

具有双重指数势的 phantom 宇宙学

孙昌波, 赵一斌, 孙珏岷

(上海师范大学 天体物理联合研究中心, 上海 200234)

摘要: 利用相空间分析方法, 系统研究了具有双重指数势的 phantom 动力学. 主要目的在于研究由 M 理论引起的势, 但同时还分析了指势中系数比为正的所有可能情况. 根据宇宙的晚期行为, 给出了解的完整分类. 与 quintessence 情形相反, 该体系存在异宿轨线解.

关键词: Phantom; de Sitter 吸引子; 异宿轨线; M 理论

中图分类号: P142 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2005)01-0041-06

0 引言

态方程参数 $w = \rho / p$ 是宇宙学中一个重要的参数. 当 $w < -1/3$ 时, 对应于宇宙的加速膨胀. 具有正动能的 quintessence 场其 w 大于 -1 ^[1]. 然而当前的观测数据为 $-1.38 < w < -0.82$ ^[2], 所以 Caldwell 建议用负动能的标量场来解释宇宙的演化, 并取名为 phantom 能量^[3]. Phantom 场的宇宙学蕴涵已被广泛地研究^[4,5]. 另一方面, 宇宙的加速膨胀使人们对从 M 理论导出宇宙学解产生了浓厚的兴趣^[6]. 具有指数势的 phantom 模型令人感兴趣的理由为: (i) 它们能从 M 理论的各种紧致化中导出; (ii) 该模型的运动方程是一个自守系统, 系统的临界点给出了相当广泛类型解的渐近行为. 对于单个指数势的 phantom 模型, 已有李新洲等人讨论^[8], 本文将讨论具有双重指数势的 phantom 模型, 尽管主要目的在于研究由 M 理论引起的势, 但并不限制指数函数的系数比. 按照宇宙的晚期行为, 对解进行了完整分类. 还发现在 phantom 系统中, 存在一类异宿轨线解, 这与 quintessence 系统正好相反.

1 运动方程和相空间

4 维 phantom 场的拉格朗日量为

$$L = \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{2} - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) \right), \quad (1)$$

其中势项能用 $4 + m$ 维 M 理论通过最大对称空间紧致化导出

$$V(\phi) = -k_1 e^{-2c\phi} + \frac{\bar{b}^2}{2} e^{-\frac{\phi}{c}}, \quad (2)$$

其中 $k = -1, 0, 1$ 表示内禀最大对称空间的类型, $c = [(m+2)/m]^{1/2}$ 以及 \bar{b} 是与 m 相关的常数.

Friedmann-Robertson-Walker 时空取非平庸延迟函数形式:

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - e^{2\alpha(t)} \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (3)$$

收稿日期: 2004-10-08

基金项目: 国家自然科学基金(10473007).

作者简介: 孙昌波(1978-), 男, 上海师范大学天体物理研究中心研究生. 赵一斌(1980-), 男, 上海师范大学天体物理研究中心研究生. 孙珏岷(1968-), 女, 上海师范大学天体物理研究中心副主任.

对作用量变分后得到运动方程

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + ke^{-2\alpha} = -\frac{1}{3} \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} + \frac{2}{3} V(\phi), \quad (4)$$

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\alpha}}{N} \right) - ke^{-2\alpha} - \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{N} \right) + \frac{3}{N^2} \dot{\alpha} \dot{\phi} - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (6)$$

其中点代表对 t 求导.

利用(4)将(5)式中 α 项消去,并令:

$$N(t) = \frac{\sqrt{2}}{b} e^{\frac{3}{c}\phi(t)}, \quad k_1 = 0,$$

$$N(t) = e^{c\phi(t)}, \quad k_1 = \pm 1, \quad c < \sqrt{3}, \quad (7)$$

$$N(t) = \frac{\sqrt{2}}{b} e^{\frac{3}{c}\phi(t)}, \quad k_1 = \pm 1, \quad c > \sqrt{3}.$$

延迟函数 $N(t)$ 作用在于吸收双重指数势中的主导项. 引入参量

$$x(t) = \phi(t), \quad y(t) = \dot{\phi}(t), \quad z(t) = \dot{\alpha}(t), \quad (8)$$

在 $k_1 = 0$ 的情形下,得到二维动力系统 $D'(y, z)$:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{3}{c}y^2 - 3yz - \frac{6}{c} \\ \dot{z} = \frac{3}{c}yz + \frac{2}{3}y^2 - z^2 + \frac{2}{3} \end{cases} \quad (9)$$

