三段均匀扭曲玻色开弦的Casimir能量*

陆继宗　黄保法

提　要　在讨论两段均匀玻色开弦的Casimir能量的基础上,进一步推广讨论了三段均匀玻色开和闭弦以及费米子弦的Casimir能量. 并且对三段均匀超弦的Casimir能量也作了探讨.

关键词　Casimir能量; 玻色子弦; 零点能
中图法分类号　O412.3; O572.2

0　引　言

1948年Casimir计算了两无穷大导电平板之间的真空电磁能量[1]. 发现此能量是负的,因而两平板之间的力是吸引力. 在自然单位制中,此力的大小为$F = -A\pi^2/240a^4$,式中A为板的面积,a为两板间的距离. 后来人们称此种能量为Casimir能量,力为Casimir力. 半个世纪以来,Casimir能量一直吸引着许多物理学家. 1997年,Lamoreaux通过实验以很高的精度测量了一导电半球面和一导电平板相距0.6μm到6μm时的力,发现与Casimir的预言相符得很好,从而严格证明了这一效应[2]. 因此Casimir能量再次引起了人们的兴趣.

一般说来,Casimir是由于边界的出现、时空的弯曲以及某些背景场的存在而引起的量子场的真空能量极化[3]. 在Casimir之后,Boyer讨论了一个大球面上的Casimir能量,他指出此时球面上的应力是排斥力[4]. Bayin和Ozcan计算了带有球面边界的弯曲空间的Casimir能量[5]. Ford讨论了背景场引起的Casimir能量[6]. Casimir能量与空间维数的关系最近也有人讨论[7,8]. 扩展体Casimir能量的讨论开始于80年代. 文献[9]和[10]讨论了膜的Casimir能量. Brevik和Nielsen首先计算了分段均匀玻色子闭弦的Casimir能量[11]. 他们用的正规化方法是指数割断法,后来有人用了广义Riemann ζ函数正规化法也求得了Casimir能量[12]. 后者更为简单明了. 有限温度分段均匀玻色子闭弦的Casimir能量也由Brevik, Nielsen等人给出[13,14]. 我们已把他们的讨论推广到玻色子开弦、费米子弦和超弦等情况[15]. Bayin等人讨论了具有扭曲连接条件的分段均匀玻色子闭弦的Casimir能量[16],但没有讨论开弦、费米子弦和超弦. 我们已讨论了两段均匀扭曲玻色开弦的Casimir能量[17]. 本文将在此基础上讨论具有扭曲和非扭曲两类连接条件的三段均匀玻色子开弦的

* 上海市高等学校科学技术发展基金资助项目(97DJ03)
收稿日期: 1999-01-20
第一作者陆继宗,男,教授,上海师范大学理工信息学院,上海,200234

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Casimir 能量, 并对费米子弦和超弦作简单讨论.

1　两段均匀弦情形

为完整起见, 先列出两段均匀弦情形中的一些结果. 设两段弦的长度分别为 L_1 和 $L_2(L = L_1 + L_2)$, 张力为 T_1 和 T_2. 声速已被调整为光速 c, 且采用自然单位制 $(c = 1)$. 令 $\Psi = \Psi(\sigma, \tau)$ 为弦的横向位移, σ 和 τ 为 1 + 1 维空间中的空间和时间变量. Ψ 满足波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Psi(\sigma, \tau) = 0. \tag{1}$$

因为 Dirichlet 边界条件相当于闭弦, 我们只考虑 Neumann 边界条件.

Neumann 边界条件为:

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial\tau}\Big|_{\sigma=L} = 0. \tag{2}$$

在连接处 L_1, $\Psi(\sigma, \tau)$ 有两类连接条件:

$$\Psi_1(L_1) = \Psi_2(L_1), \tag{3a}$$

$$\Psi_1(L_1) = -\Psi_2(L_1). \tag{3b}$$

(3a) 为非扭曲情形; (3b) 为扭曲情形. $\Psi(\sigma, \tau)$ 导数的连接条件为:

$$T_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=L_1} = T_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\tau}\Big|_{\sigma=L_1}. \tag{4}$$

1.1　非扭曲情形

由波动方程 (1), 边界条件 (2) 和非扭曲连接条件 (3a), 可得非扭曲分段均匀玻色子开弦的色散方程

$$x\sin(L_1\omega)\cos(yL_1\omega) + \cos(L_1\omega)\sin(yL_1\omega) = 0, \tag{5}$$

式中 $x = \frac{T_1}{T_2}, y = \frac{L_1}{L_2}$. 原则上由此色散方程可求出频谱, 但实际很难求出一般的解析解. 只能在某些特殊情况下得到其解析解.

