}x^2 + \dfrac{k}{6}l^2x + \dfrac{M_A}{2}lx - \dfrac{EI\Delta_{A1}}{l}x + EI\Delta_{A1}}{EI}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A = \Delta_{A1} \\ \Delta_B = 0\end{cases}. \tag{9}$$

$$\delta_{1p} = \frac{-\dfrac{k}{6}x^3 - \dfrac{M_A}{2}x^2 + \dfrac{k}{6}l^2x + \dfrac{M_A}{2}lx + \dfrac{EI\Delta_{B1}}{l}x}{EI}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A = 0 \\ \Delta_B = \Delta_{B1}\end{cases}. \tag{10}$$

然后将求得的 δ_{1p} 除以 δ_{11} 就能得到原来超静定结构的影响线. 将(8)～(10)式除以 δ_{11} 得影响线函数 $y(x)$：

$$y(x) = \frac{-\dfrac{k}{6}x^3 - \dfrac{M_A}{2}x^2 + \dfrac{k}{6}l^2x + \dfrac{M_A}{2}lx}{EI\delta_{11}}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A = 0 \\ \Delta_B = 0\end{cases}. \tag{11}$$

$$y(x) = \frac{-\dfrac{k}{6}x^3 - \dfrac{M_A}{2}x^2 + \dfrac{k}{6}l^2x + \dfrac{M_A}{2}lx - \dfrac{EI\Delta_{A1}}{l}x + EI\Delta_{A1}}{EI\delta_{11}}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A = \Delta_{A1} \\ \Delta_B = 0\end{cases}. \tag{12}$$

$$y(x) = \frac{-\dfrac{k}{6}x^3 - \dfrac{M_A}{2}x^2 + \dfrac{k}{6}l^2x + \dfrac{M_A}{2}lx + \dfrac{EI\Delta_{B1}}{l}x}{EI\delta_{11}}, \quad 当\begin{cases}\Delta_A = 0 \\ \Delta_B = \Delta_{B1}\end{cases}. \tag{13}$$

(11)～(13)式即为超静定力在局部坐标系下的影响线函数.

在求解刚架问题时不适合使用整体坐标系，但对于连续梁的情况，若要以整体坐标系求解，则需要修正式(1)，得到在整体坐标系下连续的弯矩函数，然后再分段积分，代入边界条件即可.

2 举　例

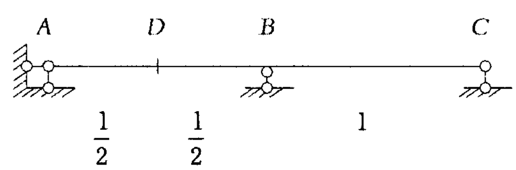


图 2　连续梁

例 1　图 2 所示连续梁 AC，EI 为常数，有活荷载 $P = 1$ 沿 ABC 移动，求 AB 跨中弯矩 M_D，支座反力 F_B 和跨中剪力 Q_D 的影响线.

解　(1)求跨中弯矩 M_D 的影响线

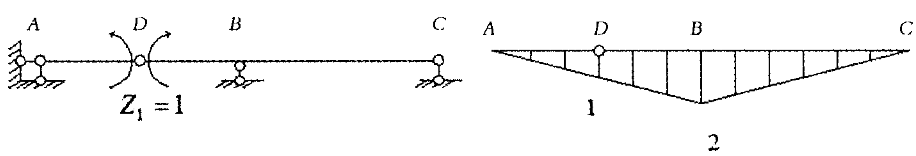


图 3(a)　虚力状态及虚力作用下的弯矩图

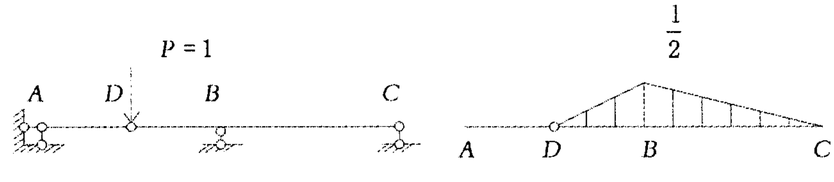


图 3(b)　真实状态及真实荷载作用下的弯矩图

先撤去 D 点的支座，加上所求约束力 $Z1$，画出在 $Z1 = 1$ 作用下基本结构的弯矩图如图 3(a). 通过(a)图的弯矩图自图乘可得：

$$\delta_{11} = \frac{\dfrac{1}{2} \times 2 \times l \times \dfrac{2}{3} \times 2 \times 2}{EI} = \frac{8l}{3EI}$$

此题弯矩图图 3(a)仍旧只有一个转折点，但在 D 点处因为存在一个铰，使弯矩图在 D 点处不连续.

因此要分成AD,DB,BC 3 部分计算,需要附加的节点位移只有Δ_{D1}. 为了求节点位移Δ_{D1},在D点沿y轴正方向加上单位荷载$P=1$,得到弯矩图如图 3(b). Δ_{D1}可通过图 3(a)和图 3(b)的弯矩图图乘得:

$$\Delta_{D1} = -\frac{\frac{1}{2}\times l\times 2\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{5}{3}}{EI} = -\frac{13l^2}{24EI}.$$

AD 段:从 $Z1$ 作用下基本结构的弯矩图图 3(a) 中取点得:$A(0,0)$,$B(\frac{l}{2},1)$,$M(x)=\frac{1-0}{\frac{l}{2}}x+0=\frac{2}{l}x$,所以$k=\frac{2}{l}$,$\begin{cases}\Delta_A=0\\ \Delta_B=-\frac{13l^2}{24EI}\end{cases}$. 故

$$y(x)=\frac{-\frac{\frac{2}{l}}{6}x^3-0+\frac{\frac{2}{l}}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^2x+0+\frac{EI\left(-\frac{13l^2}{24EI}\right)}{\frac{l}{2}}x}{EI\times\frac{8l}{3EI}}=-\frac{x^3+3l^2x}{8l^2},$$

所以$y(x)=-\frac{x(x^2+3l^2)}{8l^2}$.