在 $k_1 = \pm 1$ 的情形下,得到三维动力系统 $D(x, y, z)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = cy^2 - 3yz + 2ck_1 - \frac{3b^2}{c} e^{\frac{2}{c}(c^2-3)x} \\ \dot{z} = cyz + \frac{2}{3}y^2 - z^2 - \frac{2}{3}k_1 + \frac{b^2}{3} e^{\frac{2}{c}(c^2-3)x} \end{cases}, \quad c < \sqrt{3}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{3}{c}y^2 - 3yz - \frac{6}{c} + \frac{4ck_1}{b^2} e^{-\frac{2}{c}(c^2-3)x} \\ \dot{z} = \frac{3}{c}yz + \frac{2}{3}y^2 - z^2 + \frac{2}{3} - \frac{4k_1}{3b^2} e^{-\frac{2}{c}(c^2-3)x} \end{cases}, \quad c > \sqrt{3}, \quad (11)$$

当 $z > 0$ 时,宇宙将发生膨胀. 同时容易得到下述条件对应于宇宙的加速膨胀:

$$\begin{aligned} y^2 &> -1, \quad k_1 = 0, \\ y^2 &> k_1 - \frac{b^2}{2} e^{\frac{2}{c}(c^2-3)x}, \quad k_1 = \pm 1, \quad c < \sqrt{3}, \\ y^2 &> \frac{2k_1}{b^2} e^{-\frac{2}{c}(c^2-3)x} - 1, \quad k_1 = \pm 1, \quad c > \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (12)$$

所以, $k_1 = 0$ 和 -1 时,必定对应于加速膨胀.

2 稳定临界点及其属性

对于系统 $D'(y, z)$, 其临界点由下式给出:

$$\dot{y}|_{FP} = 0, \quad (13)$$

$$\dot{z}|_{FP} = 0.$$

对于系统 $D(x, y, z)$, 其临界点由下式给出:

$$\dot{y}|_{FP} = 0,$$

$$\dot{z}|_{FP} = 0,$$

$$\dot{x}|_{FP} = 0.$$

(14)

$D(x, y, z)$ 的临界点以 FP 表示. 在 $\phi \rightarrow \infty$ 时, 该系统中含 x 的项将趋于零, 舍去这一项则约化为二维动力学系统 $D_\infty(y, z)$, $D_\infty(y, z)$ 的临界点称为 $D(x, y, z)$ 的准临界点, 以 QFP 表示. 在 $D'(y, z)$ 中, 临界点处的标量场 ϕ 在 $t \rightarrow \infty$ 时趋于无穷, 故其临界点也以 QFP 表示.

动力系统(9)的临界点为

$$QFP_1 = \left[\pm \sqrt{\frac{6}{c^2 + 3}}, \mp \frac{c}{3} \sqrt{\frac{6}{c^2 + 3}} \right],$$

为判断临界点的稳定性, 计算其扰动方程的特征值(只考虑 $z > 0$ 的临界点):

$$\lambda_1 = \left\{ -\frac{1}{c} \sqrt{6(c^2 + 3)}, -\frac{2}{3c}(c^2 + 9) \sqrt{\frac{6}{c^2 + 3}} \right\}$$

其相图如图 1 所示.

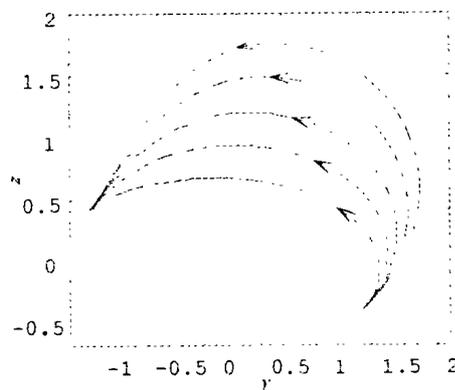


图 1 QFP_1 对应的相图

在 $c < \sqrt{3}$ 的情形下, 双重指数势 $V(\phi)$ 中含 k_1 的项占主导地位, 并由函数 $N(t)$ 吸收, 因此在 $x \rightarrow \infty$ 时, 方程(10) 舍去次要项而约化为:

$$\begin{cases} \dot{y} = cy^2 - 3yz + 2ck_1 \\ \dot{z} = cyz + \frac{2}{3}y^2 - z^2 - \frac{2}{3}k_1 \end{cases} \quad (15)$$

当 $k_1 = +1$ 时, 有临界点

$$QFP_2 = [\pm 1, \pm c],$$

其扰动矩阵的特征值为

$$\lambda_2 = \{-c - \sqrt{-4 - 3c^2}, -c + \sqrt{-4 - 3c^2}\}.$$

其相图如图 2 所示.