1.1.1　$x = 1$

这对应于均匀弦. 在此情况由 (1) 得 $\omega_n = n\pi/L_1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 零点能为

$$E = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\omega_n = \frac{\pi}{L}\zeta(-1, 1) = -\frac{\pi}{12L}, \tag{6}$$

式中 $\zeta(-1, 1)$ 为广义 Riemann (Hurwitz) ζ- 函数: $\zeta(-1, 1) = -(a^2 - a - 1/6)/2$. 从 (6) 式可以清楚看出, 与闭弦不同 (均匀闭弦的 Casimir 能量为零[11, 13, 14]), 均匀的开弦仍然有 Casimir 能量. 这是由于开弦的两端就是边界而引起的.

1.1.2　$x \to 0$

这意味 T_1 和 T_2 中有一个为零, 另一个有限. 此时有两个频谱 $\omega_n = n\pi/L_1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 $\omega_n = (2n + 1)\pi/2L_1 (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 相应的 Casimir 能量为

$$E = -\frac{\pi}{2L_{II}}\zeta(-1, 1) + \frac{\pi}{2L_I}\zeta\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{48L}\left(\frac{2}{y} - y + 1\right). \tag{7}$$

与闭弦不同, 不必在 (7) 式中减去均匀弦的 Casimir 能量 (6) 式. $x \to \infty$ 与 $x \to 0$ 两种情况并无本质区别, 只要作变换 $y \to 1/y$ 即可.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

1.1.3 $y = 2J + 1\ (J = 1, 2, 3)$

此时有一个简并的频谱 $\omega_n = n\pi/2L_1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $\omega_n = \{(p_j + n)\pi/L_1,\ (1 - p_j + n)\pi/L_1\}$, 式中 $n = 0, 1, 2, \cdots$, p_j 为 $(0, 1/2)$ 中的一个数, $j = 1, 2, 3, \cdots, J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E = -\frac{\pi J(4J + 3)}{12L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(J + 1)}{2L}\sum_{j=1}^{J}[p_j^2 + (1 - p_j)^2]. \tag{8}$$

同样, 不必在(8)式中减去均匀弦的 Casimir 能量(6)式.

1.1.4 $y = 2J\ (J = 1, 2, 3, \cdots)$

此时有一个简并的频谱 $\omega_n = n\pi/L_1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $\omega_n = \{(p_j + n)\pi/L_1,\ (1 - p_j + n)\pi/L_1\}$, 式中 $n = 0, 1, 2, \cdots$, p_j 为 $(0, 1/2)$ 中的一个数, $j = 1, 2, 3, \cdots, J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E = -\frac{\pi J(4J + 1)}{6L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(2J + 1)}{4L}\sum_{j=1}^{2J}[p_j^2 + (1 - p_j)^2]. \tag{9}$$

1.2 扭曲情形

由波动方程(1), 边界条件(2)和扭曲连接条件(3b), 可得扭曲分段均匀玻色子开弦的色散方程. 扭曲分段均匀玻色子开弦的色散方程为

$$x\sin(L_1, \omega)\cos(yL^1\omega) - \cos(L_1, \omega)\sin(yL_1\omega) = 0. \tag{10}$$

可以求得下列特殊情况下的 Casimir 能量:

1.2.1 $x = 1$

由于在连接点有扭曲存在, 此时已不再对应于均匀弦. 由(10)式, 有 $(y - 1)\omega_n = \pi n/L_1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 这意味着在此情况下, Casimir 能量总与 y 有关. 仅当 $y = 0$ 或 $y = \infty$ 时, 才是均匀弦. 当 $y \neq 1$ 时, 有

$$E = -\frac{\pi}{12(L_2 - L_1)}. \tag{11}$$

在扭曲情况下, 特别要注意, 当 $y = 1$ (即 $L_1 = L_2$) 时, Casimir 能量不确定.

