第28卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 28, No. 2
1999年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. 1999

具有有界径向符号的Toeplitz算子*

许庆祥

提 要 研究由某些本质有界的径向函数为符号函数的Toeplitz算子所生成的C^*-代数的结构

关键词 径向函数; Toeplitz算子; C^*-代数
中图法分类号 O177.5

0 引 言

记D为复平面上的开单位圆盘, dA为D上正规的Lebesgue测度. 记$L^2(D, dA)$为D上的平方可积函数全体, $L_a^2(D, dA)$为其中的解析函数全体. 众所周知, $L_a^2(D, dA)$为$L^2(D, dA)$的闭子空间. 记P为$L^2(D, dA)$到$L_a^2(D, dA)$上的投影算子.

$\forall f \in L^2(D, dA)$, 定义Toeplitz算子T_f如下:

$$T_f(g) = P(fg), \quad \forall g \in L_a^2(D, dA).$$

记$L_R^2(D, dA)$为$L^2(D, dA)$中的径向函数全体. $\forall f \in L_R^2(D, dA)$, $g \in L_a^2(D, dA)$, 由[3]知

$$T_f(g)(z) = \int \frac{f(\omega) g(\omega)}{(1 - z\overline{\omega})^2} dA(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) b_n z^n, \tag{1}$$

其中 $a_n(f) = (n+1)\int |z|^{2n} f(z) dA(z)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

记$C(\overline{B_n})$为C^n中的闭单位球上的连续函数全体, $T(B_n)$为由$\{T_\varnothing \mid \varnothing \in C(\overline{B_n})\}$所生成的$C^*$-代数. Coburn在文[1]中证明了

$$T(B_n) = \{T_\varnothing + k \mid \varnothing \in C(\overline{B_n}),\ k \in K(L_a^2(B_n))\},$$

其中$K(L_a^2(B_n))$为$L_a^2(B_n, dA)$上的紧算子全体. 上述命题的证明用到了下列关键事实:

$$\forall \varnothing,\ \varphi \in C(\overline{B_n}),\ T_{\varnothing\varphi} - T_\varnothing T_\varphi \in K(L_a^2(B_n)).$$

值得注意的是, 即使在$n = 1$的情形, 当$f \in L^\infty(D, dA)$, $g \in C(\overline{D})$时, $T_{fg} - T_f T_g$也不一定为紧算子. 从而知, 对于Bergman空间$L_a^2(D, dA)$上的Toeplitz算子, 当算子符号由

---

* 上海市高校青年基金资助项目(98QN75)
收稿日期: 1998-12-07
作者许庆祥, 男, 副教授, 上海师范大学数学科学学院, 上海, 200234, 上海, 200234

连续函数推广到本质有界函数时, 相应的算子性质会有很大的不同.

在本文的第 1 部分中, 我们研究由某些本质有界的径向函数为符号函数的 Toeplitz 算子所生成的 C^*-代数的结构.

记 $L_R^\infty(D, dA) = \{f \in L^\infty(D, dA) \mid f$ 为径向函数$\}$; $L_{CR}^\infty(D, dA) = \{f \in L_R^\infty(D, dA) \mid \forall g \in L_R^\infty(D, dA)$, $T_f T_g - T_{fg}$为紧算子$\}$. 显然常值函数和具有紧支集的有界径向函数都属于 $L_{CR}^\infty(D, dA)$. 由(1)式知, $T_f T_g = T_g T_f$, $\forall f, g \in L_R^\infty(D, dA)$, 从而$L_{CR}^\infty(D, dA)$为 $L^\infty(D, dA)$ 的 $*$-子代数.

