第24卷 第1期
1995年3月

上海师范大学学报(自然科学版)
J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)

Vol. 24, No. 1
Mar. , 1995

缓变线性离散大系统的稳定性

金 均
(数学系)

提 要 本文采用冻结系数法和李雅普诺夫函数法研究了一类缓变线性离散大系统的稳定性，得到了一些比较深刻的结果.

关键词 缓变系数；离散系统；冻结系数；李雅普诺夫函数；渐近稳定
中图法分类号 O175.13

0 引言

众所周知，对于常系数离散大系统

$$x(n+1)=Ax(n) \tag{1}$$

这里 A 是 $k\times k$ 阶方阵，x 是 k 维向量，当 A 的所有特征根的模均小于1时，则系统(1)的零解是渐近稳定的，那么，对于变系数离散系统

$$x(n+1)=A(n)x(n)$$

来说，如果 $A(n)$ 的所有特征根满足

$$|\lambda_i(n)|\le\delta<1(\delta>0),$$

则其零解是否也渐近稳定呢?回答是否定的，下面的例子可以说明：

$$\begin{cases} x_1(n+1)=3x_1(n)-2(\frac{1}{2})^n x_2(n) \\ x_2(n+1)=\frac{11}{2}\cdot 2^n x_1(n)-\frac{7}{2}x_2(n) \end{cases} \tag{2}$$

它的通解为

$$\begin{cases} x_1(n)=c_1\{\frac{11}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]+(\frac{1}{4})^n\}+c_2 \\ x_2(n)=c_1\{\frac{11}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]2^n\}+c_2 2^n \end{cases}$$

显然，(2)的零解是不稳定的，但系统(2)的系数矩阵的所有特征根的模均小于1，因为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2(\frac{1}{2})^n \\ \frac{11}{2}\cdot 2^n & -\frac{7}{2}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0,$$

本文于1994年3月23日收到.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, \lambda_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i,$$

所以 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$，这个例子充分说明了变系数系统不象常系数系统只要特征根的模均小于1,就可保证其零解是渐近稳定的,而对变系数系统除了特征根的模均小于1外,还要附加其他适当的条件,才能保证其零解是渐近稳定的.本文利用了冻结系数法和李雅普诺夫函数法研究了一类缓变线性离散大系统的稳定性.

1　引理

为了下面研究的方便,我们先引入下面的几个引理(证明见著作[1]).

考虑 k 阶离散系统初值问题

$$\begin{cases} x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n)) \\ x(n_0) = x_{n_0} \end{cases} \tag{3}$$

其中 $A(n)$ 是 $k \times k$ 阶非奇异矩阵，$f: N_{n_0}^+ \times R^k \to R^k$，其对应的齐次方程组的初值问题为

$$\begin{cases} x(n+1) = A(n)x(n) \\ x(n_0) = x_{n_0} \end{cases} \tag{4}$$

引理 1　初值问题(3)的解 $x(n) = x(n, n_0, x_{n_0})$ 满足

$$x(n) = \varphi(n, n_0)x_{n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} \varphi(n, j+1) f(j, x(j)).$$

这里 $\varphi(n, n_0)$ 为(4)的一个基解矩阵.

引理 2　设 $\varphi(n, n_0)$ 是(4)的一个基解矩阵,则系统(4)的零解是一致稳定的充要条件是存在常数 $M > 0$，使得

$$\|\varphi(n, n_0)\| < M$$

对于一切 $n \geqslant n_0$ 都成立.

引理 3　系统(4)的零解是一致渐近稳定的充要条件是存在两个正数 $a, \eta (\eta < 1)$，使得

$$\|\varphi(n, n_0)\| \leq a\eta^{n-n_0}$$

引理 4　若 $n \in N_{n_0}^+, k_n \geqslant 0, y_{n+1} \leq y_{n_0} + \sum_{s=n_0}^{n} [k_s y_s + p_s]$,

则

$$y_n \leq y_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} (1 + k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \prod_{r=s+1}^{n-1} (1 + k_r)$$

$$\leq y_{n_0} \exp(\sum_{s=n_0}^{n-1} k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \exp(\sum_{r=s+1}^{n-1} k_r)$$

对所有 $n \geqslant n_0$ 均成立,这就是离散的 gronwall 不等式.

引理 5　考虑常系数线性离散系统

$$x(n+1) = Ax(n)$$

这里 A 为 $s \times s$ 的常数矩阵,它的平凡解是渐近稳定的充分必要条件是对于任一给定的负定实对称阵 C，存在唯一正定实对称阵 B，满足方程

$$A^T BA - B = C$$

引理 6　考虑系统 $x(n+1)=f(n,x(n))$，这里 $f(n,0)=0$，如果存在一个定正的具有无穷小上界的 V 函数，使得沿着系统的解的第一差分 $\Delta V(n,x(n))$ 是负定的，则系统的零解是一致渐近稳定的.