同理得到 DB 段、BC 段 M_D的影响线. 所以跨中弯矩 M_D的影响线为:

AD 段:$y(x)=-\frac{x(x^2+3l^2)}{8l^2}$,　　$x\in\left[0,\frac{l}{2}\right]$.

DB 段:$y(x)=-\frac{8x^3+12x^2l-34xl^2+13l^3}{64l^2}$,　　$x\in\left(0,\frac{l}{2}\right]$.

BC 段:$y(x)=\frac{x(x-l)(\,]x-2l)}{8l^2}$,　　$x\in\left(0,\frac{l}{2}\right]$.

由静力法解得的以基本结构中 A 点作为原点的整体坐标系中的影响线函数为:

AD 段:$y(x)=-\frac{x(x^2+3l^2)}{8l^2}$,　　$x\in\left[0,\frac{l}{2}\right]$.

DB 段:$y(x)=-\frac{(l-x)(4l^2-lx-x^2)}{8l^2}$,　　$x\in\left(\frac{l}{2},l\right]$.

BC 段:$y(x)=\frac{(x-l)(2l-x)(3l-x)}{8l^2}$,　　$x\in(l,2l]$.

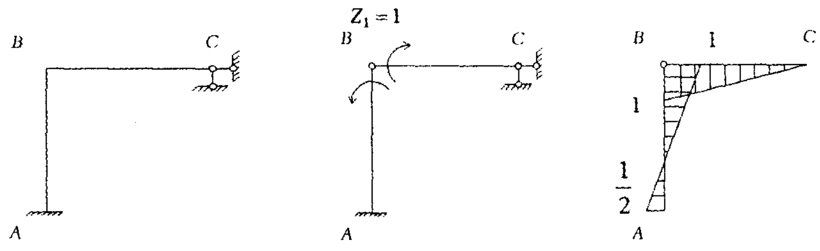
可证明两个解答在各自相应的取值范围内函数图形完全吻合. 同样可以得到支座反力 F_B的影响线和跨中剪力 Q_D的影响线,与静力法解答完全一致.

例 2　如图 4(a)所示刚架ABC,EI为常数,AB,BC杆长都为 4m. 有水平方向的活荷载$P=1$沿AB移动,求 B 点弯矩 M_B的影响线.

解　先撤去 B 点的支座,加上所求约束力 $Z1$,画出在 $Z1$ 作用下基本结构的弯矩图如图 4(b). 通过(a)图的弯矩图 4(c)自图乘可得:

$$\delta_{11}=\frac{\frac{1}{2}\times 4\times 1\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 1\times 4\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{EI}=\frac{7}{3EI}.$$

因为在 C 点处有铰支座限制刚架的侧移,在忽略轴向变形的时候基本结构中的 B 点没有发生水平方向的位移,所以$\Delta_{B1}=0$. 又因为活荷载$P=1$沿AB移动,与BC杆无关,所以只需要将AB杆拆分出来进行计算.



(a)　　(b)　　(c)

图 4　超静定刚架、虚力状态、虚力作用下刚架的弯矩图

以 A 点为原点，AB 为 X 轴正方向，BC 为 Y 轴正方向得：$A(0,\ -\frac{1}{2})$，$B(4,1)$，$M(x) = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}$. 所以 $k = \frac{3}{8}$，$\begin{cases}\Delta_A = 0 \\ \Delta_B = 0\end{cases}$.

$$y(x) = \frac{-\frac{\frac{3}{8}}{6}x^3 - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{6}\times 4^2 x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\times 4x}{EI \times \frac{7}{3EI}} = \frac{-\frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{4}}{\frac{7}{3}},$$

所以 $y(x) = -\frac{3}{112}x^3 + \frac{3}{28}x^2$.

此题亦可用静力法得到相同的解. 关于刚架其他内力的影响线求解这里不再一一举例，都可以根据公式(11)～(13)求得.

3　结束语

本文推导了一组求解超静定力影响线的公式：式(11)～(13)，这组公式适用于连续梁、刚架等各种情况，相比其他教科书给出的只适用于杆件两端没有位移的公式，具有普遍的适用性.

参考文献：

[1]　龙驭球，包世华. 结构力学教程[M]. 北京：高等教育出版社，2001.
[2]　武建华. 材料力学[M]. 重庆：重庆大学出版社，2002.

A method for influence lines of statically indeterminate structure

ZHANG Qiang [1], TU Zheng-guo [2], YUAN Feng-xiong [1]

(1. Architecture Engineering School, Shanghai Normal University, Shanghai 201418, China;
2. Department of Capital Project, Shanghai Normal University, Shanghai 201418, China)

Abstract: The influence lines for statically indeterminate is gained by the relationship between influence lines and deflections. We can obtain the functions of deflections by integral to the functions of bending - moment. Then a general equation of influences lines is obtained by applying in the border condition.

Key words: statically indeterminate structures; influence lines; deflection figure

(责任编辑：吴　澄)