记 $X = \mathrm{span}\{f z^n \bar{z}^m \mid f \in L_{CR}^\infty(D, dA), n, m \in N \cup \{0\}\}$, $T(X)$为由$\{T_x \mid x \in X\}$生成的 C^*-代数. 本文证明了

$$T(X) = \overline{\{T_x + k \mid x \in \bar{X},\ k \in K(L_a^2(D, dA))\}}.$$

由 Stone-Weierstrass 定理知, $\overline{\mathrm{span}\{z^n \bar{z}^m \mid n, m \in N \cup \{0\}\}} = C(\bar{D})$. 于是 $C(\bar{D}) \subseteq C(\bar{X})$, 从而本部分的工作为 Coburn 的工作在 $n = 1$ 时的推广.

在第 2 部分中, 研究加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的一致有界性.

1 具有有界径向符号的 Toeplitz 算子所生成的 C^*-代数

引理 1.1 设 $f \in L_R^\infty(D, dA)$, 则 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}(f) - a_n(f)) = 0$.

证明

$$a_{n+1}(f) - a_n(f) = (n+2)\int f(\omega)\,|\omega|^{2n}\left[\,|\omega|^2 - \frac{n+1}{n+2}\right] dA(\omega).$$

由于 $f \in L^\infty(D, dA)$, 只要证明

$$I_n = (n+2)\int |\omega|^{2n}\left|\,|\omega|^2 - \frac{n+1}{n+2}\right| dA(\omega) \to 0\ (n \to \infty).$$

$$I_n = \frac{1}{\pi}(n+2)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^{2n}\left| r^2 - \frac{n+1}{n+2}\right| r\,dr = 2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right).$$

所以 $I_n \to 0\ (n \to \infty)$, 从而知命题成立.

定理 1.2 存在下列 C^*-代数正合序列:

$$0 \to K(L_a^2(D, dA)) \to T(X) \to C(\bar{X}) \to 0.$$

证明 首先证明

$$\forall x, y \in X,\ T_x T_y - T_{xy} \in K(L_a^2(D, dA)).$$

由$L_{CR}^\infty(D, dA)$的定义知, 只要证明$\forall n, m, k \in N \cup \{0\}$,

(1) $T_{\bar{z}^m} T_{z^n} - T_{z^n} T_{\bar{z}^m} \in K(L_a^2(D, dA))$.

(2) $T_f T_{z^k} - T_{z^k} T_f \in K(L_a^2(D, dA))$.

这是因为若(1), (2)成立, 则对$\forall n_1, n_2, m_1, m_2 \in N \cup \{0\}$, $f_1, f_2 \in L_{CR}^\infty(D, dA)$,

$$\begin{aligned}
&T_{f_1 z^{n_1} \bar{z}^{m_1}} \cdot T_{f_2 z^{n_2} \bar{z}^{m_2}} = T_{\bar{z}^{m_1}} T_{f_1} T_{z^{n_1}} \cdot T_{\bar{z}^{m_2}} T_{f_2} T_{z^{n_2}} = \\
&T_{\bar{z}^{m_1}} T_{f_1} T_{\bar{z}^{m_2}} T_{z^{n_1}} T_{f_2} T_{z^{n_2}} + k_1 = T_{\bar{z}^{m_1}} T_{\bar{z}^{m_2}} T_{f_1} T_{z^{n_1}} T_{f_2} T_{z^{n_2}} + k_2 = \\
&T_{\bar{z}^{(m_1+m_2)}} T_{f_1} T_{f_2} T_{z^{(n_1+n_2)}} + k_3 = T_{\bar{z}^{(m_1+m_2)}} T_{f_1 f_2} T_{z^{(n_1+n_2)}} + k_4 = \\
&T_{f_1 f_2 z^{(n_1+n_2)} \bar{z}^{(m_1+m_2)}} + k_4.
\end{aligned}$$

这里 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in K(L_a^2(D, dA))$.

由文[1]知, (1)式成立. 下证(2)式成立.