2　冻结系统法

现在我们讨论缓变离散大系统

$$x(n+1)=A(n)x(n) \tag{5}$$

的零解的稳定性. 这里 $A(n)$ 是 $s\times s$ 矩阵，$x(n)\in R^s$，我们的想法是把 $A(n)$ “冻结”在某状态 $A(n_0)$，成为常数矩阵，从冻结状态的离散系统零解的稳定性，加上某些限制条件，保证原系统零解的稳定性，基于这种想法，把系统(5)改写成

$$x(n+1)=A(n_0)x(n)+(A(n)-A(n_0))x(n) \tag{6}$$

其对应的“齐次”方程组为

$$x(n+1)=A(n_0)x(n) \tag{7}$$

对于系统(6)，(7)，我们得到如下一些基本定理.

定理 1　如果系统(7)的零解是一致稳定的，且 $\|A(j)-A(n_0)\|\leq r$ 对一切 $j\leq n_0$ 均成立，这里 r 是一个正常数. 则系统(6)的零解也是一致稳定的.

证　根据引理1，系统(6)满足初值 $x(n_0)=x_{n_0}$ 的解为

$$x(n)=\varphi(n,n_0)x_{n_0}+\sum_{j=n_0}^{n-1}\varphi(n,j+1)(A(j)-A(n_0))x(j)$$

这里 $\varphi(n,n_0)$ 为系统(7)的一个基解矩阵. 因为系统(7)的零解是一致稳定的，所以由引理2知，存在 $M>0$，使 $\|\varphi(n,n_0)\|<M$，当 $n\geqslant n_0$ 时均成立，于是我们有

$$\begin{aligned}\|x(n)\|&\leq\|\varphi(n,n_0)\|\|x_{n_0}\|+\sum_{j=n_0}^{n-1}\|\varphi(n,j+1)\|\|A(j)-A(n_0)\|\|x(j)\|\\&\leq M\|x_{n_0}\|+M\sum_{j=n_0}^{n-1}\|A(j)-A(n_0)\|\|x(j)\|\\&\leq M\|x_{n_0}\|+Mr\sum_{j=n_0}^{n-1}\|x(j)\|\\&\leq M\|x_{n_0}\|\exp(Mr)\end{aligned}$$

所以，任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta<\varepsilon/M\exp(Mr)$，当 $\|x_{n_0}\|<\delta$ 时有 $\|x(n)\|\leq M\cdot\varepsilon/M\exp(Mr)\cdot\exp(Mr)=\varepsilon$. 因此系统(6)的零解是一致稳定的，定理1证毕.

定理 2　设 1) 系统(7)的零解是一致渐近稳定的；

2) $\|A(j)-A(n_0)\|\leq r$ 对一切 $j\geqslant n_0$ 均成立；r 为一个正常数，

则系统(6)的零解也是一致渐近稳定的.

证　因为(6)满足初值问题的解可写成

$$x(n)=\varphi(n,n_0)x_{n_0}+\sum_{j=n_0}^{n-1}\varphi(n,j+1)(A(j)-A(n_0))x(j),$$

又因为(7)的零解是一致渐近稳定，所以任给 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$，使得 $n>N(\varepsilon)$ 时有

$$\|\varphi(n,n_0)x_{n_0}\|<\varepsilon$$

于是，我们得到

$$\|x(n)\| \leq \|\varphi(n,n_0)x_{n_0}\| + \sum_{j=n_0}^{n-1}\|\varphi(n,j+1)\|\|(A(j)-A(n_0))\|\|x(j)\|$$

$$\leq \varepsilon + Mr\sum_{j=n_0}^{n-1}\|x(j)\|$$

$$\leq \varepsilon\exp(Mr)$$

这里 M 是 $\varphi(n,j+1)$ 的上界. 由此可以推出

$$\lim_{n\to\infty}\|x(n)\| = 0$$

即系统(6)的零解是一致渐近稳定的，定理2证毕.

定理 3　设1)系统(7)的零解是一致渐近稳定；

2) $\|A(j)-A(n_0)\| \leq r$ 对一切 $j \geq n_0$ 均成立；

3) 存在正常数 $H,\eta(\eta<1)$，满足 $\eta + rH < 1$

则系统(6)的零解是指数渐近稳定的.