当 $k_1 = -1$ 时, 有临界点

$$QFP_3 = \left[\pm c \sqrt{\frac{2}{c^2 + 3}}, \mp \sqrt{\frac{2}{c^2 + 3}} \right],$$

其扰动矩阵的特征值为

$$\lambda_3 = \left\{ 2(c^2 + 1) \sqrt{\frac{2}{c^2 + 3}}, -\sqrt{2(c^2 + 3)} \right\}.$$

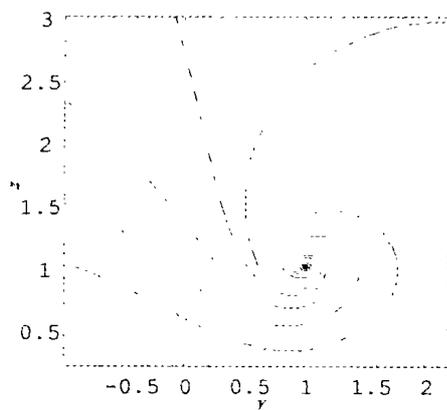


图2 QFP_2 对应的相图

其相图与图 1 相似.

动力系统(10) 在未约化的情形下,不存在有物理意义的临界点.

动力系统(11) 在 $k_1 = +1$ 时有临界点

$$FP_4 = \left[\frac{c}{2(c^2 - 3)} \ln\left(\frac{2c^2}{3b^2}\right), 0, \pm \sqrt{\frac{2}{3c^2}(c^2 - 3)} \right],$$

其扰动矩阵的特征值为

$$\lambda_4 = \left\{ -\frac{2\sqrt{6(c^2 - 3)}}{3c}, -\frac{\sqrt{42(3 - c^2)} + \sqrt{6(c^2 - 3)}}{2c}, \frac{\sqrt{42(3 - c^2)} - \sqrt{6(c^2 - 3)}}{2c} \right\}$$

其相图如图 3 所示.

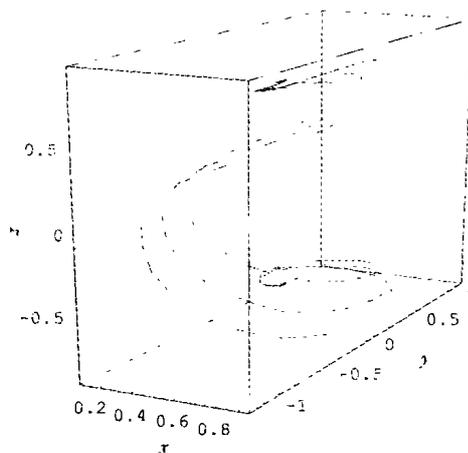


图3 FP_4 对应的相图

动力系统(11) 在 $x \rightarrow \infty$ 时约化为(10),其临界点以 QFP_5 表示.

对于临界点属性的分析见下表:

表 1 稳定临界点的属性

$(Q)FP$	k_1	c	吸引子类型	k	加速
1	0	$0 < c < \infty$	结点	0	加速
2	1	$0 < c < \sqrt{3}$	焦点	-1	临界
3	-1	$0 < c < \sqrt{3}$	结点	0	加速
4	1	$\sqrt{3} < c < \infty$	焦点	0	加速
5	± 1	$\sqrt{3} < c < \infty$	结点	0	加速

一个不稳定临界点的轨线可以与一个吸引子的轨线重合, 这一重合, 形成了一种特殊的动力系统解, 异宿轨线解. 通过临界点和数值计算所提供的分析, 我们发现了双指数势 Phantom 宇宙存在异宿轨线解, 这是一个联系着分别对应于宇宙演化初态和终态的两个临界点的解, 如图 1 和图 3 所示.

3 Phantom 宇宙学

在临界点处通过积分和时间平移容易得到:

$$\alpha(t) = \dot{\alpha}^* t + \zeta, \phi(t) = \phi^*, \quad QFP \quad (16)$$

$$\alpha(t) = \dot{\alpha}^* t, \phi(t) = \phi^*, \quad FP \quad (17)$$

在 $k \neq 0$ 的情况下, ζ 可以通过 (4) 式来确定. 对于 QFP_2 , 有

$$e^{2\zeta} = \frac{1}{1+c^2}. \quad (18)$$

通过 $d\tau = Nd t$ 将 t 转换到宇宙时 τ

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{3|\dot{\phi}^*|} \ln\left(\frac{3|\dot{\phi}^*|\bar{b}}{\sqrt{2}c}\tau\right) \quad \text{对于 } QFP_{1,5}, \\ t &= \frac{1}{c|\dot{\phi}^*|} \ln(c|\dot{\phi}^*|\tau) \quad \text{对于 } QFP_{2,3}, \\ t &= \frac{\bar{b}}{\sqrt{2}}\tau \quad \text{对于 } FP_4. \end{aligned} \quad (19)$$