$\forall g\in L_a^2(D,\mathrm{d}A)$, 设 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$. 则

$$T_{fz^k}(g)(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(f)b_n\omega^{n+k},$$

$$T_{z^k}T_f(g)(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)b_n\omega^{n+k}.$$

于是

$$(T_{fz^k}-T_{z^k}T_f)(g)(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+k}(f)-a_n(f))b_n\omega^{n+k}.$$

记 $c_n^k=a_{n+k}(f)-a_n(f)$, 则

$$|c_n^k|\leq|a_{n+k}(f)-a_{n+k-1}(f)|+\cdots+|a_{n+1}(f)-a_n(f)|.$$

由引理 1.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n^k=0$.

现设 $\{g_m\}_{m=1,2,\cdots}\subseteq L_a^2(D,\mathrm{d}A)$, g_m 弱收敛于0, 则由[3, 引理2]知, $\sup\limits_m\|g_m\|=C<+\infty$ 且 $\{g_m\}$ 内闭一致收敛于 0. 记 $g_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_m^{(n)}z^n$, 则

$$\|g_m\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_m^{(n)}|^2}{n+1},$$

$$\|(T_{fz^k}-T_{z^k}T_f)(g_m)\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n^k|^2|b_m^{(n)}|^2}{n+k+1}=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n^k|^2\frac{n+1}{n+k+1}\cdot\frac{|b_m^{(n)}|^2}{n+1}.$$

$\forall\epsilon>0$, $\exists N$, 使当 $n>N$ 时, 有 $|c_n^k|^2\frac{n+1}{n+k+1}<\epsilon$. 于是,

$$\|(T_{fz^k}-T_{z^k}T_f)(g_m)\|^2\leq\sum_{n=0}^{N}\frac{|c_n^k|^2|b_m^{(n)}|^2}{n+k+1}+\epsilon C^2.$$

而 $b_m^{(n)}=\frac{g_m^{(n)}(0)}{n!}$, 由 g_m 在任一紧子集上的一致收敛性, 应用Cauchy积分公式知 $g_m^{(n)}(0)\to 0$ $(m\to\infty)$. 于是, $\exists M_0\in N$, 使当 $m>m_0$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{|c_n^k|^2|b_m^{(n)}|^2}{n+k+1}<\epsilon.$$

从而当 $m>m_0$ 时,

$$\|(T_{fz^k}-T_{z^k}T_f)(g_m)\|^2\leq\epsilon(1+C^2).$$

由 ϵ 的任意性知,

$$\|(T_{fz^k}-T_{z^k}T_f)(g_m)\|\to 0\ (m\to\infty).$$

由[2, 定理 1.3.4]知, $T_fT_{z^k}-T_{z^k}T_f\in K(L_a^2(D,\mathrm{d}A))$.

由 $T(D)\subseteq T(X)$ 知, $K(L_a^2(D,\mathrm{d}A))\subseteq T(X)$. 定义 $\sigma: X\to T(X)/K$,

$$\sigma\left(\sum f_i z^{n_i}\bar{z}^{m_i}\right)=\sum\left[T_{f_iz^{n_i}\bar{z}^{m_i}}\right].$$

由于 $\forall x,y\in X$, $T_xT_y-T_{xy}\in K(L_a^2(D,\mathrm{d}A))$, σ 为一个压缩的保持 * 运算的代数同态. 将 σ 唯一地延拓定义到 $\overline{X}$ 上, 延拓后的映照记为 $\tilde{\sigma}$. 则 $\tilde{\sigma}$ 为 C^*-代数 $\overline{X}$ 到 C^*-代数 $T(X)/K$ 的一个 C^*-代数同态, 从而 $\tilde{\sigma}(\overline{X})$ 为 $T(X)/K$ 的一个 C^*-子代数. 由 $T(X)$ 的定义知 $\tilde{\sigma}(\overline{X})=$

$T(X)$，即 $T(X)=\{T_x+k\,|\,x\in\overline{X},\ k\in K(L_a^2(D,\mathrm{d}A))\}$.