1.2.2 $x \to 0$

此情况与非扭曲情况相同:

$$E = -\frac{\pi}{48L}\left(\frac{2}{y} - y + 1\right). \tag{12}$$

1.2.3 $y = 2J + 1\ (J = 1, 2, 3)$

此时有一个简并的频谱 $\omega_n = n\pi/2L_1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $\omega_n = \{(p_j + n)\pi/L_1,\ (1 - p_j + n)\pi/L_1\}$, 式中 $n = 0, 1, 2, \cdots$; p_j 为 $(0, 1/2)$ 中的一个数, $j = 1, 2, 3, \cdots, J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E = -\frac{\pi J(4J + 3)}{12L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(J + 1)}{2L}\sum_{j=1}^{J}[p_j^2 + (1 - p_j)^2]. \tag{13}$$

1.2.4 $y = 2J\ (J = 1, 2, 3, \cdots)$

此时有一个简并的频谱 $\omega_n = n\pi/2L_1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $(\omega_n = \{(p_j + n)\pi/L_1,\ (1 - p_j + n)\pi/L_1\})$, 式中 $n = 0, 1, 2, \cdots$; p_j 为 $(0, 1/2)$ 中的一个数, $j = 1, 2, 3, \cdots, J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E = -\frac{\pi J(4J + 1)}{6L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(2J + 1)}{4L}\sum_{j=1}^{2J}[p_j^2 + (1 - p_j)^2]. \tag{14}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

注意, (13), (14) 式表面上分别与两段均匀弦中的相应情形(8), (9) 式相同, 但实际不同. 这是因为色散方程(10) 式与(5) 式不同, 所以在这两种情况下所得的频谱中 p_j 也不同.

2 三段均匀弦情形

令三段均匀弦 1, 2, 3 具有相等长度 $L/3$, L 为总长度; 声速等于光速: $v=(T_1/\rho_1)^{1/2}=(T_2/\rho_2)^{1/2}=(T_3/\rho_3)^{1/2}=1$. 现有两个端点 $\sigma=0, L$ 以及两个连接点 $\sigma=L/3, 2L/3$. 满足波动方程的解 $\Psi(\sigma,\tau)$ 为:

$$\Psi_1=\xi_1(e^{i\omega(\sigma-\tau)}+e^{-i\omega(\sigma+\tau)}), \tag{15a}$$

$$\Psi_2=\xi_2(e^{i\omega(\sigma-\tau)}+e^{-i\omega(\sigma+\tau)}), \tag{15b}$$

$$\Psi_3=\xi_3 e^{iL}(e^{i\omega(\sigma-L-\tau)}+e^{-i\omega(\sigma-L+\tau)}). \tag{15c}$$

Neumann 边界条件为:

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0}=\frac{\partial\Psi_2}{\partial\tau}\Big|_{\sigma=L}=0. \tag{16}$$

非扭曲连接条件为:

$$\Psi_1\left(\frac{L}{3}\right)=\Psi_2\left(\frac{L}{3}\right), \tag{17a}$$

$$\Psi_2\left(\frac{2L}{3}\right)=\Psi_3\left(\frac{2L}{3}\right), \tag{17b}$$

$$T_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{L}{3}}=T_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{L}{3}}, \tag{17c}$$

$$T_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{2L}{3}}=T_3\frac{\partial\Psi_3}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{2L}{3}}. \tag{17d}$$

2.1 非扭曲情形

由(15), (16) 和(17) 式, 可得非扭曲情形的色散方程:

$$\sin 3p\sin p\left(\frac{\cos^2 p}{x_1x_2}+\frac{\cos^2 p}{x_1}-\frac{\sin^2 p}{x_2}+\cos^2 p\right)=0, \tag{18}$$

式中 $p=\omega L/3$. 由(18) 式原则上可以求得频谱和 Casimir 能量, 但只有在几个特殊情况才能求得解析解:

2.1.1 $x_1=x_2=1$

这相当于均匀开弦情况, 其频谱为: $\omega_n=n\pi/L$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

零点能为:

$$E=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\omega_n=\frac{\pi}{L}\zeta(-1,1)=-\frac{\pi}{12L}. \tag{19}$$

(19) 式与(6) 式相同, 这说明均匀开弦的 Casimir 能量总是相等的.