利用上述关系可以直接得到

$$QFP_{1,5}: \quad a(\tau) = \left(\frac{3|\dot{\phi}^*|\bar{b}}{\sqrt{2}c}\right)^{\frac{\dot{\alpha}^*c}{3|\dot{\phi}^*|}} \tau^{\frac{\dot{\alpha}^*c}{3|\dot{\phi}^*|}} e^{\zeta}, \quad \phi(\tau) = \frac{c}{3} \ln \left| \frac{3\dot{\phi}^*\bar{b}}{\sqrt{2}c}\tau \right|, \quad (20)$$

$$QFP_{2,3}: \quad a(\tau) = (c|\dot{\phi}^*|)^{\frac{\dot{\alpha}^*}{c|\dot{\phi}^*|}} \tau^{\frac{\dot{\alpha}^*}{c|\dot{\phi}^*|}} e^{\zeta}, \quad \phi(\tau) = \frac{1}{c} \ln |c\dot{\phi}^*\tau|, \quad (21)$$

$$FP_4: \quad a(\tau) = \exp\left(\frac{\bar{b}\dot{\alpha}^*}{\sqrt{2}}\tau\right), \quad \phi(\tau) = \phi^*. \quad (22)$$

Phantom 场的密度和压强分别为

$$\rho = -\phi'^2 + 2V(\phi), \quad p = -\phi'^2 - 2V(\phi), \quad (23)$$

哈勃参量 $H = a' / a$, 引入密度参量 $\Omega = \frac{\rho}{3H^2}$, 根据 (4) 式可得

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a'^2}. \quad (24)$$

在此基础上, 分析宇宙学解的特性, 如表 2 所示:

表 2 宇宙学解的属性分析

(Q)FP	k_1	c	吸引子类型	a	Ω	w
1	0	$0 < c < \infty$	结点	$\frac{c^2}{\tau^9}$	1	$-1 - \frac{6}{c^2}$
2	1	$0 < c < \sqrt{3}$	焦点	τ	$-\frac{1}{c^2}$	-3
3	-1	$0 < c < \sqrt{3}$	结点	$\frac{1}{\tau^2}$	1	$-1 - \frac{2c^2}{3}$
4	1	$\sqrt{3} < c < \infty$	焦点	$e^{\frac{\bar{b}\sqrt{2-3}}{c\sqrt{3}}}$	1	-1
5	± 1	$\sqrt{3} < c < \infty$	结点	$\frac{c^2}{\tau^9}$	1	$-1 - \frac{6}{c^2}$

由上表可知, FP_4 对应的是 de Sitter 宇宙解. 对于其他临界点, 无论 c 取何值, w 均小于 -1, 这将导

致剧烈的 big rip. 同时对于双指数势, 显然不满足 phantom 场存在 tracking 吸引子的条件 $\Gamma = \frac{V_{,\phi\phi} V}{(V_{,\phi})^2} < \frac{1}{2}$ ^[9], 所以不存在 tracking 解.

参考文献:

- [1] LI X Z, HAO J G, LIU D J. Quintessence with $O(N)$ symmetry[J]. *Class Quant Grav*, 2003, 19: 6049.
- [2] MELCHIORR A, MERSINI L, ODMANN C J, TRODDEN M. The state of the dark energy equation of state[J]. *Phys Rev D*, 2003, 68: 043509.
- [3] CALDWELL R R. Spintessence! New models for dark matter and darkenergy[J]. *Phys Lett B*, 2002, 23: 545.
- [4] HAO J G, LI X Z. Attractor solution in phantom field[J]. *Phys Rev D*, 2003, 67: 107303.
- [5] HAO J G, LI X Z. Constructing dark energy models with late time de Sitter attractor[J]. *Phys Rev D*, 2003, 68: 083514.
- [6] OHTA N. Accelerating cosmologies from S - Branes[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 061303.
- [7] JAERV L, MOHAUPT T, SAUERESSIG F. Quintessence cosmologies with a double exponential potential[J]. 2004, ArXiv: hep-th/0403063.
- [8] LI X Z, HAO J G. Phantom field with $O(N)$ symmetry in an exponential potential[J]. *Phys Rev D*, 2004, 69: 107303.
- [9] HAO J G, LI X Z. Phantom cosmic dynamics: Tracking attractor and cosmic doomsday[J]. *Phys Rev D*, 2004, 70: 043529.

Phantom cosmologies with a double exponential potential

SUN Chang-bo, ZHAO Yi-bin, SUN Jue-min

(Shanghai United Center For Astrophysics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Using phase space methods, the phantom dynamics of the double exponential potential are systematically analyzed. Even if the major objective is in potential arising from M -theory, one has not limited himself to study all possible positive ratios of the coefficients in the exponential. The complete classification of solutions are given according to their late-time behavior. Especially, a heteroclinic solution which is an orbit connecting two different critical points in contrast with the case of quintessence.

Key words: Phantom; de Sitter attractor; heteroclinic orbit; M -theory