2 加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的一致有界性

设 $\alpha>-1$，定义

$$P_\alpha(f)(z)=(\alpha+1)\int_D\frac{(1-|\omega|^2)^\alpha}{(1-z\bar{\omega})^{2+\alpha}}f(\omega)\mathrm{d}A(\omega).$$

由[2]知，当 $\alpha>-\frac{1}{2}$ 时，P_α 为 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 到 $L_a^2(D,\mathrm{d}A)$ 的有界线性算子(但不一定为投影算子).

设 $f\in L^2(D,\mathrm{d}A)$，定义 Toeplitz 算子 T_f^α 如下:

$$T_f^\alpha(g)(z)=P_\alpha(fg)(z),\quad g\in L_a^2(D,\mathrm{d}A).$$

定理 2.1 设 $f\in L_R^\infty(D,\mathrm{d}A)$，则 $\sup\limits_{-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty}\|T_f^\alpha\|\leq\|f\|_\infty$.

证明 $\forall g\in L_a^2(D,\mathrm{d}A)$，设 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty b_nz^n$. 令 $\lambda=\alpha+2$，则

$$T_f^\alpha(g)(z)=(\alpha+1)\int_D\frac{(1-|\omega|^2)^\alpha}{(1-z\bar{\omega})^{2+\alpha}}f(\omega)g(\omega)\mathrm{d}A(\omega)=$$

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda)}z^n(\alpha+1)\int_D(1-|\omega|^2)^\alpha f(\omega)g(\omega)\bar{\omega}^n\mathrm{d}A(\omega).$$

由

$$(\alpha+1)\int_D(1-|\omega|^2)^\alpha|\omega|^{2n}\mathrm{d}A(\omega)=(\alpha+1)B(n+1,\alpha+1)=\frac{n!\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)},$$

以及 f 为径向函数，知 $\|T_f^\alpha\|\leq\|f\|_\infty$，$\forall\alpha>-\frac{1}{2}$.

性质 2.2 存在 $f\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，使 $\sup\limits_{-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty}\|T_f^\alpha\|=+\infty$.

证明 记 $D_+=\{z\,|\,z\in D,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$，令 $f(z)=|z|\cdot\chi_{D_+}(z)$. 则

$$T_f^\alpha(1)(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda)}z^n(\alpha+1)\int_{D_+}(1-|\omega|^2)^\alpha|\omega|\bar{\omega}^n\mathrm{d}A(\omega).$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$\int_{D_+}(1-|\omega|^2)^\alpha|\omega|\bar{\omega}^n\mathrm{d}A(\omega)=\frac{1}{-i\pi n}\left[e^{-in\pi}-1\right]\int_0^1(1-r^2)^\alpha r^{n+2}\mathrm{d}r.$$

$$=\frac{1}{i\pi(2k+1)}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)}.$$

从而

$$\|T_f^\alpha(1)\|^2\geq\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{\Gamma(2k+1+\lambda)(k+1)!}{(2k+1)!\,(2k+1)\Gamma(k+\lambda+1)}\right]^2\|z^{2k+1}\|^2=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(k+\lambda+1)\cdots(2k+\lambda)}{(k+2)\cdots(2k+1)(2k+1)}\right]^2\frac{1}{2k+2}\to+\infty(\alpha\to+\infty).$$

从而，$\sup\limits_{-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty}\|T_f^\alpha\|=+\infty$.

推论 2 3 $\sup\limits_{-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty} \| P_\alpha \| = +\infty.$

参 考 文 献

1 Coburn L A. Singular Integral Operators and Toeplitz Operators on Odd Spheres Indiana University Mathematics Journal, 1973, 23(5): 433～439

2 Zhu Kehe. Operator Theory in Function Spaces New York: New York State University, 1989

3 许庆祥. 关于符号为径向函数的 Toeplitz 和 Hankel 算子. 复旦学报(自然科学版), 1993, 32(2): 155～160

Toeplitz Operators with Bounded Radical Symbols

Xu Qingxiang

(College of Mathematical Science)

Abstract Studies the C^*-algebras generated by some Toeplitz operators with essentially bounded radical symbols

Key words radical function; Toeplitz operator; C^*-algebra