2.1.2 $x_1\to 0$, x_2 任意

此时有两个频谱 $\omega_n=3n\pi/L$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 和 $\omega_n=3(2n+1)\pi/2L$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 相应的 Casimir 能量为

$$E=-\frac{\pi}{16L}. \tag{20}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(20) 式与(7) 式明显不同．一般来说, 除均匀情况外, 三段弦的 Casim ir 能量两段弦的 Casim ir 能量都不相同．

2 2　扭曲情形

扭曲连接条件为:

$$\psi_1\left(\frac{L}{3}\right) = -\ \psi_2\left(\frac{L}{3}\right), \tag{21a}$$

$$\psi_2\left(\frac{2L}{3}\right) = \psi_3\left(\frac{2L}{3}\right), \tag{21b}$$

$$T_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{L}{3}} = T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{L}{3}}, \tag{21c}$$

$$T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{2L}{3}} = T_3 \frac{\partial\psi_3}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=\frac{2L}{3}}. \tag{21d}$$

由(15), (16) 和(21) 式, 可得扭曲情形的色散方程:

$$\sin 3p \sin p\left(\frac{\cos^2 p}{x_1 x_2} + \frac{\cos^2 p}{x_1} + \frac{\sin^2 p}{x_2} - \cos^2 p\right) = 0. \tag{22}$$

显然, (22) 与(18) 式不同．故两者的 Casim ir 能量也不同．同样, 由(22) 式原则上也可以求得扭曲情形的频谱和 Casim ir 能量, 但只有在几个特殊情况下才能求得解析解:

2 2 1　$x_1 = x_2 = 1$

由于有扭曲的连接条件, 这已不对应于均匀弦．其 Casim ir 能量为:

$$E = -\ \frac{\pi}{4L}. \tag{23}$$

2 2 2　$x_1 \to 0$, x_2 任意

此时 Casim ir 能量为:

$$E = \frac{\pi}{48L}. \tag{24}$$

3　讨　论

(1) 我们已经讨论了费米子弦和超弦的 Casim ir 能量[15], 指出超弦的 Casim ir 能量是玻色子弦的负值．所以可以很方便地求得超弦的 Casim ir 能量．

(2) 在此需要特别强调的是: 在开弦情况, Casim ir 能量可正可负, 这与 B revik 等人讨论的闭弦[11, 13, 14]完全不同．在他们的讨论中 Casim ir 能量总是正的, 也就是说总是排斥力．

(3) 在开弦情况, 由于有边界, 即使均匀弦也有 Casim ir 能量．这与 B revik 等人的讨论[11, 13, 14]不同．

(4) 用同样的方法, 可讨论由三段或多段组成的弦; 也可讨论多圈弦的 Casim ir 能量．我们将另文讨论．

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

1 Casimir H B G. Proc K. Ned Akad Wet , 1948, 51: 793
2 Lamoreaux S K. Phys Rev. Lett , 1997, 78: 5
3 Plunien G. Moller B, Greiner W. Phys Rep. , 1986, 134: 87
4 Boyer T H. Phys Rev. , 1968, 174: 1764
5 Bayin S S, Ozcan M. Phys Rev. , 1993, D48: 3206; 1994, D49: 5313; Romeo, A. Phys Rev. , 1996, D53: 3392
6 Ford L H. Phys Rev. , 1975, D11: 3370
7 Bender C M. Milton K A. Phys Rev. , 1994, D50: 6547; Milton, KA Phys Rev. , 1997: 4949
8 Li X, Cheng H, Li J, et al Phys Rev. , 1997, D56: 2155
9 Kikkawa K, Yamasaki M, Prog Theor. Phys , 1986, 76: 1379
10 Shi X, Li X, Class Quantum Grav. , 1991, 8: 75
11 Brevik I, Nielsen H B, Phys Rev. , 1990, D41: 1185; 1995, D51: 1689
12 Li X, Shi X, Zhang J. Phys Rev. , 1991, D44: 560
13 Brevik I Elizalde E. Phys Rev. , 1999, D49: 5319
14 Brevik I Nielsen H B, Odintsov S D. Phys Rev. , 1996, D53: 3224
15 Lu J, Huang B. Phys Rev. , 1998, D58: 5280
16 Bayin S S. Krisch J P, Ozcan M J. Math. Phys , 1996, 37: 3662
17 Lu J, Huang B. Nuo. Cim. , 1999, A111: 1337

Casimir Energy for Three-piece Uniform Twisted Open Bosonic Strings

Lu Jizong
(Shanghai Teachers University)

Huang Baofa
(Shanghai Technical College of Metallurgy)

Abstract We extend our discussions on the Casimir energy for two-piece uniform bosonic strings to the cases of three-piece uniform twisted open bosonic strings, closed bosonic strings and fermionic strings. The Casimir energy for superstrings is investigated briefly too.

Key words Casimir energy; bosonic string; zero-point energy

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net