证　系统(6)满足初始条件 $x(n_0) = x_{n_0}$ 的解可表为

$$x(n) = \varphi(n,n_0)x_{n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1}\varphi(n,j+1)(A(j)-A(n_0))x(j).$$

又因为系统(7)的零解是一致渐近稳定的，则由引理3知它的基解矩阵满足

$$\|\varphi(n,n_0)\| \leq H\eta^{n-n_0}$$

这里 $H>0, 0<\eta<1$，这样我们得到

$$\|x(n)\| \leq H\eta^{n-n_0}\|x_{n_0}\| + rH\eta^{n-1}\sum_{j=n_0}^{n-1}\eta^{-j}\|x(j)\|$$

将上式两端同乘 η^{-n}，并引进新变量

$$y(n) = \eta^{-n}\|x(n)\|$$

则上式可化为

$$y(n) \leq H\eta^{-n_0}\|x_{n_0}\| + rH\eta^{-1}\sum_{j=n_0}^{n-1}y(j)$$

再由离散的 Gronwall 不等式得

$$y(n) \leq H\eta^{-n_0}\|x_{n_0}\|\prod_{j=n_0}^{n-1}(1+rH\eta^{-1})$$

$$= H\eta^{-n_0}\|x_{n_0}\|(1+rH\eta^{-1})^{n-n_0}$$

由此可推得

$$\|x(n)\| \leq H\|x_{n_0}\|(\eta+rH)^{n-n_0},$$

由条件3)：$\eta + rH < 1$，即得系统(6)的零解是指数渐近稳定的，定理3证毕.

3 Liapunov 函数法

上面用冻结系数法研究了系统(6)的零解的一些稳定性态，现在我们用 Liapunov 函数来研究系统(6)零解稳定性，我们得到

定理 4　设1)系统(7)的零解是一致渐近稳定的；

2) $\|A(j)-A(n_0)\| \leq r$ 对一切 $j \geq n_0$ 均成立，r 为一个适当小的正数，

则(6)的零解是一致渐近稳定的.

证 由假设,系统(7)的零解是一致渐近稳定的,所以对系数矩阵 $A(n_0)$,根据引理5知,若给定负定的实对称矩阵 $c = -I$(I 为单位矩阵),则必存在唯一正定、实对称矩阵 B,满足矩阵方程

$$A^T(n_0)BA(n_0) - B = C$$

现在利用这个矩阵 B 作 Liapunov 函数

$$V(x(n)) = x^T(n)Bx(n)$$

显然,这个 V 函数是定正的,具有无穷小上界的,对 V 沿着系统(6)的解作第一差分

$$\begin{aligned}\Delta V(x(n)) &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \\ &= x^T(n+1)Bx(n+1) - x^T(n)Bx(n) \\ &= [A(n_0)x(n) + (A(n) - A(n_0))x(n)]^T B \\ &\quad [A(n_0)x(n) + (A(n) - A(n_0))x(n)] - x^T(n)Bx(n) \\ &= [x^T(n)A^T(n_0) + x^T(n)(A^T(n) - A^T(n_0))]B \\ &\quad [A(n_0)x(n) + (A(n) - A(n_0))x(n)] - x^T(n)Bx(n) \\ &= x^T(n)[A^T(n_0)BA(n_0) - B]x(n) + V(x(n)(A^T(n) - A^T(n_0))) + x^T(n) \\ &\quad A^T(n_0)B(A(n) - A(n_0))x(n) + x^T(n)(A^T(n) - A^T(n_0))BA(n_0)x(n) \\ &= -x^T(n)x(n) + V(x(n)(A^T(n) - A^T(n_0))) + x^T(n)A^T(n_0)B \\ &\quad (A(n) - A(n_0))x(n) + x^T(n)(A^T(n) - A^T(n_0))BA(n_0)x(n),\end{aligned}$$

根据假设2):$\|A(j) - A(n_0)\| \le r$,r 为适当小的数,现在我们选取这样小的 r,使下面关系式满足,

$$V(\|x(n)\|\|A^T(n) - A^T(n_0)\|) \le \frac{1}{4}x^T(n)x(n)$$

$$\|x^T(n)\|\|A^T(n) - A^T(n_0)\|\|B\|\|A(n_0)\|\|x(n)\| \le \frac{1}{4}x^T(n)x(n)$$

$$\|x^T(n)\|\|A^T(n_0)\|\|B\|\|A(n) - A(n_0)\|\|x(n)\| \le \frac{1}{4}x^T(n)x(n)$$

对一切 $n \geqslant n_0$ 均成立,于是我们得到

$$\Delta V(x(n)) \le \frac{1}{4}x^T(n)x(n)$$

这样,根据引理6得到系统(6)的零解是一致渐近稳定的,证毕.

当然,在定理4的条件下,我们也可以构造适当的 Liapunov 函数,可证得系统(6)的零解是指数渐近稳定的,在此不详细叙述了.

参 考 文 献

[1] 王联、王慕秋,常差分方程,新疆大学出版社,1991

[2] 徐道义,线性时变离散大系统的稳定性,科学通报,1983,18

[3] S. P. Gorden, A Stability theory for Perturbed difference equations, *SIAM*, *J. Control*, 1972,10(4):671—678

Stability of Lagre-Scale Discrete Linear Systems with Slowly Changing Coefficients

Jin Jun

(Department of Mathematics)

Abstract

We study the stability of Lagre-Scale discrete linear systems with slowly changing coefficients by using freezing coefficients and Liapunov function mothods and get some quite profound results.

Keywords slowly changing coefficient; discrete system; freezing coefficient; Liapunov function; asymptotic stability